Logique pour l'Informatique Avancée

Feuille de TD n° 9

Exercice 1 — Division par deux et logarithme

Le but de cet exercice est de définir un λ-terme div_2 tel que $\text{div}_2\ S^n 0 \stackrel{*}{\hookrightarrow} S^{\frac{n}{2}} 0$, la division étant comprise comme division entière.

Nous allons avoir besoin pour cela d'un schéma intermédiaire.

1. On souhaite pouvoir utiliser le schéma de récurrence d'ordre 2 suivant :

$$
\begin{aligned}
t_0 &= t_0 \\
t_1 &= t_1 \\
t_{n+2} &= f(n, t_{n+1}, t_n)
\end{aligned}
$$

   Le problème avec cette récursion est qu'elle est d'ordre 2. Or, on ne peut écrire avec rec seulement des récurrences d'ordre 1. On souhaite donc commencer par écrire un λ-terme rec_2 qui implémente ce schéma.

   Pour cela, on commence par introduire, comme pour Fibonacci, la suite $C_n = \langle t_n, t_{n+1} \rangle$.

   (a) Trouver une récurrence d'ordre 1, en utilisant π_1 et π_2 au besoin, satisfaite par la suite C_n.

   (b) En déduire un λ-terme crec_2 tel que $\text{crec}_2\ S^n 0\ t_0\ t_1\ f \stackrel{*}{\hookrightarrow} \langle t_n, t_{n+1} \rangle$

   (c) En déduire un λ-terme rec_2 tel que $\mathsf{rec}_2\ S^n 0\ t_0\ t_1\ f \stackrel{*}{\hookrightarrow} t_n$

2. On souhaite donc écrire un terme calculant la division (entière) par deux. On va suivre le schéma de récurrence suivant :

$$
\begin{aligned}
0/2 &= 0 \\
1/2 &= 0 \\
(n+2)/2 &= (n/2) + 1
\end{aligned}
$$

   En utilisant le terme rec_2, écrire un λ-terme div_2 réalisant cette opération de division (entière) par 2.

3. Trouver un λ-terme ifz tel que $\mathsf{ifz}\ 0\ t_\top\ t_\bot \stackrel{*}{\hookrightarrow} t_\top$ et $\mathsf{ifz}\ Sx\ t_\top\ t_\bot \stackrel{*}{\hookrightarrow} t_\bot$ pour tout terme x.

   Indication : On utilisera astucieusement rec.

On admet qu'alors, si on pose $\log' = \lambda f \lambda n.\mathsf{ifz}\ n\ 0\ S((f\ f)\ (\text{div}_2\ n))$ et $\log = \log'\ \log'$, alors le terme log ainsi défini calcule (1+) le logarithme (entier) de son argument.

Exercice 2 — Somme des entiers

On se donne le λ-terme suivant :

$$\text{iter} = \lambda x \lambda y \lambda f.\mathsf{rec}\ x\ y\ (\lambda x \lambda h. f\ x\ h)$$

On admet ici que iter $S^n 0\ y\ f \overset{*}{\hookrightarrow} f\ S^{n-1}0\ (f\ S^{n-2}0\ (\cdots(f\ 0\ y)\cdots))$. Dit autrement, iter $S^n 0\ y\ f$ calcule $f(n-1, f(n-2, f(\cdots f(0,y)\cdots)))$. En particulier, iter $0\ y\ f \overset{*}{\hookrightarrow} y$

1. En utilisant le terme iter précédent, écrire un λ-terme Sigma tel que Sigma $S^n 0\ f$ calcule $\sum_{i=0}^{n-1} f(i)$. On pourra utiliser le terme add vu en cours.
2. On rappelle la formule suivante : $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. En utilisant le λ-terme Sigma, écrire un λ-terme sumint tel que
$$\text{sumint } S^n 0 \overset{*}{\hookrightarrow} S^{\frac{n(n+1)}{2}} 0$$
Prouver ensuite sa correction.

Exercice 3 — Typage

Les λ-termes suivants sont-ils typables ? Si oui, en donner le type.

1. $\lambda f \lambda x. f x$
2. add $= \lambda x \lambda y.\mathsf{rec}\ x\ y\ (\lambda z \lambda h. S h)$
3. $\Omega = (\lambda x.\ x\ x)(\lambda x.\ x\ x)$
4. iter $= \lambda x \lambda y \lambda f.\mathsf{rec}\ x\ y\ (\lambda z \lambda h.(f\ x\ h))$

Exercice 4 — Ecrire des λ-termes

1. Voilà une multiplication plus performante, en donner le λ-terme.
$$\begin{array}{rcl} 0 \times y & = & 0 \\ Sx \times 0 & = & 0 \\ Sx \times Sy & = & Sy + (x \times Sy) \end{array}$$
2. Voilà une soustraction plus performante, en donner le λ-terme.
$$\begin{array}{rcl} 0 - y & = & 0 \\ Sx - 0 & = & Sx \\ Sx - Sy & = & x - y \end{array}$$
3. Fonction d'Ackermann.
$$\begin{array}{rcl} ack(0,y) & = & Sy \\ ack(Sx,0) & = & ack(x, S0) \\ ack(Sx,Sy) & = & ack(x, ack(Sx,y)) \end{array}$$