LOGIQUE/Calculabilité

Examen final

Décembre 2006

Aucun document n'est autorisé.

On a vu en cours comment «coder» les paires d'entiers en définissant une fonction primitive récursive de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On note $\langle a, b\rangle$ le code de la paire a, b. On a vu que les fonctions d'accès fst et snd telles que $fst(\langle a, b\rangle) = a$ et $snd(\langle a, b\rangle) = b$ sont primitives récursives. On a enfin remarqué que $a \leq \langle a, b\rangle$ et $b \leq \langle a, b\rangle$.

On a vu en cours ou en exercice que le schéma

$$\begin{array}{lcl} f(0) & = & a \\ f(x+1) & = & h(x, f(p_1(x)), f(p_2(x))) \end{array}$$

avec h, p_1, p_2 primitives récursives et $p_1(x) \leq x$, $p_2(x) \leq x$, définit des fonctions primitives récursives.

En utilisant le codage des paires, on va représenter et manipuler des arbres binaires étiquetés.

Question Donnez une valeur pour l'arbre vide (*Empty*)

Question En utilisant les paires, dites comment représenter l'arbre binaire d'étiquette e et dont les sous-arbres sont t_1 et t_2. En déduire une définition de la fonction (le *constructeur*) Br telle que $Br(e, t_1, t_2)$ représente l'arbre binaire d'étiquette e et dont les sous-arbres sont t_1 et t_2.

Question Donnez la définition des fonctions (*accesseurs*) *label*, $left$ et $right$ telles que $label(Br(e, t_1, t_2)) = e$, $left(Br(e, t_1, t_2)) = t_1$ et $right(Br(e, t_1, t_2)) = t_2$.

Question En utilisant le schéma rappelé ci-dessus, et les accesseurs *label*, $left$, $right$, justifiez que le schéma ci-aprés

$$\begin{array}{lcl} f(Empty) & = & a \\ f(Br(e, t_1, t_2)) & = & h(e, f(t_1), f(t_2)) \end{array}$$

définit des fonctions primitives récursives.