

Feuille de TD n° 5

Exercice 1 — Donner une démonstration sémantique puis une démonstration en déduction naturelle des tautologies suivantes :

1. $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
2. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
3. $(\exists x, A(x) \wedge B(x)) \rightarrow (\exists x, A(x) \wedge \exists x, B(x))$

Exercice 2 — Montrer que les règles suivantes sont correctes :

1. Règle $\wedge eg$:

$$\frac{\Gamma; A \wedge B \vdash F}{\Gamma; A; B \vdash F} \wedge eg$$

2. Règle $\wedge ig$:

$$\frac{\Gamma; A; B \vdash F}{\Gamma; A \wedge B \vdash F} \wedge ig$$

3. Règle $\rightarrow ig$:

$$\frac{\Gamma; A; A \rightarrow B; B \vdash F}{\Gamma; A; A \rightarrow B \vdash F} \rightarrow ig$$

4. Règle $\vee m$:

$$\frac{\Gamma; \neg A; \neg B \vdash C}{\Gamma; \neg(A \vee B) \vdash C} \vee m$$

Exercice 3 — Retrouver les erreurs :

- 1.

$$\frac{\frac{\frac{A \vee B \vdash A \vee B}{A \vee B \vdash A} \dots \quad \frac{A \vee B \vdash A \vee B}{A \vee B \vdash B} \dots}{A \vee B \vdash A \wedge B} \dots}{\vdash A \vee B \rightarrow A \wedge B} \dots$$

- 2.

$$\frac{\frac{\frac{\exists x, A \vdash \exists x, A}{\exists x, A \vdash A} \dots \quad \frac{\exists x, A; A \vdash A}{\exists x, A \vdash A} \dots}{\exists x, A \vdash \forall x, A} \dots}{\vdash \exists x, A \rightarrow \forall x, A} \dots$$

Exercice 4 — Démontrons le Lemme 23 du polycopié de cours :

Pour tout Γ et tout F , pour toutes substitutions $[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n]$ et $[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n]$, telles que $\forall i \neq j, \mathcal{V}_f(t_i) \cap \mathcal{V}_f(t_j) = \emptyset$ et $\forall i \neq j, \mathcal{V}_f(u_i) \cap \mathcal{V}_f(u_j) = \emptyset$.

Alors on a $\Gamma[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n] \vdash F[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n]$ si et seulement si $\Gamma[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \vdash F[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n]$.