Le système T

Pascal Manoury

23 novembre 2010

Donner une présentation du *système T* de Gödel et de sa preuve de normalisation.

1 Un langage pour des fonctions calculables

Le langage x représente les variables.

$$\begin{array}{rcl} t & ::= & x \mid \lambda x.t \mid (t\ t) \\ & \mid & \langle t,t \rangle \mid \pi_1 \mid \pi_2 \\ & \mid & 0 \mid \mathsf{S}t \mid (\mathsf{rec}\ t\ t\ t) \end{array}$$

Les règles de calcul réduction (gauche)

$$\begin{array}{lcll} (t\ u) & \hookrightarrow & (t'\ u) & \mathsf{si}\ t \hookrightarrow t' \\ (v\ u) & \hookrightarrow & (v\ u') & \mathsf{si}\ u \hookrightarrow u' \text{ et } v \text{ non réductible} \\ (\lambda x.t\ u) & \hookrightarrow & t[u/x] & \\ \langle t,u \rangle & \hookrightarrow & \langle t',u \rangle & \mathsf{si}\ t \hookrightarrow t' \\ \langle v,u \rangle & \hookrightarrow & \langle v,u' \rangle & \mathsf{si}\ u \hookrightarrow u' \text{ et } v \text{ non réductible} \\ \pi_1 \langle t,u \rangle & \hookrightarrow & t & \\ \pi_2 \langle t,u \rangle & \hookrightarrow & u & \\ (\mathsf{rec}\ 0\ t_0\ t_s) & \hookrightarrow & t_0 & \\ (\mathsf{rec}\ \mathsf{S}t\ t_0\ t_s) & \hookrightarrow & (t_s\ t\ (\mathsf{rec}\ t\ t_0\ t_s)) & \end{array}$$

On note $\overset{*}{\hookrightarrow}$ la *clôture transitive et réflexive* de $\hookrightarrow$.

Un terme t est en *forme normale* lorsqu'il n'existe plus de t' tel que $t \hookrightarrow t'$. On appellera *valeur* un terme en forme normale.

Un terme t est *normalisable* lorsqu'il existe une valeur v telle que $t \overset{*}{\hookrightarrow} v$.

<u>Commentaire:</u> en reformulant les deuxième et cinquième règles de réduction sans leur restriction sur v

$$\begin{array}{lcll} (t\ u) & \hookrightarrow & (t\ u') & \mathsf{si}\ u \hookrightarrow u' \\ \langle t,u \rangle & \hookrightarrow & \langle t,u' \rangle & \mathsf{si}\ u \hookrightarrow u' \end{array}$$

on obtient une relation de réduction *non déterministe* mais pour laquelle on a le résultat suivant :

<u>Théorème:</u> (confluence) si t est normalisable et si $t \overset{*}{\hookrightarrow} t_1$ et si $t \overset{*}{\hookrightarrow} t_2$ alors, il existe w tel que $t_1 \overset{*}{\hookrightarrow} w$ et $t_2 \overset{*}{\hookrightarrow} w$.

Pratique du langage

Addition

$$add = \lambda x \lambda y.(\mathsf{rec}\ x\ y\ \lambda x \lambda h.\mathsf{S}h)$$

$$
\begin{array}{rcl}
(add\ \mathsf{SS0}\ \alpha) & \hookrightarrow & (\mathsf{rec}\ \mathsf{SS0}\ \alpha\ \lambda x\lambda h.\mathsf{S}h) \\
& \hookrightarrow & (\lambda x\lambda h.\mathsf{S}h\ \mathsf{S0}\ (\mathsf{rec}\ \mathsf{S0}\ \alpha\ \lambda x\lambda h.\mathsf{S}h)) \\
& \hookrightarrow & \mathsf{S}(\mathsf{rec}\ \mathsf{S0}\ \alpha\ \lambda x\lambda h.\mathsf{S}h) \\
& \hookrightarrow & \mathsf{S}(\lambda x\lambda h.\mathsf{S}h\ \mathsf{0}\ (\mathsf{rec}\ \mathsf{0}\ \alpha\ \lambda x\lambda h.\mathsf{S}h)) \\
& \hookrightarrow & \mathsf{SS}(\mathsf{rec}\ \mathsf{0}\ \alpha\ \lambda x\lambda h.\mathsf{S}h) \\
& \hookrightarrow & \mathsf{SS}\alpha
\end{array}
$$

<u>Lemme :</u> $(add\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ \mathsf{S}^m\mathsf{0}) \overset{*}{\hookrightarrow} \mathsf{S}^{n+m}\mathsf{0}$

<u>Preuve:</u> on montre par induction sur n que $(\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ \mathsf{S}^m\mathsf{0}\ \lambda x\lambda h.\mathsf{S}h) \hookrightarrow \mathsf{S}^{n+m}\mathsf{0}$

- si $n=0$ alors $\mathsf{S}^0\mathsf{0} = \mathsf{0}$ et $(\mathsf{rec}\ \mathsf{0}\ \mathsf{S}^m\mathsf{0}\ \lambda x\lambda h.\mathsf{S}h) \hookrightarrow \mathsf{S}^m\mathsf{0} = \mathsf{S}^{0+m}\mathsf{0}$.
- si $n = n{+}1$, par HR, $(\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ \mathsf{S}^m\mathsf{0}\ \lambda x\lambda h.\mathsf{S}h)) \hookrightarrow \mathsf{S}^{n+m}\mathsf{0}$; alors $\mathsf{S}^{n+1}\mathsf{0} = \mathsf{SS}^n\mathsf{0}$ et $(\mathsf{rec}\ \mathsf{SS}^n\mathsf{0}\ \mathsf{S}^m\mathsf{0}\ \lambda x\lambda h.\mathsf{S}h) \hookrightarrow$ $(\lambda x\lambda h.\mathsf{S}h\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ (\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ \mathsf{S}^m\mathsf{0}\ \lambda x\lambda h.\mathsf{S}h)) \hookrightarrow \mathsf{S}(\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ \mathsf{S}^m\mathsf{0}\ \lambda x\lambda h.\mathsf{S}h) \hookrightarrow_{(HR)} \mathsf{SS}^{n+m}\mathsf{0} = \mathsf{S}^{(n+1)+m}\mathsf{0}$

Multiplication

$$mul = \lambda x\lambda y.(\mathsf{rec}\ x\ \mathsf{0}\ \lambda x\lambda h.(add\ y\ h))$$

$$
\begin{array}{rcl}
(mul\ \mathsf{SS0}\ \alpha) & \hookrightarrow & (\mathsf{rec}\ \mathsf{SS0}\ \mathsf{0}\ \lambda x\lambda h.(add\ \alpha\ h)) \\
& \hookrightarrow & (\lambda x\lambda h.(add\ \alpha\ h)\ \mathsf{S0}\ (\mathsf{rec}\ \mathsf{S0}\ \mathsf{0}\ \lambda x\lambda h.(add\ \alpha\ h))) \\
& \hookrightarrow & (add\ \alpha\ (\mathsf{rec}\ \mathsf{S0}\ \mathsf{0}\ \lambda x\lambda h.(add\ \alpha\ h))) \\
& \hookrightarrow & (add\ \alpha\ (\lambda x\lambda h.(add\ \alpha\ h)\ \mathsf{0}\ (\mathsf{rec}\ \mathsf{0}\ \mathsf{0}\ \lambda x\lambda h.(add\ \alpha\ h)))) \\
& \hookrightarrow & (add\ \alpha\ (add\ \alpha\ (\mathsf{rec}\ \mathsf{0}\ \mathsf{0}\ \lambda x\lambda h.\mathsf{S}h))) \\
& \hookrightarrow & (add\ \alpha\ (add\ \alpha\ \mathsf{0}))
\end{array}
$$

<u>Lemme :</u> $(mul\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ \mathsf{S}^m\mathsf{0}) \overset{*}{\hookrightarrow} \mathsf{S}^{nm}\mathsf{0}$

<u>Preuve:</u> en exercice

Prédécesseur

$$pred = \lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ \mathsf{0}\ \lambda x.\lambda h.x)$$

$$
\begin{array}{rcl}
(pred\ \mathsf{S}\alpha) & \hookrightarrow & (\mathsf{rec}\ \mathsf{S}\alpha\ \mathsf{0}\ \lambda x.\lambda h.x) \\
& \hookrightarrow & (\lambda x.\lambda h.x\ \alpha\ (\mathsf{rec}\ \alpha\ \mathsf{0}\ \lambda x.\lambda h.x) \\
& \hookrightarrow & \alpha
\end{array}
$$

Soustraction

$$sub = \lambda x\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ x\ \lambda x\lambda h.(pred\ h)$$

Alternative $\mathsf{0}$ est «faux», le reste est «vrai».

$$if = \lambda x.\lambda t_1\lambda t_2.(\mathsf{rec}\ x\ t_2\ \lambda x\lambda h.t_1)$$

Fonctions booléennes

$$not = \lambda x.(if\ x\ \mathsf{0}\ x)$$

$$or = \lambda x\lambda y.(if\ x\ x\ y)$$

$$and = \lambda x\lambda y.(if\ x\ y\ x)$$

Comparaisons

$$lt = \lambda x\lambda y.(sub\ y\ x)$$

$$eq = \lambda x\lambda y.(not\ (or\ (lt\ x\ y)\ (lt\ y\ x)))$$

etc.

Itérations (*fold*)

$$iter = \lambda x \lambda y \lambda f.(\mathsf{rec}\ x\ y\ \lambda x \lambda h.(f\ x\ h))$$

On en tire la somme et le produit finis

$$Sigma = \lambda x \lambda f.(iter\ x\ \mathsf{0}\ \lambda x \lambda y.(add\ (f\ x)\ y))$$

$$Pi = \lambda x \lambda f.(iter\ x\ \mathsf{S0}\ \lambda x \lambda y.(mul\ (f\ x)\ y))$$

Extensions

En rajoutant deux constantes au langage, on peut simuler des listes :

$$\begin{array}{rcl} t & ::= & \dots \\ & | & \langle\rangle \mid (\mathsf{recp}\ t\ t\ t) \end{array}$$

Avec les régles de réduction

$$\begin{array}{lcl} (\mathsf{recp}\ \langle\rangle\ t_1\ t_2) & \hookrightarrow & t_1 \\ (\mathsf{recp}\ \langle u_1, u_2\rangle\ t_1\ t_2) & \hookrightarrow & (t_2\ u_1\ u_2\ (\mathsf{recp}\ u_2\ t_1\ t_2)) \end{array}$$

Exemple :

$$map = \lambda x \lambda f.(\mathsf{recp}\ x\ \langle\rangle\ \lambda x_1 \lambda x_2 \lambda h.\langle (f\ x), h\rangle)$$

2 Types et terminaison

Le langage de types (pour le langage sans extension)

$$\tau \quad := \quad I\!N \mid \tau \to \tau \mid \tau \wedge \tau$$

Les règles de typage une *assignation de type* s'écrit $t : \tau$. Γ est un *contexte de typage* de la forme $x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n$ où les x_i sont des variables. On écrit $\Gamma, x : \tau$ pour $x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n, x : \tau$. Un contexte de typage Γ peut être vide. L'ordre d'apparition des assignations de type dans Γ n'est pas significatif. Un *jugement de typage* s'écrit $\Gamma \vdash t : \tau$. Lorsque Γ est vide, on écrit $\vdash t : \tau$.

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}\ Ax$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \to \tau_2 \qquad \Gamma \vdash u : \tau_1}{\Gamma \vdash (t\ u) : \tau_2} \to_e \qquad\qquad \frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \tau_1 \to \tau_2} \to_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \wedge \tau_2}{\Gamma \vdash \pi_1 t : \tau_1} \wedge_{e1} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \wedge \tau_2}{\Gamma \vdash \pi_2 t : \tau_2} \wedge_{e2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \qquad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \langle t_1, t_2\rangle : \tau_1 \wedge \tau_2} \wedge_i$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{0} : I\!N}\ N_0 \qquad \frac{\Gamma \vdash t : I\!N}{\Gamma \vdash \mathsf{S}t : I\!N}\ N_s$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : I\!N \qquad \Gamma \vdash t_0 : \tau \qquad \Gamma \vdash t_s : I\!N \to \tau \to \tau}{\Gamma \vdash (\mathsf{rec}\ t\ t_0\ t_s) : \tau}\ N_e$$

<u>THÉORÈME:</u> (conservation du type par réduction) si $\vdash t : \tau$ et si $t \overset{*}{\hookrightarrow} t'$ alors $\vdash t' : \tau$.

Le théorème de normalisation On définit une *interprétation des types* notée $||\tau||$ par induction sur la formation de τ :

- $||I\!N|| = \{t \mid t \hookrightarrow^* \mathsf{S}^n\mathsf{0}\}$
- $||\tau_1 \wedge \tau_2|| = \{t \mid \exists t_1 \in ||\tau_1||.\exists t_2 \in ||\tau_2||.t \hookrightarrow^* \langle t_1, t_2\rangle\}$
- $||\tau_1 \to \tau_2|| = \{t \mid \forall u \in ||\tau_1||.(t\ u) \in ||\tau_2||\}$

<u>Remarque:</u> si $t \in ||N||$ alors $\mathsf{S}t \in ||N||$

<u>Lemme 1:</u> (adéquation) si $t \in ||\tau||$ alors t est normalisable.

<u>Preuve:</u> par induction sur τ

Si $\tau = I\!N$. alors t est normalisable par définition de $||N||$.

Si $\tau = \tau_1 \wedge \tau_2$, alors, par définition de $||\tau_1 \wedge \tau_2||$, il existe $t_1 \in ||\tau_1||$ et $t_2 \in ||\tau_2||$ tels que $t \hookrightarrow^* \langle t_1, t_2\rangle$. Par hypothèse d'induction, t_1 et t_2 sont normalisables. Il existe donc deux valeurs v_1 et v_2 telles $t \hookrightarrow^* \langle t_1, t_2\rangle \hookrightarrow^* \langle v_1, t_2\rangle \hookrightarrow^* \langle v_1, v_2\rangle$. Comme $\langle v_1, v_2\rangle$ est une valeur, t est normalisable.

Si $\tau = \tau_1 \to \tau_2$, alors, par définition de $||\tau_1 \to \tau_2||$, pour tout $u \in ||\tau_1||$, $(t\ u) \in ||\tau_2||$. Par hypothèse d'induction il existe v tel que $(t\ u) \hookrightarrow^* v$. Par définition de la réduction (gauche) il existe nécessairement une valeur v_1 telle que $t \hookrightarrow^* v_1$.

<u>Lemme 2:</u> (saturation) si $t \hookrightarrow^* t'$ et si $t' \in ||\tau||$ alors $t \in ||\tau||$.

<u>Preuve:</u> par induction sur τ.

Si $\tau = I\!N$. Si $t \hookrightarrow^* t'$ et $t' \in ||I\!N||$ alors $t \hookrightarrow^* t' \hookrightarrow^* \mathsf{S}^n\mathsf{0}$. D'où $t \in ||N||$.

Si $\tau = \tau_1 \wedge \tau_2$ et $t' \in ||\tau_1 \wedge \tau_2||$ alors il existe $t_1 \in \tau_1$ et $t_2 \in \tau_2$ tels que $t \hookrightarrow^* t' \hookrightarrow^* \langle t_1, t_2\rangle$. D'où $t \in ||\tau_1 \wedge \tau_2||$.

Si $\tau = \tau_1 \to \tau_2$. On suppose $t \hookrightarrow^* t'$ et $t' \in ||\tau_1 \to \tau_2||$. Par définition de la réduction, on a $(t\ u) \hookrightarrow^* (t'\ u)$ et, par définition de $||\tau_1 \to \tau_2||$, on a que pour tout $u \in ||\tau_1||$, $(t'\ u) \in ||\tau_2||$. Donc, par hypothèse d'induction : $t \in ||\tau_1 \to \tau_2||$.

<u>Lemme 3:</u> si $x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n \vdash t : \tau$ alors, pour tous $u_1 \in ||\tau_1||, \ldots, u_n \in ||\tau_n||$, on a $t[u_1/x_1, \ldots, u_n/x_n] \in ||\tau||$.

<u>Preuve:</u> par induction sur la dérivation de typage. On pose $\Gamma = x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n$. On note $t[\bar{u}/\bar{x}] = t[u_1/x_1, \ldots, u_n/x_n]$ pour tous $u_1 \in ||\tau_1||, \ldots, u_n \in ||\tau_n||$. On raisonne sur la dernière règle appliquée.

Règle Ax. Le terme t est une variable dans $x_1, \ldots, x_n$, disons x_j. On a

$$\frac{}{x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n \vdash x_j : \tau_j}\ Ax$$

Comme $x_j[u_1/x_1, \ldots, u_n/x_n] = u_j$, le résultat est immédiat par hypothèse.

Règle $\to_i$. La dérivation a la forme

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, x : \tau \vdash t : \tau'\end{array}}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \tau \to \tau'}\ \to_i$$

On veut $(\lambda x.t)[\bar{u}/\bar{x}] \in \tau \to \tau'$. C'est-à-dire, que pour tout $u \in ||\tau||$, $((\lambda x.t)[\bar{u}/\bar{x}]\ u) \in ||\tau'||$. Et, comme $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, on veut, en fait : $(\lambda x.t[\bar{u}/\bar{x}]\ u) \in ||\tau'||$ (on peut toujours supposer x non libre dans $\bar{u}$). Or $(\lambda x.t[\bar{u}/\bar{x}]\ u) \hookrightarrow t[\bar{u}/\bar{x}, u/x]$ et, par hypothèse d'induction, $t[\bar{u}/\bar{x}, u/x] \in ||\tau'||$. D'où, par le lemme de saturation : $((\lambda x.t)[\bar{u}/\bar{x}]\ u) \in ||\tau'||$.

Règle $\to_e$. La dérivation a la forme

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash t : \tau_1 \to \tau_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash u : \tau_1\end{array}}{\Gamma \vdash (t\ u) : \tau_2}\ \to_e$$

Par hypothèse d'induction, $t[\bar{u}/\bar{x}] \in ||\tau_1 \to \tau_2||$. C'est-à-dire que pour tout $w \in \tau_1$, $(t[\bar{u}/\bar{x}]\ w) \in ||\tau_2||$. Comme, par hypothèse d'induction, $u[\bar{u}/\bar{x}] \in ||\tau_1||$, on a en particulier que $(t[\bar{u}/\bar{x}]\ u[\bar{u}/\bar{x}]) \in ||\tau_2||$. Et, comme $(t[\bar{u}/\bar{x}]\ u[\bar{u}/\bar{x}]) = (t\ u)[\bar{u}/\bar{x}]$, on a $(t\ u)[\bar{u}/\bar{x}] \in ||\tau_2||$ c'est ce que l'on veut.

Règle $\wedge_i$. La dérivation est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash t_1 : \tau_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash t_2 : \tau_2\end{array}}{\Gamma \vdash \langle t_1, t_2 \rangle : \tau_1 \wedge \tau_2} \wedge_i$$

Par hypothèse d'induction $t_1[\bar{u}/\bar{x}] \in ||\tau_1||$ et $t_2[\bar{u}/\bar{x}] \in ||\tau_2||$. D'où, par définition, $\langle t_1[\bar{u}/\bar{x}], t_2[\bar{u}/\bar{x}] \rangle \in ||\tau_1 \wedge \tau_2||$. Et, comme $\langle t_1[\bar{u}/\bar{x}], t_2[\bar{u}/\bar{x}] \rangle = \langle t_1, t_2 \rangle[\bar{u}/\bar{x}]$, on a $\langle t_1, t_2 \rangle[\bar{u}/\bar{x}] \in ||\tau_1 \wedge \tau_2||$ qui est ce que l'on veut.

Règle $\wedge_{e1}$. La dérivation a la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash t : \tau_1 \wedge \tau_2\end{array}}{\Gamma \vdash \pi_1 t : \tau_1} \wedge_{e1}$$

Par hypothèse d'induction $t[\bar{u}/\bar{x}] \in ||\tau_1 \wedge \tau_2||$. Par définition, il existe $t_1 \in ||\tau_1||$ et $t_2 \in ||\tau_2||$ tels que $t[\bar{u}/\bar{x}] \hookrightarrow^* \langle t_1, t_2 \rangle$. D'où $(\pi_1 t)[\bar{u}/\bar{x}] = \pi_1 t[\bar{u}/\bar{x}] \hookrightarrow^* \pi_1 \langle t_1, t_2 \rangle \hookrightarrow t_1 \in ||\tau_1||$ qui est ce que nous voulons.

Règle $\wedge_{e2}$. Similaire au cas précédent.

Règle N_0. La dérivation est

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathsf{0} : I\!N} N_0$$

Alors $t[\bar{u}/\bar{x}] = \mathsf{0} \in ||N||$.

Règle N_s. La dérivation a la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash t : I\!N\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{S}t : I\!N} N_s$$

Par hypothèse d'induction $t[\bar{u}/\bar{x}] \in ||N||$. D'où $(\mathsf{S}t)[\bar{u}/\bar{x}] = \mathsf{S}t[\bar{u}/\bar{x}] \hookrightarrow^* \mathsf{S}\mathsf{S}^n\mathsf{0}$. Et comme $\mathsf{S}^{n+1}\mathsf{0} \in ||N||$ par définition, on a, par le lemme de saturation, que $(\mathsf{S}t)[\bar{u}/\bar{x}] \in ||N||$ qui est ce que nous voulons.

Règle $I\!N_e$. La dérivation est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash t : I\!N\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash t_0 : \tau\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash t_s : I\!N \to \tau \to \tau\end{array}}{\Gamma \vdash (\mathsf{rec}\ t\ t_0\ t_s) : \tau} N_e$$

Par hypothèse d'induction

1. $t[\bar{u}/\bar{x}] \in ||N||$
2. $t_0[\bar{u}/\bar{x}] \in ||\tau||$
3. $t_s[\bar{u}/\bar{x}] \in ||I\!N \to \tau \to \tau||$

Avec l'hypothèse 1. on obtient $(\mathsf{rec}\ t\ t_0\ t_s)[\bar{u}/\bar{x}] = (\mathsf{rec}\ t[\bar{u}/\bar{x}]\ t_0[\bar{u}/\bar{x}]\ t_s[\bar{u}/\bar{x}]) \hookrightarrow^* (\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ t_0[\bar{u}/\bar{x}]\ t_s[\bar{u}/\bar{x}])$. On montre alors par induction sur n que $(\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ t_0[\bar{u}/\bar{x}]\ t_s[\bar{u}/\bar{x}]) \in ||\tau||$.

Si $n = 0$, alors $(\mathsf{rec}\ \mathsf{0}\ t_0[\bar{u}/\bar{x}]\ t_s[\bar{u}/\bar{x}]) \hookrightarrow t_0[\bar{u}/\bar{x}] \in ||\tau||$ par hypothèse 2. Et donc, par saturation, $(\mathsf{rec}\ \mathsf{0}\ t_0\ t_s)[\bar{u}/\bar{x}] \in ||\tau||$.

Si $n = n + 1$, $(\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^{n+1}\ t_0[\bar{u}/\bar{x}]\ t_s[\bar{u}/\bar{x}]) \hookrightarrow (t_s[\bar{u}/\bar{x}]\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ (\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ t_0[\bar{u}/\bar{x}]\ t_s[\bar{u}/\bar{x}]))$. Par hypothèse d'induction sur n : $(\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ t_0[\bar{u}/\bar{x}]\ t_s[\bar{u}/\bar{x}])) \in ||\tau||$. Par définition, $\mathsf{S}^n\mathsf{0} \in ||N||$. Et donc, par définition de $||I\!N \to \tau \to \tau||$ et par hypothèse 3., $(t_s[\bar{u}/\bar{x}]\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ (\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ t_0[\bar{u}/\bar{x}]\ t_s[\bar{u}/\bar{x}])) \in ||\tau||$. Ce qui nous donne, par saturation que $(\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^{n+1}\ t_0[\bar{u}/\bar{x}]\ t_s[\bar{u}/\bar{x}]) \in ||\tau||$.

On conclut le cas de la règle $\mathbb{N}_e$ ainsi : puisque $(\mathsf{rec}\ t\ t_0\ t_s)[\bar{u}/\bar{x}] \hookrightarrow^* (\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ t_0[\bar{u}/\bar{x}]\ t_s[\bar{u}/\bar{x}])$ et que $(\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ t_0[\bar{u}/\bar{x}]\ t_s[\bar{u}/\bar{x}]) \in \tau$, le lemme de saturation nous donne que $(\mathsf{rec}\ t\ t_0\ t_s)[\bar{u}/\bar{x}] \in \tau$ qui est ce que nous voulons.

<u>Théorème:</u> (normalisation) si $\vdash t : \tau$ est dérivable alors t est normalisable.

<u>Preuve:</u> par le lemme ci-dessus, si $\vdash t : \tau$ est dérivable alors $t \in ||\tau||$. Et, par le lemme d'adéquation, t est normalisable.