Master 1 Année 2010/2011

Logique pour l'Informatique Avancée

Feuille de TD n° 2

Exercice 1 —

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$, et les deux propositions suivantes

$$p: \quad \exists k \in \mathbb{N}, u_k = 0,$$
$$q: \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n.$$

   Écrire l'implication $p \Rightarrow q$ ainsi que sa contraposée, sa réciproque et la contraposée de sa réciproque. Lesquelles de ces implications sont vraies ?

2. On considère les formules $p = (\forall x \in A, \exists y \in B, P(x,y))$ et $q = (\exists y \in B, \forall x \in A, P(x,y))$, où :
   – A est l'ensemble des hommes,
   – B est l'ensemble des femmes,
   – $P(x,y)$ signifie « *y aime x* ».
   Que peut-on dire de $p \Rightarrow q$? De sa réciproque ?

Exercice 2 — On se donne un langage comprenant l'égalité ainsi qu'un autre symbole de relation binaire R. Soit la formule $\forall x, \forall y, R(x,y) \Rightarrow x \neq y$.

1. Cette formule admet-elle un modèle à un seul élément (c'est à dire est-elle *satisfaisable* dans un modèle dont l'ensemble de base n'a qu'un seul élément) ?
2. Combien admet-elle de modèles à deux éléments ?
3. Si l'ensemble de base est l'ensemble des entiers naturels, peut-on :
   – interpréter R par la relation de divisibilité (c'est à dire $R(n,m)$ ssi « *n divise m* » ssi $m \bmod n = 0$) et satisfaire la formule ?
   – interpréter R par la relation de divisibilité (c'est à dire $R(n,m)$ ssi « *m divise n* » ssi $n \bmod m = 0$) et satisfaire la formule ?

Exercice 3 — Mêmes questions avec la formule $\forall x, \exists y, (R(x,y) \wedge x \neq y)$.

Exercice 4 —

1. Soit l'énoncé « *il existe un entier impair divisible par* 3 ».
   Pourquoi la formule $\exists x, EntierImpair(x) \Rightarrow DivisiblePar(3,x)$ n'est pas fidèle à l'énoncé ? Donner la traduction correcte.
2. Donner des contre-exemples (c'est à dire des interprétations qui les rendent fausses) des formules suivantes :
   (a) $(\forall x, A(x) \vee B(x)) \Rightarrow ((\forall x, A(x)) \vee (\forall x, B(x)))$

(b) $((\exists x, A(x)) \wedge (\exists x, B(x))) \Rightarrow (\exists x, A(x) \wedge B(x))$

Exercice 5 — On se donne l'ensemble de fonctions suivantes $\mathcal{F} = \{0, S, +, \times\}$ où 0 est une constante, S est un symbole de fonction unaire, et $+$ et $\times$ sont des symboles de fonctions binaires ; et l'ensemble de prédicats $\mathcal{P} = \{=\}$. Soit $\mathbb{N}$ l'interprétation standard de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ (où S est interprété comme la fonction *Successeur*). Donner des formules qui expriment :

1. p est strictement plus petit que q
2. p divise q
3. p est premier
4. p et q sont premiers entre eux

Exercice 6 — Soit R un symbole de relation binaire. Pour chacune des formules et des interprétations ci-dessous, dire si la formule est satisfaite ou non dans l'interprétation.

a. $\forall x, \forall y, (\neg R(x,x) \wedge (R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,x)) \wedge (R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)))$
b. $\exists x, \forall y, R(x,y)$
c. $\exists x, \forall y, R(y,x)$
d. $\forall x, \exists y, (R(x,y) \wedge \forall z, (R(x,z) \Rightarrow (z = y \vee R(y,z))))$
e. $\forall x, \forall y, (R(x,y) \Rightarrow \exists z, (R(x,z) \wedge R(z,y)))$

1. $\mathbb{N}$ où R est interprété par $<$
2. $\mathbb{Q}$ où R est interprété par $<$
3. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ où R est interprété par $\subsetneq$

Conseil : fixer d'abord l'interprétation, puis passer ensuite en revue les formules.

Exercice 7 — On considère les quatre formules suivantes :

- $F_1 = Q(a)$
- $F_2 = \forall x, (P(x) \vee Q(x))$
- $F_3 = \exists x, \neg(P(x) \wedge Q(x))$
- $F_4 = \forall x, (P(x) \Rightarrow P(S^3(x)))$

On rappelle que $S^3(x) \equiv S(S(S(x)))$. On considère l'interprétation dans laquelle l'ensemble de base $M = \mathbb{N}$, on interprète la constante a par l'entier 0, et la fonction S par $S(n) = n + 1$.

1. On considère la première interprétation I_1 dans laquelle $P_{I_1}(n)$ est vrai ssi $n = 1$, et $Q_{I_1}(n)$ est vrai ssi $n \geqslant 1$. Alors I_1 est-elle un modèle de F_1 ? De F_2 ? De F_3 ? De F_4 ? De $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$?
2. On considère la seconde interprétation I_2 dans laquelle $P_{I_2}(n)$ est toujours faux, et $Q_{I_2}(n)$ est vrai ssi $n = 0$. Alors I_2 est-elle un modèle de F_1 ? De F_2 ? De F_3 ? De F_4 ? De $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$?
3. Trouver une interprétation I_3 qui soit modèle de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$.

Exercice 8 — Soient les deux relations binaires *arc* et *chemin*, et trois constantes a, b et c. On considère l'ensemble P constitué des cinq formules suivantes :

$$
\begin{array}{rl}
arc(a,b) & \forall x, y, arc(x,y) \Rightarrow chemin(x,y) \\
arc(b,c) & \forall x, y, z, (arc(x,z) \wedge chemin(z,y)) \Rightarrow chemin(x,y) \\
\forall x, chemin(x,x) &
\end{array}
$$

Trouver deux modèles différents de P.