L'énigme d'Einstein

L'énigme Il y a 5 maisons alignées de couleurs différentes. Dans chaque maison, vit une personne de nationalité différente. Chaque personne boit une boisson, fume un type de cigarette et élève un animal différent. Pouvez-vous dire qui élève les poissons, sachant que :

1. L'anglais habite la maison rouge.
2. Le Suédois possède un chien.
3. Le Danois boit du thé.
4. La maison verte est située à gauche de la maison blanche.
5. Dans la maison verte, on boit du café.
6. Le fumeur de Pall Mall possède un oiseau.
7. Dans la maison du milieu, on boit du lait.
8. Dans la maison jaune, on fume des Dunhill.
9. Le Norvégien habite la première maison.
10. Le fumeur de Rothmann a un voisin qui possède un chat.
11. Celui qui possède un cheval a un voisin fume des Dunhill.
12. Le fumeur de Philip Morris boit de la bière.
13. Le Norvégien est voisin de la maison bleue.
14. L'Allemand fume des Marlboro.
15. Le fumeur de Rothmann a un voisin qui boit de l'eau.

Quatre méthodes de résolution Le problème qui se pose est donc de déterminer où se trouvent les poissons en exploitant les informations contenues dans les 15 énoncés ci-dessus que l'on appellera les *axiomes* de l'énigme. On procède par *déduction* à partir des axiomes pour enrichir les informations à notre disposition jusqu'à obtenir celle recherchée (où se trouvent les poissons ?)

Nous présentons ci-dessous quatre méthodes permettant de résoudre l'énigme de façon purement logique. La première utilise la langue naturelle (ici, le français) sans rien sacrifier à la précision ni à la rigueur. La deuxième est plus abstraite et met en œuvre les ressources de la *logique formelle* ou logique mathématique, plus précisément, le *calcul des prédicats*. La troisième, donne une autre modélisation en calcul des prédicats. La quatrième et dernière repose sur une modélisation *équationnelle*.

Pour chacune des méthodes proposées, nous devrons reformuler les axiomes de façon à ce qu'ils se conforment au formalisme utilisé. Nous laissons au lecteur le soin de juger de la légitimité de ces (re)formulations.

1 Résolution préformelle en langue naturelle

Plus que les habitants, les animaux, etc. les objets visés par le problème sont les maisons et la question à résoudre n'est pas tant de savoir « qui élève les poissons » que *dans quelle maison y-a-t'il des poissons* ? De ce point de vue, celui des maisons, non seulement la couleur, mais également la nationalité de l'habitant, la boisson qui y est bue, les cigarettes qui y sont fumées, et l'animal qui y est élevé sont considérés comme des *attributs* des maisons. Chaque attribut appartient à une *espèce* : couleur, nationalité, boisson, cigarette et animal.

On identifie les maisons en leur donnant un numéro (ou indice) : 1, 2, 3, 4 et 5. On parlera de la maison n° 1, de la maison n° 2, etc. ou, de façon générique, de la maison n° i.
La relation de voisinage entre maisons est définie par la relation de succession entre leurs indices : la maison n° i est voisine des maisons n° $i-1$ et $i+1$. On a en particulier que la maison n° i « est à gauche de » la maison n° $i+1$.

Nous devons transcrire trois formes d'affirmations :
- celles qui visent une maison précise, par exemple la première maison (axiome 9) ;
- celles qui établissent un lien entre deux attributs, par exemple être habitée par l'Anglais et être rouge (axiome 1) ;
- celles qui combinent liens entre attributs et voisinage, par exemple être la maison où l'on fume des Dunhill et voisine de la maison où il y a un cheval (axiome 11).

Illustrons à partir des trois exemples pris ci-dessus les principes de transcription :
- la transcription de la première forme est immédiate : l'expression « la première maison » devient « la maison n° 1 » ;
- pour la deuxième forme, l'expression « L'Anglais habite la maison rouge » exprime simplement que la maison où habite l'Anglais et la maison rouge sont la même, i.e. ont le même indice. L'axiome 1 devient : si la maison n° i est rouge alors l'Anglais habite la maison n° i, et réciproquement, si l'Anglais habite la maison n° i alors la maison n° i est rouge. Cette double *implication* définit l'*équivalence* logique que l'on énonce : la maison n° i est rouge si et seulement si l'Anglais habite la maison n° i.
- pour la troisième forme, on utilise l'expression arithmétique de la relation de voisinage. L'axiome 11 devient : si on fume des Dunhill dans la maison n° i alors dans la maison n° $i-1$ ou il y a un cheval dans la maison n° $i+1$.

Reformulation des axiomes Selon ces principes, les 15 axiomes de l'énigme deviennent :

1. La maison n° i est rouge si et seulement si l'Anglais habite la maison n° i.

2. Le Suédois habite la maison n° i si et seulement si il y a un chien dans la maison n° i.
3. Le Danois habite la maison n° i si et seulement si on boit du thé dans la maison n° i.
4. Si la maison n° i est verte alors la maison n° $i+1$ est blanche.
5. La maison n° i est verte si et seulement si on boit du café dans la maison n° i.
6. On fume des Pall Mall dans la maison n° i si et seulement si il y a un oiseau dans la maison n° i.
7. On boit du lait dans la maison n° 3.
8. La maison n° i est jaune si et seulement si on fume des Dunhill dans la maison n° i.
9. Le Norvégien habite la maison n° 1.
10. Si on fume des Rothmann dans la maison n° i alors il y a un chat dans la maison n° $i-1$ ou dans la maison n° $i+1$.
11. Si on fume des Dunhill dans la maison n° i alors il y a un cheval dans la maison n° $i-1$ ou dans la maison n° $i+1$.
12. On boit de la bière dans la maison n° i si et seulement si on fume des Philipp Morris dans la maison n° i.
13. Si le Norvégien habite la maison n° i alors la maison n° $i-1$ ou la maison n° $i+1$ est bleue.
14. L'Allemand habite la maison n° i si et seulement si on fume des Marlboro dans la maison n° i.
15. Si on boit de l'eau dans la maison n° i alors on fume des Rothmann dans la maison n° $i-1$ ou dans la maison n° $i+1$.

Données et axiomes implicites Pour mener à bien le raisonnement permettant de résoudre l'énigme, il faut faire appel à quelques propriétés implicites du monde des maisons.

La première, que l'on déduit du fait qu'il y a « 5 maisons » (que l'on a numérotées de 1 à 5), est qu'il n'y a pas de maison n° 0 ni de maison n° 6. Les maisons n° 1 et n° 5 n'auront donc qu'une seule voisine, respectivement les maisons n° 2 et n° 4.

L'ensemble des couleurs, nationalités, etc. n'est pas donné explicitement. On peut cependant les déduire des axiomes donnés et de la question finale. Les voici représentés chacun par un ensemble de 5 constantes mnémoniques :

$\mathcal{C}$ouleur	$Jaune$, $Bleu$, $Rouge$, $Vert$, $Blanc$
$\mathcal{N}$ationalité	Ang, Sue, Nor, Dan, All
$\mathcal{B}$oisson	The, Eau, $Cafe$, $Lait$, $Biere$
$\mathcal{F}$ume	$PhiMo$, $PaMal$, $Marl$, $Dunh$, $Roth$
$\mathcal{A}$nimal	$Pois$, $Chat$, $Chien$, $Chev$, Ois

Chaque maison possède un attribut de chacune des espèces. Ce qui signifie que pour chaque maison, étant donné une espèce il existe un attribut de cette espèce tel que cette maison possède cet attribut. Par exemple, pour la maison n^o 1 et l'espèce des boissons, on a : dans la maison n^o 1, on boit de la bière ou du café ou du thé ou de du lait ou de l'eau.

Il y a 5 maisons et chaque espèce d'attribut comprend 5 valeurs. Il faut donc que pour chaque attribut, il existe une maison qui possède cet attribut. Par exemple : il existe un indice i, entre 1 et 5, tel que la maison n^o i est jaune. Comme il n'y a que 5 maisons (un nombre fini), le fait qu'il existe une maison possédant un certain attribut peut s'exprimer par une alternative : la maison n^o 1 possède l'attribut *ou* la maison n^o 2, *ou* la maison n^o 3, *ou* la maison n^o 4, *ou* la maison n^o 5. Par exemple : la maison jaune est la maison n^o 1 ou la maison n^o 2, ..., ou la maison n^o 5.

L'usage de l'adjectif « différent » dans l'énoncé de l'énigme induit que chaque maison n'a qu'un seul attribut que chaque espèce : une seule couleur, une seule nationalité, etc. De cette propriètè d'unicité, on tire que si la maison n^o i possède un attribut d'une certaine espèce alors il ne possède aucun autre attribut de cette même espèce. Par exemple si la maison n^o 1 est jaune alors la maison n^o 1 n'est ni verte, ni rouge, etc. Réciproquement, chaque attribut ne peut l'être que d'une seule maison. Par exemple, si la maison n^o 1 est jaune alors ni la maison n^o 2, ni la maison n^o 3, etc. ne sont jaunes.

Pour résumer, on a deux propriétés d'existence accompagnée chacune d'une clause d'unicité :

- Existence.
  - « pour chaque maison, étant donné une espèce il existe un attribut de cette espèce tel que cette maison possède cet attribut »
  - « pour chaque attribut, il existe une maison qui possède cet attribut »
- Unicité.
  - « chaque maison n'a qu'un seul attribut que chaque espèce »
  - « chaque attribut ne peut l'être que d'une seule maison »

Formes du raisonnement On utilise essentiellement trois formes de raisonnements :

- le *modus ponens* : si l'on sait que « si A alors B » et si l'on sait que « A » alors on a « B ».
- l'élimination d'une alternative : si l'on sait que « A ou B » et si l'on sait que « non A » alors on a « B ».
- le réduction par l'absurde : si l'on sait que « B » et si, en supposant « A », on déduit « non B » alors on a « non A ».

Pour la lisibilté de cette première présentation, on ne suit pas à la lettre ces formes, mais l'esprit est bien celui là.

Étapes de la résolution

(1) *Le norvégien habite la maison n^o 1.*

C'est l'axiome 9.

(2) *On boit du lait dans la maison n^o 3.*

C'est l'axiome 7.

(3) *La maison bleue est la maison n^o 2.*

Par l'axiome 13, on a que si le Norvégien habite la maison n^o i alors la maison n^o $i-1$ ou la maison n^o $i+1$ est bleue. Or le Norvégien habite la maison n^o 1. Donc la maison bleue est soit la maison n^o 0, soit la maison n^o 2. Mais il n'y a pas de maison n^o 0. Donc la maison bleue est la maison n^o 2.

(4) *La maison verte est la maison n^o 4.*

- Si la maison verte est la maison n^o 1 alors, par l'axiome 4, la maison n^o 2 est blanche. Ce qui contredit (3). Donc la maison verte n'est pas la maison n^o 1.
- Par (3), la maison verte n'est pas la maison n^o 2.
- Si la maison verte est la maison n^o 3 alors, par l'axiome 5, on y boit du café. Ce qui contredit (2). Donc la maison verte n'est pas la maison n^o 3.
- Si la maison verte est la maison n^o 5 alors, par l'axiome 4, la maison blanche est la maison n^o 6. Or il n'y a pas de maison n^o 6. Donc la maison verte n'est pas la maison n^o 5.

Il en découle que nécessairement la maison verte est la maison n^o 4.

(5) *La maison blanche est la maison n^o 5.*

Par l'axiome 4, si la maison n^o i est verte alors la maison n^o $i+1$ est blanche. Or, par (4), la maison 4 est verte. Donc la maison blanche est la maison n^o 5.

(6) *La maison rouge est la maison n^o 3.*

- Si la maison n^o 1 est rouge alors, par l'axiome 1, l'Anglais habite la maison n^o 1. Ce qui contredit (1). Donc la maison rouge n'est pas la maison n^o 1.
- Par (3), la maison rouge n'est pas la maison n^o 2.
- Par (4), la maison rouge n'est pas la maison n^o 4.
- Par (5), la maison rouge n'est pas la maison n^o 5.

Il en découle que nécessairement la maison rouge est la maison n^o 3.

(7) *La maison jaune est la maison n^o 1.*

- Par (3), la maison jaune n'est pas la maison n^o 2.
- Par (6), la maison jaune n'est pas la maison n^o 3.
- Par (4), la maison jaune n'est pas la maison n^o 4.
- Par (5), la maison jaune n'est pas la maison n^o 5.

Il en découle que nécessairement la maison jaune est la maison n^o 1.

(8) *On fume des Dunhill dans la maison n^o 1.*

Par l'axiome 8, on fume des Dunhill dans la maison jaune. Or, par (7), la maison jaune est la maison n^o 1. Donc on fume des Dunhill dans la maison n^o 1.

(9) *L'Anglais habite la maison n^o 3.*

Par l'axiome 1, l'Anglais habite la maison rouge. Or, par (6), la maison rouge est la maison n^o 3. Donc l'Anglais habite la maison n^o 3.

(10) *On boit du café dans la maison n° 4.*

Par l'axiome 5, on boit du café dans la maison verte. Or, par (4), la maison verte est la maison n° 4. Donc on boit du café dans la maison n° 4.

(11) *Il y a un cheval dans la maison n° 2.*

Par l'axiome 11, on a que si l'on fume des Dunhill dans la maison n° i alors il y a un cheval dans la maison n° $i-1$ ou dans la maison $i+1$. Or, par (8), on fume des Dunhill dans la maison n° 1. Donc il y a un cheval soit dans la maison n° 0, soit dans la maison n° 2. Comme la maison n° 0 n'existe pas, c'est donc dans la maison n° 2 qu'il y a un cheval.

(12) *On boit de l'eau dans la maison n° 1.*

- Si on boit de la bière dans la maison n° 1 alors, par l'axiome 12, on y fume des Philipp Morris. Ce qui contredit (8). Donc on ne boit pas de bière dans la maison n° 1.
- Par (10), c'est dans la maison n° 4 que l'on boit du café. Donc on ne boit pas de café dans la maison n° 1.
- Si l'on boit du thé dans la maison n° 1 alors, par (1), c'est le Norvégien qui boit du thé. Ce qui contredit l'axiome 3. Donc on ne boit pas de thé dans la maison n° 1.
- Si l'on boit du lait dans la maison n° 1 alors on contredit (2). Donc on ne boit pas de lait dans la maison n° 1.

Il en découle que nécessairement on boit de l'eau dans la maison n° 1.

(13) *On fume des Rothmann dans la maison n° 2.*

Par l'axiome 15, si on boit de l'eau dans la maison n° i alors on fume des Rothmann soit dans la maison n° $i-1$, soit dans la maison n° $i+1$. Or, par (12), on boit de l'eau dans la maison n° 1. Donc on fume des Rothmann soit dans la maison n° 0, soit dans la maison n° 2. Comme la maison n° 0 n'existe pas, c'est dans la maison n° 2 que l'on fume des Rothmann.

(14) *Le Danois habite la maison n° 2.*

- Par (9), l'Anglais n'habite pas la maison n° 2.
- Si l'Allemand habite la maison n° 2 alors, par l'axiome 14, on fume des Marloboro dans la maison n° 2. Ce qui contredit (13). Donc ce n'est pas l'Allemand qui habite la maison n° 2.
- Si le Suèdois habite dans la maison n° 2 alors, par l'axiome 2, il y a un chien dans la maison n° 2. Ce qui contredit (11). Donc ce n'est pas le suédois qui habite la maison n° 2.
- Par l'axiome 9, le Norvégien n'habite pas la maison n° 2.

Il en découle que nécessairement c'est le Danois qui habite la maison n° 2.

(15) *On boit du thé dans la maison n° 2.*

Par l'axiome 3 et (14), on boit du thé dans la maison n° 2.

(16) *On boit de la bière dans la maison n^o 5.*

- Par (12), on ne boit pas de bière dans la maison n^o 1.
- Par (15), on ne boit pas de bière dans la maison n^o 2.
- Par l'axiome 7, on ne boit pas de bière dans la maison n^o 3.
- Par (10), on ne boit pas de bière dans la maison n^o 4.

C'est donc nécessairement dans la maison n^o 5 que l'on boit de la bière.

(17) *On fume des Philipp Morris dans la maison n^o 5.*

Par l'axiome 12 et (16), on fume des Philipp Morris dans la maison n^o 5.

(18) *L'Allemand habite la maison n^o 4.*

- Par (1), ce n'est pas l'Allemand qui habite la maison n^o 1.
- Par (14), ce n'est pas l'Allemand qui habite la maison n^o 2.
- Par (9), ce n'est pas l'Allemand qui habite la maison n^o 3.
- Si l'Allemand habite la maison n^o 5 alors, par l'axiome 14, on y fume des Marlboro. Ce qui contredit (17). Donc l'Allemand n'habite pas la maison n^o 5.

Il en découle que nécessairement, l'Allemand habite la maison n^o 4.

(19) *On fume des Marlboro dans la maison n^o 4.*

Par l'axiome 14 et (18), on fume des Marlboro dans la maison n^o 4.

(20) *On fume des Pall Mall dans la maison n^o 3.*

- Par (8), ce n'est pas dans la maison n^o 1 que l'on fume des Pall Mall.
- Par (13), ce n'est pas dans la maison n^o 2 que l'on fume des Pall Mall.
- Par (19), ce n'est pas dans la maison n^o 4 que l'on fume des Pall Mall.
- Par (17), ce n'est pas dans la maison n^o 5 que l'on fume des Pall Mall.

Donc nécessairement, on fume des Pall Mall dans la maison n^o 3.

(21) *Le Suèdois habite la maison n^o 5.*

- Par (1), ce n'est pas le Suèdois qui habite la maison n^o 1.
- Par (14), ce n'est pas le Suèdois qui habite la maison n^o 2.
- Par (9), ce n'est pas le Suèdois qui habite la maison n^o 3.
- Par (18), ce n'est pas le Suèdois qui habite la maison n^o 4.

Donc nécessairement, le Suèdois habite la maison n^o 5.

(22) *Il y a un oiseau dans la maison n^o 3.*

Par l'axiome 6 et (20), il y a un oiseau dans la maison n^o 3.

(23) *Il y a un chien dans la maison n^o 5.*

Par l'axiome 2 et (21), il y a un chien dans la maison n^o 5.

(24) *Il y a un chat dans la maison n^o 1.*

Par l'axiome 10, si on fume des Rothmann dans la maison n^o i alors il y a un chat soit dans la maison n^o $i-1$, soit dans la maison n^o $i+1$. Or, par (13), on fume des Rothmann dans la maison n^o 2. Donc il y a un chat soit dans la maison n^o 1, soit dans la maison n^o 3. Or, par (22), il n'y a pas de chat dans la maison n^o 3. Donc c'est dans la maison n^o 1 qu'il y a un chat.

(25) *C'est dans la maison n^o 4 qu'il y a un poisson !*

– Par (24), il n'y a pas de poisson dans la maison n^o 1.
– Par (11), il n'y a pas de poisson dans la maison n^o 2.
– Par (22), il n'y a pas de poisson dans la maison n^o 3.
– Par (23), il n'y a pas de poisson dans la maison n^o 5.

C'est donc nécessairement dans la maison n^o 4 qu'il y a un poisson !

2 Résolution formalisée en calcul des prédicats

Le *calcul des prédicats* est un langage formel d'écriture conçu pour les mathématiques mais que l'on peut appliquer (ou du moins tenter d'appliquer) à n'importe quel domaine où la rigueur de l'expression et du raisonnement sont requises.

La base du langage est la relation d'un attribut (ou propriété ou *prédicat*) et d'un individu. Par exemple : la maison n^o 1 (l'individu) est jaune (l'attribut). On formalise dans l'écriture cette relation en utilisant la *notation fonctionnelle* : dans notre exemple, $Jaune(1)$. Toutes les expressions de la forme $P(x)$ qui expriment la relation entre individu (x) et attribut (P) sont appelées *formules atomiques.* Dans la forme générale du calcul des prédicats, la relation à un attribut peut concerner plusieurs individus ; on écrit $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La part de langage utile pour exprimer et résoudre l'énigme utilisera comme ensemble de *symboles de prédicats* les constantes mnémoniques énumérant les attributs possibles.

Le langage du calcul des prédicats est un langage de *formules.* Une formule peut être construite par négation d'une formule ; nous écrivons $\neg A$ la négation de la formule A. Une formule peut être obtenue par disjonction (le « ou » logique) de deux formules ; nous écrivons $A_1 \vee A_2$ la disjonction des formules A_1 et A_2. Une formule peut être obtenue par conjonction (le « et » logique) de deux formules ; nous écrivons $A_1 \wedge A_2$ la conjonction des formules A_1 et A_2. Une formule peut être obtenue par implication d'une formule par une autre ; on écrit $A_1 \rightarrow A_2$ l'implication logique de A_2 par A_1 (en langue naturelle : si A_1 alors A_2). La double implication (le « si et seulement si »), ou équivalence logique entre les formules A_1 et A_2 s'écrit $A_1 \leftrightarrow A_2$; il s'agit en fait d'une abréviation pour $(A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_2 \rightarrow A_1)$. Une formule peut énoncer l'existence de quelque chose (valeur ou individu) ; on écrit $\exists x.A$ la formule qui énonce qu'il existe un x tel que A. Enfin, une formule peut énoncer la validité universelle d'une formule ; on écrit $\forall x.A$ la formule qui énonce la validité de A pour tout x.

Règles de déduction Nous avons donné dans notre première version de la résolution de l'énigme trois « formes de raisonnement » : le modus ponens, l'élimination d'une alternative et la réduction par l'absurde. Dans la version formelle que nous donnons ici, les « formes de raisonnement » sont appelées *régle de déduction* ou d'inférence.

On retrouve le modus ponens : si $A_1 \rightarrow A_2$ et A_1 alors A_2 ; ainsi que l'élimination de l'alternative : si $A_1 \vee A_2$ et $\neg A_1$ alors A_2. On n'utilisera pas la réduction à l'absurde dans la forme donnée ci-dessus, mais une régle autorisant des déduction équivalentes, le *modus tollens* : si $A_1 \rightarrow A_2$ et $\neg A_2$ alors $\neg A_1$.

La règle d'élimination est en fait *symétrique*, on a aussi : si $A_1 \vee A_2$ et $\neg A_2$ alors A_1. On étend le modus ponens et le modus tollens aux équivalences, du coups, ces deux régles deviennent également symétriques : si $A_1 \leftrightarrow A_2$ et A_1 alors A_2 ; si $A_1 \leftrightarrow A_2$ et A_2 alors A_1 ; si $A_1 \leftrightarrow A_2$ et $\neg A_1$ alors $\neg A_2$; si $A_1 \leftrightarrow A_2$ et $\neg A_2$ alors $\neg A_1$.

On a utilisé, sans le dire, la *particularisation* d'une formule universelle : ce qui vaut pour tout individu vaut pour un individu particulier. Par exemple, à l'étape 3 du raisonnement, nous avons remplacé le i de l'axiome 13 par la valeure particulière 1. La régle de particularisation est : si $\forall i.A$ alors pour tout individu t, $A[i := t]$. Intuitivement, l'expression $A[i := t]$ désigne la formule A dans laquelle la *variable* i a été remplacée par t.
L'opération de remplacement ou *substitution* a une définition technique un peu complexe aussi, dans la mesure où notre utilisation de cette opération restera intuitivement claire, nous n'en dirons pas plus sur ce sujet.
Lorsque l'on effectuera une opération de substitution, nous procèderons également à la *réduction*, c'est-à-dire au calcul, de certaines expressions obtenues. Par exemple si l'on substitue la constante 1 à la variable i dans une formule contenant l'expression arithmétique $i+1$, on écrira 2 à la place de $1+1$. Là encore, d'un point de vue strictement formelle, cette nouvelle opération de réduction des expressions arithmétique devrait être définie. Mais pour ne pas alourdir le propos au risque d'en perdre l'essentiel, nous n'expliciterons pas l'usage élémentaire du calcul.

Sur la règle d'élimination de l'alternative En logique classique les formules A et $\neg\neg A$ sont équivalentes. La règle d'élimination de l'alternative, si l'une des alternative est négative nous donne que : si $(\neg A_1) \vee A_2$ et $\neg(\neg A_1)$ alors A_2. Tenant compte de l'équivalence entre $\neg(\neg A_1)$ et A_1, on également la forme suivante de la règle d'élimination : si $\neg A_1 \vee A_2$ et A_1 alors A_2.

Enfin, la règle d'élimination de l'alternative peut être généralisée aux formules alternatives à *n sous formules* $(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n)$ que l'on peut opposer à plusieurs formules $\neg A_{i_1}, \ldots, \neg A_{i_k}$ avec $i_1, \ldots, i_k \in [1..n]$. La règle générale est assez complexe à exprimer, contentons nous de l'exemple suivant : si $A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \vee A_5$ et $\neg A_1, \neg A_2, \neg A_3, \neg A_5$ alors A_4.

Formalisation des axiomes Les 15 énoncés formant le cœur de l'énigme se formalisent ainsi :

1. $\forall i.(Rouge(i) \leftrightarrow Ang(i))$
2. $\forall i.(Sue(i) \leftrightarrow Chien(i))$
3. $\forall i.(Dan(i) \leftrightarrow The(i))$
4. $\forall i.(Vert(i) \rightarrow Blanc(i+1))$
5. $\forall i.(Vert(i) \leftrightarrow Cafe(i))$

6. $\forall i.(PaMal(i) \leftrightarrow Ois(i))$
7. $Lait(3)$
8. $\forall i.(Jaune(i) \leftrightarrow Dunh(i))$
9. $Nor(1)$
10. $\forall i.(Roth(i) \rightarrow Chat(i-1) \vee Chat(i+1))$
11. $\forall i.(Dunh(i) \rightarrow Chev(i-1) \vee Chev(i+1))$
12. $\forall i.(Biere(i) \leftrightarrow PhiMo(i))$
13. $\forall i.(Nor(i) \rightarrow Bleu(i-1) \vee Bleu(i+1))$
14. $\forall i.(All(i) \leftrightarrow Marl(i))$
15. $\forall i.(Eau(i) \rightarrow Roth(i-1) \vee Roth(i+1))$

Les axiomes implicites concernent des attributs en général (couleur, nationalité, etc.). Pour les formaliser, on pose des *schémas d'axiomes* qui utilisent des symboles de prédicats génériques (P, P', P_1, P_2, etc.) en place des symboles concrets ($Jaune$, Ang, $Biere$, etc.)

1. « pour chaque maison, étant donné une espèce il existe un attribut tel que cette maison possède cet attribut » : soit une espèce $\mathcal{K}$, si P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 sont les 5 attributs de $\mathcal{K}$ et i un indice, on a
$$P_1(i) \vee P_2(i) \vee P_3(i) \vee P_4(i) \vee P_5(i)$$
Ce que l'on peut écrire plus synthétiquement $\bigvee_{P \in \mathcal{K}} P(i)$. On note $\mathcal{K}_i$ cette formule.
2. « pour chaque attribut, il existe une maison qui possède cet attribut » : soit une espèce $\mathcal{K}$, si P est un attribut dans $\mathcal{K}$, on a
$$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4) \vee P(5)$$
Ce que l'on écrit plus synthétiquement $\bigvee_{i \in [1..5]} P(i)$. On note $\mathcal{I}_P$ cette formule.
3. « chaque maison n'a qu'un seul attribut que chaque espèce » : soit une espèce $\mathcal{K}$, si P et P' sont deux attributs dans $\mathcal{K}$, on a
$$\forall i.(P(i) \rightarrow \neg P'(i))$$
4. « chaque attribut ne peut l'être que d'une seule maison » : soit une espèce $\mathcal{K}$, si P un attribut dans $\mathcal{K}$, on a
$$\forall i, j.(P(i) \rightarrow i \neq j \rightarrow \neg P(j))$$

Qu'il n'y ait ni maison n° 1, ni maison n° 6 signifie que quelque soit l'attribut P, on n'a jamais ni $P(0)$, ni $P(6)$. Pour tout symbole de prédicat P, on pose donc :
$$\neg P(0) \text{ et } \neg P(6)$$
On appelle respectivement $N0$ et $N6$ ces formules.

Formules atomiques *opposables* On dit qu'une formule atomique $P(x)$ est *opposable* à une formule atomique $P'(y)$ si de $P(x)$ on peut déduire $\neg P'(y)$.

Les axiomes d'unicité fournissent un ensemble de couples de formules opposables. Par exemple si on a $Bleu(2)$, de l'axiome $\forall i.(Bleu(i) \rightarrow \neg Blanc(i))$, on tire par particularisation $Bleu(2) \rightarrow \neg Blanc(2)$, puis, par modus ponens, $\neg Blanc(2)$. Le second axiome d'unicité donne, par exemple : si on sait que $Nor(1)$, de l'axiome $\forall i, j.(Nor(i) \rightarrow i \neq j \rightarrow \neg Nor(j))$, on tire en particulier $Nor(1) \rightarrow 1 \neq 2 \rightarrow \neg Nor(2)$, puis en appliquant deux fois le modus ponens, $\neg Nor(2)$.

Pour résumer, nous avons deux formes de formules opposables :
- même indice mais attributs différents ;
- même attribut mais indices différents.

Preuves formelles Une preuve ou *dérivation formelles* est une suite de lignes de la forme

$$\alpha \qquad A \qquad R$$

où α est un numéro de ligne, A une formule et R la *justification* de la formule A.

Dans la forme stricte des dérivations formelles, une formule est justifiée à la ligne α s'il s'agit d'un axiome ou si elle est obtenue par application d'une règle à une ou des formules présentes dans une ou des lignes de la dérivation situées *avant* la ligne α. Dans la pratique, nous étendons un epu la notion stricte de justification afin de ne pas allourdir l'écritures de lignes dont les opérations sont par trop triviales.

La liste des formes de justifications que nous allons utiliser est :
- Ax.n qui désigne l'axiome numéro n ;
- Ax.$n[i := t]$ qui désigne la particularisation de l'axiome numéro n à la valeur t (usage implicite de la règle de particularisation) ;
- Mod. Pon.$(\alpha_1)(\alpha_2)$ qui désigne l'application du modus ponens entre la formules de la ligne α_1 et celle de la ligne α_2 ;
- Mod. Tol.$(\alpha_1)(\alpha_2)$ qui désigne l'application du modus tollens entre la formules de la ligne α_1 et celle de la ligne α_2 ;
- Cut$(\varphi)(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ où $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont soit des numéros de lignes, soit des noms d'axiomes implicites tels $\mathcal{I}_{Vert}, \mathcal{B}_1, N0, etc.$. La justification désigne la régle d'élimination de la disjonction référencée par φ opposée aux formules référencées par $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$;
- Opp(α) qui désigne une formule atomique opposable à la formule de la ligne α.

Déduction formelle Nous reprenons, de façon formalisée cette fois, les 25 étapes de la résolution de l'énigme. Chaque étape est constituée d'un certain nombre de lignes de dérivations. Les lignes de l'étape n sont numérotées $n.1$, $n.2$, etc, sauf la dernière de l'étape qui est numérotée n et qui est marquée d'une étoile ($\star$). Chaque étape est précédée d'une phrase de commentaire annonçant, en langue naturelle, sa conclusion.

(1) *Le norvégien habite la maison n^o 1 :*

$\star 1$	$Nor(1)$	Ax.9

(2) *On boit du lait dans la maison du milieu (n^o 3) :*

$\star 2$	$Lait(3)$	Ax.7

(3) *La maison bleue est la maison n^o 2 :*

3.1	$Nor(1) \rightarrow Bleu(0) \vee Bleu(2)$	Ax.13$[i := 1]$
3.2	$Bleu(0) \vee Bleu(2)$	Mod. Pon.(3.1)(1)
$\star 3$	$Bleu(2)$	Cut(3.2)($N0$)

(4) *La maison verte est la maison n^o 4 :*

4.1	$Vert(1) \rightarrow Blanc(2)$	Ax.4$[i := 1]$
4.2	$\neg Blanc(2)$	Opp(3)
4.3	$\neg Vert(1)$	Mod. Tol.(4.1)(4.2)
4.4	$\neg Vert(2)$	Opp(3)
4.5	$Vert(3) \rightarrow Cafe(3)$	Ax.5$[i := 3]$
4.6	$\neg Cafe(3)$	Opp(2)
4.7	$\neg Vert(3)$	Mod. Tol.(4.5)(4.6)
4.8	$Vert(5) \rightarrow Blanc(6)$	Ax.4$[i := 5]$
4.9	$\neg Vert(5)$	Mod. Tol.(4.8)($N6$)
$\star 4$	$Vert(4)$	Cut$(\mathcal{I}_{Vert})(4.3, 4.4, 4.7, 4.9)$

(5) *La maison blanche est la maison n^o 5 :*

5.1	$Vert(4) \rightarrow Blanc(5)$	Ax.4$[i := 4]$
$\star 5$	$Blanc(5)$	Mod. Pon.(5.1)(4)

(6) *La maison rouge est la maison n^o 3 :*

6.1	$Rouge(1) \rightarrow Ang(1)$	Ax.1$[i := 1]$
6.2	$\neg Ang(1)$	Opp(1)
6.3	$\neg Rouge(1)$	Mod. Tol.(6.1)(6.2)
6.4	$\neg Rouge(2)$	Opp(3)
6.5	$\neg Rouge(4)$	Opp(4)
6.6	$\neg Rouge(5)$	Opp(5)
$\star 6$	$Rouge(3)$	Cut$(\mathcal{I}_{Rouge})(6.3, 6.4, 6.5, 6.6)$

(7) *La maison jaune est la maison n^o 1 :*

7.1	$\neg Jaune(2)$	Opp(3)
7.2	$\neg Jaune(3)$	Opp(6)
7.3	$\neg Jaune(4)$	Opp(4)
7.4	$\neg Jaune(5)$	Opp(5)
$\star 7$	$Jaune(1)$	Cut($\mathcal{I}_{Jaune}$)$(7.1, 7.2, 7.3, 7.4)$

(8) *On fume des Dunhill dans la maison n^o 1 :*

8.1	$Jaune(1) \rightarrow Dunh(1)$	Ax.8$[i := 1]$
$\star 8$	$Dunh(1)$	Mod. Pon.(8.1)(7)

(9) *L'Anglais habite la maison n^o 3 :*

9.1	$Rouge(3) \rightarrow Ang(3)$	Ax.1$[i := 1]$
$\star 9$	$Ang(3)$	Mod. Pon.(9.1)(6)

(10) *On boit du café dans la maison n^o 4 :*

10.1	$Vert(4) \rightarrow Cafe(4)$	Ax.5$[i := 4]$
$\star 10$	$Cafe(4)$	Mod. Pon.(10.1)(4)

(11) *Il y a un cheval dans la maison n^o 2 :*

11.1	$Dunh(1) \rightarrow Chev(0) \vee Chev(2)$	Ax.11$[i := 1]$
11.2	$Chev(0) \vee Chev(2)$	Mod. Pon.(11.1)(8)
$\star 11$	$Chev(2)$	Cut(11.2)($N0$)

(12) *On boit de l'eau dans la maison n^o 1 :*

12.1	$Biere(1) \rightarrow PhiMo(1)$	Ax.12$[i := 1]$
12.2	$\neg PhiMo(1)$	Opp(8)
12.3	$\neg Biere(1)$	Mod. Tol.(12.1)(12.2)
12.4	$\neg Cafe(1)$	Opp(10)
12.5	$The(1) \rightarrow Dan(1)$	Ax.1$[i := 1]$
12.6	$\neg Dan(1)$	Opp(1)
12.7	$\neg The(1)$	Mod. Tol.(12.5)(12.6)
12.8	$\neg Lait(1)$	Opp(2)
$\star 12$	$Eau(1)$	Cut($\mathcal{B}_1$)$(12.3, 12.4, 12.7, 12.8)$

(13) *On fume des Rothmann dans la maison n^o 2 :*

13.1	$Eau(1) \rightarrow Roth(0) \vee Roth(2)$	Ax.15$[i := 1]$
13.2	$Roth(0) \vee Roth(2)$	Mod. Pon.(13.1)(12)
$\star 13$	$Roth(2)$	Cut(13.2)($N0$)

(14) *Le Danois habite la maison n^o 2 :*

14.1	$\neg Ang(2)$	Opp(9)
14.2	$All(2) \rightarrow Marl(2)$	Ax.14$[i := 2]$
14.3	$\neg Marl(2)$	Opp(13)
14.4	$\neg All(2)$	Mod. Tol.(14.2)(14.3)
14.5	$Sue(2) \rightarrow Chien(2)$	Ax.2$[i := 2]$
14.6	$\neg Chien(2)$	Opp(11)
14.7	$\neg Sue(2)$	Mod. Tol.(14.5)(14.6)
14.8	$\neg Nor(2)$	Opp(1)
$\star$14	$Dan(2)$	Cut$(\mathcal{N}_2)(14.1, 14.4, 14.7, 14.8)$

(15) *On boit du thé dans la maison n^o 2 :*

15.1	$Sue(2) \rightarrow The(2)$	Ax.3$[i := 2]$
$\star$15	$The(2)$	Mod. Pon.(15.1)(14)

(16) *On boit de la bière dans la maison n^o 5 :*

16.1	$\neg Biere(1)$	Opp(12)
16.2	$\neg Biere(2)$	Opp(15)
16.3	$\neg Biere(3)$	Opp(2)
16.4	$\neg Biere(4)$	Opp(10)
$\star$16	$Biere(5)$	Cut$(\mathcal{I}_{Biere})(16.1, 16.2, 16.3, 16.4)$

(17) *On fume des Philipp Morris dans la maison n^o 5 :*

17.1	$Biere(5) \rightarrow PhiMo(5)$	Ax.12$[i := 5]$
$\star$17	$PhiMo(5)$	Mod. Pon.(17.1)(16)

(18) *L'Allemand habite la maison n^o 4 :*

18.1	$\neg All(1)$	Opp(1)
18.2	$\neg All(2)$	Opp(14)
18.3	$\neg All(3)$	Opp(9)
18.4	$All(5) \rightarrow Marl(5)$	
18.5	$\neg Marl(5)$	Opp(17)
18.6	$\neg All(5)$	Mod. Tol.(18.4)(18.5)
$\star$18	$All(4)$	Cut$(\mathcal{I}_{All})(18.1, 18.2, 18.3, 18.6)$

(19) *On fume des Marlboro dans la maison n^o 4 :*

19.1	$All(4) \rightarrow Marl(4)$	Ax.14$[i := 4]$
$\star$19	$Marl(4)$	Mod. Pon.(19.1)(18)

(20) *On fume des Pall Mall dans la maison n^o 3 :*

20.1	$\neg PaMal(1)$	Opp(8)
20.2	$\neg PaMal(2)$	Opp(13)
20.3	$\neg PaMal(4)$	Opp(19)
20.4	$\neg PaMal(5)$	Opp(17)
$\star$20	$PaMal(3)$	Clash($\mathcal{I}_{PaMal}$)$(20.1, 20.2, 20.3, 20.4)$

(21) *Le Suédois habite la maison n^o 5 :*

21.1	$\neg Sue(1)$	Opp(1)
21.2	$\neg Sue(2)$	Opp(14)
21.3	$\neg Sue(3)$	Opp(9)
21.4	$\neg Sue(4)$	Opp(18)
$\star$21	$Sue(5)$	Cut($\mathcal{I}_{Sue}$)$(21.1, 21.2, 21.3, 21.4)$

(22) *Il y a un oiseau dans la maison n^o 3 :*

22.1	$PaMal(3) \rightarrow Ois(3)$	Ax.6$[i := 3]$
$\star$22	$Ois(3)$	Mod. Pon.(22.1)(20)

(23) *Il y a un chien dans la maison n^o 5 :*

23.1	$Sue(5) \rightarrow Chien(5)$	Ax.2$[i := 5]$
$\star$23	$Chien(5)$	Mod. Pon.(23.1)(21)

(24) *Il y a un chat dans la maison n^o 1 :*

24.1	$Roth(2) \rightarrow Chat(1) \vee Chat(3)$	Ax.10$[i := 2]$
24.2	$Chat(1) \vee Chat(3)$	Mod. Pon.(24.1)(13)
24.3	$\neg Chat(3)$	Opp(22)
$\star$24	$Chat(1)$	Cut(24.2)(24.3)

(25) *C'est dans la maison n^o 4 qu'il y a un poisson !*

25.1	$\neg Pois(1)$	Opp(24)
25.2	$\neg Pois(2)$	Opp(11)
25.3	$\neg Pois(3)$	Opp(22)
25.4	$\neg Pois(5)$	Opp(23)
$\star$25	$Pois(4)$	Cut($\mathcal{I}_{Pois}$)$(25.1, 25.2, 25.3, 25.4)$

3 Seconde résolution en calcul des prédicats

Intuitivement, on peut représenter chaque maison avec son indice, sa couleur, la nationalité de son habitant, etc. par un n-uplets de 6 valeurs : indice, couleur, nationalité, boisson, cigarette, animal. Dans cette vision du problème, une maison est une relation M portant sur 6 individus, les indices, les couleurs, etc. que l'on note de façon générique $M(i, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Par rapport à ce qui précède, les constantes d'indice 1, 2, etc. conservent leur statut de constantes d'individus, mais les constantes mnémoniques, $Jaune$, Nor, etc. qui avaient le statut de symboles de prédicats sont rabattues au niveau des *constantes d'individus*. On aura, par exemple, comme formule atomique $M(1, x_1, Nor, x_3, x_4, x_5)$ là où, dans la version précédente, nous avions $Nor(1)$. Les espèces d'attributs deviennent des *espèces d'individus*. On aura ainsi des valeurs de l'espèce $\mathcal{I}$ndice, d'autres de l'espèce $\mathcal{C}$ouleur, etc.

Pour alléger l'écriture, dans la mesure où nous manipulerons la seule relation M, nous oublierons le nom M pour noter simplement $(i, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Pour des raisons historiques, nous écrivons $\overline{A}$ la négation de la formule A.

L'implication $A \rightarrow B$ est logiquement équivalente à la disjonction $\overline{A} \vee B$. Nous utiliserons cette formulation de l'implication comme une disjonction.

Sur la quantification Lorsque l'on dit qu'il existe un x tel que $A(x)$, si la variable x prend ses valeurs dans l'ensemble $\mathcal{K} = \{a_1, a_2, \ldots\}$, on dit en fait que $A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots$; ce que l'on écrit de façon synthétique $\bigvee_{a \in \mathcal{K}} .A(a)$. De façon analogue si pour tout x on a $A(x)$, on a en fait que $A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots$; ce qui s'écrit aussi $\bigwedge_{a \in \mathcal{K}} .A(a)$.
Comme les ensembles de valeurs des caractéristiques de notre problème sont finis (ils contiennent en fait 5 éléments chacun), chacune des disjonction et conjonction correspondant, respectivement, à des quantifications existentielle ou universelle seront également finies.

Nous ferons un usage massif de la quantification existentielle et elle ne concernera que des formules atomiques (les n-uplets). Pour simplifier l'écriture, nous ne mentionnerons pas le quantificateur existentiel : la formule $(i, Rouge, Ang, x_3, x_4, x_5)$ devra donc être comprise comme $\exists i, x_3, x_4, x_5.(i, Rouge, Ang, x_3, x_4, x_5)$. Placées ainsi, les quantifications peuvent être permutées : la formule précédente est équivalente à $\exists x_3, x_4, x_5, i.(i, Rouge, Ang, x_3, x_4, x_5)$.
On s'autorisera, à discrétion, à expliciter les quantifications. Dans un tel cas, pour l'existentielle, on utilisera l'expression de l'existentielle comme alternative; on écrira ainsi la formule précédente : $\bigvee_{a_3 \in \mathcal{B}}(i, Rouge, Ang, a_3, x_4, x_5)$. De façon analogue, pour la quantification universelle explicite, nous utiliserons sa formulation comme conjonction : par exemple $\bigwedge_{i \in \mathcal{I}} .(\overline{(i, Vert, x_2, x_3, x_4, x_5)} \vee (i + 1, Blanc, x_2, x_3, x_4, x_5))$.
Attention, les x_2, x_3, x_4, x_5 de la prémisse de l'implication $\overline{(i, Vert, x_2, x_3, x_4, x_5)}$ ne sont pas nécessairement les mêmes que les x_2, x_3, x_4, x_5 de la conclusion $(i + 1, Blanc, x_2, x_3, x_4, x_5)$: n'oublions pas la quantification existentielle implicite. Dans notre problème, ce ne sera même jamais le cas. En revanche, pour ce concerne le i, puisque le $\bigwedge_{i \in \mathcal{I}}$. porte sur la prémisse et la conclusion, leur i est bien le même.

Les axiomes ou *contraintes* Là où dans la formalisation du paragraphe précédent, une maison était caractérisée par 5 formules atomiques (par ex. $Vert(4), All(4), Cafe(4), Marl(4), Pois(4)$), dans la présente formalisation, on a une seule formule donnant la relation entre 6 valeurs :

$(4, Vert, All, Cafe, Marl, Pois)$. Lorsque l'on veut formalisée une information partielle sur une maison (par ex. « l'Anglais habite la maison rouge »), on pose un n-uplet où certaines valeurs restent indéterminées, *variables* : $(i, Rouge, Ang, x_3, x_4, x_5)$. Quel est le statut des variables i, x_3, x_4, x_5 ? L'énoncé « l'Anglais habite la maison rouge » fixe les valeurs *Rouge* et *Ang* comme deuxième et troisième terme de la relation et, s'il ne fixe pas les autres, il suppose néanmoins leur *existence*. Explicitement formulé, l'axiome 1 serait donc

$$\exists i, x_3, x_4, x_5.(i, Rouge, Ang, x_3, x_4, x_5)$$

mais, à l'instar des énoncés en langue naturelle, nous avons décidé de laisser implicite la quantification existentielle.

Ainsi, les contraintes posées par les énoncés numérotés de 1 à 15 dans la présentation de l'énigme, compte tenu de la notation du quatificateur universel comme conjonction, de la notation de l'implication comme disjonction et de l'usage implicite de la quatification existentielle s'écrivent

1. $(i, Rouge, Ang, x_3, x_4, x_5)$
2. $(i, x_1, Sue, x_3, x_4, Chien)$
3. $(i, x_1, Dan, The, x_4, x_5)$
4. $\bigwedge_{i\in\mathcal{I}}.(\overline{(i, Vert, x_2, x_3, x_4, x_5)} \vee (i+1, Blanc, x_2, x_3, x_4, x_5))$
5. $(i, Vert, x_2, Cafe, x_4, x_5)$
6. $(i, x_1, x_2, x_3, PaMal, Ois)$
7. $(3, x_1, x_2, Lait, x_4, x_5)$
8. $(i, Jaune, x_2, x_3, Dunh, x_5)$
9. $(1, x_1, Nor, x_3, x_4, x_5)$
10. $\bigwedge_{i\in\mathcal{I}}.(\overline{(i, x_1, x_2, x_3, Roth, x_5)} \vee (i-1, x_1, x_2, x_3, x_4, Chat) \vee (i+1, x_1, x_2, x_3, x_4, Chat))$
11. $\bigwedge_{i\in\mathcal{I}}.(\overline{(i, x_1, x_2, x_3, x_4, Chev)} \vee (i-1, x_1, x_2, x_3, Dunh, x_5) \vee (i+1, x_1, x_2, x_3, Dunh, x_5))$
12. $(i, x_1, x_2, Biere, PhiMo, x_5)$
13. $\bigwedge_{i\in\mathcal{I}}.(\overline{(i, x_1, Nor, x_3, x_4, x_5)} \vee (i-1, Bleu, x_2, x_3, x_4, x_5) \vee (i+1, Bleu, x_2, x_3, x_4, x_5))$
14. $(i, x_1, All, x_3, Marl, x_5)$
15. $\bigwedge_{i\in\mathcal{I}}.(\overline{(i, x_1, x_2, Eau, x_4, x_5)} \vee (i-1, x_1, x_2, x_3, Roth, x_5) \vee (i+1, x_1, x_2, x_3, Roth, x_5))$

Les deux contraintes d'existences induites par la différence de niveau entre individus (valeurs d'indices) et prédicats (couleurs, nationalité, etc.) de la première formalisation, ont ici une formulation uniforme puisque indice, couleur, nationalité, etc. se retrouvent au même niveau. De façon schématique, si $\mathcal{K}^i$ et $\mathcal{K}^j$ sont deux espèces, si a_i est une valeur dans $\mathcal{K}_i$, on pose

$$\bigvee_{x_j\in\mathcal{K}^j}.(\ldots, a_i, \ldots, x_j, \ldots)$$

soit, dans sa forme développée, si $b_j^1, b_j^2, b_j^3, b_j^4, b_j^5$ sont les 5 valeurs dans $\mathcal{K}^j$:

$$\begin{array}{l} (\ldots, a_i, \ldots, b_j^1, \ldots) \\ \vee(\ldots, a_i, \ldots, b_j^2, \ldots) \\ \vee(\ldots, a_i, \ldots, b_j^3, \ldots) \\ \vee(\ldots, a_i, \ldots, b_j^4, \ldots) \\ \vee(\ldots, a_i, \ldots, b_j^5, \ldots) \end{array}$$

Le nom générique de cette formule est ${\mathcal{K}^j}_{a_i}$.

Notons que l'ordre entre i et j n'est pas significatif, dans la notation générique on ne distingue pas $(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots)$ d'avec $(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)$.

Comme pour l'existence, on peut donner une, et une seule, formulation générique des contraintes d'unicité. Soient $\mathcal{K}^i$ et $\mathcal{K}^j$ deux espèces, on pose :

$$\bigwedge_{c_i \in \mathcal{K}^i} \bigwedge_{c_j \in \mathcal{K}^j} ((\ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots) \rightarrow \bigwedge_{d_j \in \mathcal{K}^j} (c_j \neq d_j \rightarrow \overline{(\ldots, c_i, \ldots, d_j, \ldots)}))$$

Il faut expliciter ici que dans chaque espèce, chacun des symboles de constante dénote une valeur différente : le $Jaune$ est différent du $Bleu$. Pour chaque couple de symboles de constante c, d d'une espèce, on a donc l'inégalité

$$c \neq d$$

On a enfin les deux contraintes d'inexistence des maisons 0 et 6 :

$$\overline{(0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)} \text{ et } \overline{(6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}$$

qui correspondent aux formules $N0$ et $N6$.

Règles et justification On utilise essentiellement la règle d'élimination des alternatives (règle Cut) – avec la formulation de l'implication comme une disjonction, la régle du modus ponens devient un cas particulier de l'élimination de l'aternative. On dérivera de la règle Cut et des contraintes d'existence et d'unicité une règle de fusion (Merge) et une règle de conflit (Clash).

Par L, L_1, L_i, L_n, etc. on désigne soit un n-uplet soit la négation d'un n-uplet, ce que l'on appelle un *littéral*. Un littéral L' est *opposable* à un littéral L si L' implique $\overline{L}$. La règle d'élimination d'une alternative s'énonce (règle Cut) :

$$\begin{array}{c} \text{si } L_1 \vee \ldots \vee L_i \vee \ldots \vee L_n \text{ et si } L'_i \text{ est opposable à } L_i \\ \text{alors } L_1 \vee \ldots \vee L_{i-1} \vee L_{i+1} \vee \ldots \vee L_n. \end{array}$$

Bien que les quantifications soient implicites, on peut utiliser les règles standard de remplacement d'une constante par une *variable existentielle* et de particularisation d'une universelle par une constante. À savoir :

Élimination d'une constante d'un littéral positif : si $(\ldots,c_i,\ldots)$ alors $(\ldots,x_i,\ldots)$.

Introduction d'une constante dans un littéral négatif : si $\overline{(\ldots,x_i,\ldots)}$ alors $\overline{(\ldots,c_i,\ldots)}$. L'élimination d'une constante est en fait la règle standard qui dit que si l'on a $A(c)$ pour une certaine constante c alors il existe x tel que $A(x)$ (ci-dessus, la quantification est implicite). L'introduction d'une constante se justifie ainsi : la négation d'une existentielle (ici implicite) est équivalente à une universelle négative : $\neg\exists x.A \equiv \forall x.\neg A$. Et ce qui vaut pour tout x vaut en particulier pour une constante.

Si l'on a fixé deux paires de caractéristiques dans $\mathcal{K}^i, \mathcal{K}^j$ et $\mathcal{K}^i, \mathcal{K}^k$ dont une valeur est commune, on peut les fusionner (règle Merge) :

$$\begin{gathered}\text{si } (\ldots,c_i,\ldots,c_j,\ldots,x_k,\ldots) \text{ et si } (\ldots,c_i,\ldots,x_j,\ldots,c_k,\ldots)\\ \text{alors } (\ldots,c_i,\ldots,c_j,\ldots,c_k,\ldots).\end{gathered}$$

Cette règle se justifie ainsi : l'axiome $\mathcal{K}^j_{c_i}$ s'écrit $\bigvee_{b_j\in\mathcal{K}^j}(\ldots,c_i,\ldots,b_j,\ldots,x_k,\ldots)$. En itérant la règle Cut pour chaque $(\ldots,c_i,\ldots,b_j,\ldots,x_k,\ldots)$ auquel $(\ldots,c_i,\ldots,c_j,\ldots,x_k,\ldots)$ est opposable (i.e. $c_i \neq b_j$) et en explicitant l'existence pour $\mathcal{K}^k$, on obtient l'alternative (α) :

$$\bigvee_{a_k\in\mathcal{K}^k}(\ldots,c_i,\ldots,c_j,\ldots,a_k,\ldots)$$

De $(\ldots,c_i,\ldots,x_j,\ldots,c_k,\ldots)$, on obtient, pour chaque $a_k \neq c_k$, le littéral $\overline{(\ldots,c_i,\ldots,x_j,\ldots,a_k,\ldots)}$ où l'on introduit la constante c_j pour obtenir $\overline{(\ldots,c_i,\ldots,c_j,\ldots,a_k,\ldots)}$. Chacun de ces littéraux est opposable à un terme de l'alternative (α). D'où, en itérant la règle Cut : $(\ldots,c_i,\ldots,c_j,\ldots,c_k,\ldots)$.

La règle du conflit permet de nier la possibilité de l'association de certaines valeurs (règle Clash) :

$$\begin{gathered}\text{si } (\ldots,c_i,\ldots,x_j,\ldots,c_k,\ldots) \text{ et } (\ldots,x_i,\ldots,c_j,\ldots,d_k,\ldots) \text{ et si } c_k \neq d_k\\ \text{alors } \overline{(\ldots,c_i,\ldots,c_j,\ldots,x_k,\ldots)}.\end{gathered}$$

On justifie cette règle en raisonnant par l'absurde : supposons $(\ldots,c_i,\ldots,x_j,\ldots,c_k,\ldots)$ et $(\ldots,x_i,\ldots,c_j,\ldots,d_k,\ldots)$ mais $\overline{\overline{(\ldots,c_i,\ldots,c_j,\ldots,x_k,\ldots)}}$, c'est-à-dire $(\ldots,c_i,\ldots,c_j,\ldots,x_k,\ldots)$. Par fusion, on obtient $(\ldots,c_i,\ldots,c_j,\ldots,c_k,\ldots)$. D'où, par élimination de la constante c_i, $(\ldots,x_i,\ldots,c_j,\ldots,c_k,\ldots)$. Comme $c_k \neq d_k$, on en déduit $\overline{(\ldots,x_i,\ldots,c_j,\ldots,d_k,\ldots)}$, ce qui contredit notre deuxième hypothèse.

Les contraintes d'unicité fournissent toute une série de littéraux $(\ldots,c_i,\ldots,d_j,\ldots)$ opposables à $(\ldots,c_i,\ldots,c_j,\ldots)$ avec $c_i \in \mathcal{K}^i$, $c_j, d_j \in \mathcal{K}^i$ et $c_j \neq d_j$: en effet, si $(\ldots,c_i,\ldots,d_j,\ldots)$, de la contrainte d'unicité pour les caractéristiques $\mathcal{K}^i$, $\mathcal{K}^j$, on déduit $\bigwedge_{a_j\in\mathcal{K}^j}.(d_j \neq a_i \rightarrow \overline{(\ldots,c_i,\ldots,a_j,\ldots)})$. D'où, en particulier pour $c_j \neq d_j$, $\overline{(\ldots,c_i,\ldots,c_j,\ldots)}$.

Dans notre écriture formelle des preuves, l'usage des règles est matérialisée par la justification de chaque ligne. La liste des justifications utilisée ici est :

- Ax.n qui désigne l'axiome numéro n ;
- Ax.$n[i := t]$ qui désigne la particularisation de l'axiome numéro n à la valeur t (usage implicite de la règle de particularisation) ;

- Cut(φ)($\varphi_1, \ldots, \varphi_n$) où $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont soit des numéros de lignes, soit des noms d'axiomes implicites tels $\mathcal{I}_{Vert}, \mathcal{B}_1$, *etc.*, soit une instance de $N0$ ou $N6$ (on note $N0[x_i := c_i]$, resp. $N6[x_i := c_i]$, avec x_i variable et c_i valeur constante). La justification désigne la régle d'élimination de la disjonction référencée par φ opposée aux formules référencées par $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$;
- Clash(α_1)(α_2) qui désigne l'application de la règle de conflit entre les formules désignées par α_1 et α_2.
- Merge($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$) qui désigne l'itération de la règle de fusion entre les formules référencées par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
- ElimC(n) qui désigne l'application (possiblement itérée) de la règle d'élimination de constantes dans la formule de la ligne n.

La solution

(1) *Le norvégien habite la maison n° 1 :*

$\star 1$	$(1, x_1, Nor, x_3, x_4, x_5)$	Ax.9

(2) *On boit du lait dans la maison du milieu (n° 3) :*

$\star 2$	$(3, x_1, x_2, Lait, x_4, x_5)$	Ax.7

(3) *La maison bleue est la maison n° 2 :*

3.1	$\overline{(1, x_1, Nor, x_3, x_4, x_5)}$ $\vee(0, Bleu, x_2, x_3, x_4, x_5)$ $\vee(2, Bleu, x_2, x_3, x_4, x_5)$	Ax.13$[i := 1]$
$\star 3$	$(2, Bleu, x_2, x_3, x_4, x_5)$	Cut(3)(1, $N0[x_1 := Bleu]$)

(4) *La maison verte est la maison n° 4 :*

4.1	$\overline{(1, Vert, x_2, x_3, x_4, x_5)}$ $\vee(2, Blanc, x_2, x_3, x_4, x_5)$	Ax.4$[i := 1]$
4.2	$\overline{(1, Vert, x_2, x_3, x_4, x_5)}$	Cut(4.1)(3)
4.3	$\overline{(3, Vert, x_2, x_3, x_4, x_5)}$	Clash(Ax.5)(2)
4.4	$\overline{(5, Vert, x_2, x_3, x_4, x_5)}$ $\vee(6, Blanc, x_2, x_3, x_4, x_5)$	Ax.4$[i := 5]$
4.5	$\overline{(5, Vert, x_2, x_3, x_4, x_5)}$	Cut(4.4)($N6[x_1 := Blanc]$)
$\star 4$	$(4, Vert, x_2, x_3, x_4, x_5)$	Cut($\mathcal{I}_{Vert}$)(4.2, 3, 4.3, 4.5)

(5) *La maison blanche est la maison n° 5 :*

$\star 5$	$(5, Blanc, x_3, x_4, x_5)$	Cut(Ax.4$[i := 4]$)(4)

(6) *La maison rouge est la maison n^o 3 :*

6.1	$\overline{(1, Rouge, x_2, x_3, x_4, x_5)}$	Clash(Ax.1)(Ax.9)
$\star$6	$(3, Rouge, x_2, x_3, x_4, x_5)$	Cut($\mathcal{I}_{Rouge}$)(6.1, 3, 4, 5)

(7) *La maison jaune est la maison n^o 1 :*

$\star$7	$(1, Jaune, x_2, x_3, x_4, x_5)$	Cut($\mathcal{I}_{Jaune}$)(3, 6, 4, 5)

(8) *On fume des Dunhill dans la maison n^o 1 :*

8.1	$(1, Jaune, Nor, x_3, Dunh, x_5)$	Merge(7, Ax.8, Ax.9)
$\star$8	$(1, x_1, x_2, x_3, Dunh, x_5)$	ElimC(8.1)

(9) *L'Anglais habite la maison n^o 3 :*

9.1	$(3, Rouge, Ang, Lait, x_4, x_5)$	Merge(6, Ax.1, 2)
$\star$9	$(3, x_1, Ang, x_3, x_4, x_5)$	ElimC(9.1)

(10) *On boit du café dans la maison n^o 4 :*

10.1	$(4, Vert, x_2, Cafe, x_4, x_5)$	Merge(4, Ax.5)
$\star$10	$(4, x_1, x_2, Cafe, x_4, x_5)$	ElimC(10.1)

(11) *Il y a un cheval dans la maison n^o 2 :*

11.1	$\overline{(1, x_1, x_2, x_3, Dunh, x_5)}$ $\vee(0, x_1, x_2, x_3, x_4, Chev)$ $\vee(2, x_1, x_2, x_3, x_4, Chev)$	Ax.11$[i := 1]$
$\star$11	$(2, x_1, x_2, x_3, x_4, Chev)$	Cut(11.1)(8, $N0[x_5 := Chev]$)

(12) *On boit de l'eau dans la maison n^o 1 :*

12.1	$\overline{(1, x_1, x_2, Biere, x_4, x_5)}$	Clash(Ax.12)(8)
12.2	$\overline{(1, x_1, x_2, Cafe, x_4, x_5)}$	Clash(Ax.5)(7)
12.3	$\overline{(1, x_1, x_2, The, x_4, x_5)}$	Clash(Ax.9)(Ax.3)
$\star$12	$(1, x_1, x_2, Eau, x_4, x_5)$	Cut($\mathcal{B}_1$)(12.1, 12.2, 12.3, Ax.7)

(13) *On fume des Rothmann dans la maison n^o 2 :*

13.1	$\overline{(1, x_1, x_2, Eau, x_4, x_5)}$ $\vee(0, x_1, x_2, x_3, Roth, x_5)$ $\vee(2, x_1, x_2, x_3, Roth, x_5)$	Ax.15$[i := 1]$
$\star$13	$(2, x_1, x_2, x_3, Roth, x_5)$	Cut(13.1)(12, $N0[x_4 := Roth]$)

(14) *Le Danois habite la maison n^o 2 :*

14.1	$\overline{(2, x_1, Ang, x_3, x_4, x5)}$	Clash(Ax.1)(3)
14.2	$\overline{(2, x_1, All, x_3, x_4, x_5)}$	Clash(Ax.14)(13)
14.3	$\overline{(2, x_1, Sue, x_3, x_4, x_5)}$	Clash(Ax.2)(11)
$\star$14	$(2, x_1, Dan, x_3, x_4, x_5)$	Cut($\mathcal{N}_2$)(14.1, 14.2, 14.3, Ax.9)

(15) *On boit du thé dans la maison n^o 2 :*

15.1	$(2, Bleu, Dan, The, Roth, Chev)$	Merge(Ax.3, 3, 11, 13, 14)
$\star$15	$(2, x_1, x_2, The, x_4, x_5)$	ElimC(15.1)

(16) *On boit de la bière dans la maison n^o 5 :*

$\star$16	$(5, x_1, x_2, Biere, x_4, x_5)$	Cut($\mathcal{I}_{Biere}$)(12, 15, Ax.7, 10)

(17) *On fume des Philipp Morris dans la maison n^o 5 :*

17.1	$(5, Blanc, x_2, Biere, PhiMo, x_5)$	Merge(Ax.12, 5, 16)
$\star$17	$(5, x_1, x_2, x_3, PhiMo, x_5)$	ElimC(17.1)

(18) *L'Allemand habite la maison n^o 4 :*

18.1	$\overline{(5, x_1, All, x_3, x_4, x_5)}$	Clash(Ax.14)(17.1)
$\star$18	$(4, x_1, All, x_3, x_4, x_5)$	Cut($\mathcal{I}_{All}$)(Ax.9, 14, 9, 18.1)

(19) *On fume des Marlboro dans la maison n^o 4 :*

19.1	$(4, Vert, All, Cafe, Marl, x_5)$	Merge(Ax.14, 10.1, 18)
$\star$19	$(4, x_1, x_2, x_3, Marl, x_5)$	ElimC(19.1)

(20) *On fume des Pall Mall dans la maison n^o 3 :*

$\star$20	$(3, x_1, x_2, x_3, PaMal, x_5)$	Cut($\mathcal{I}_{PaMal}$)(8, 13, 19, 17)

(21) *Le Suédois habite la maison n^o 5 :*

$\star$21	$(5, x_1, Sue, x_3, x_4, x_5)$	Cut($\mathcal{I}_{Sue}$)(Ax.9, 14, 9, 18)

(22) *Il y a un oiseau dans la maison n^o 3 :*

22.1	$(3, Rouge, Ang, Lait, PaMal, Ois)$	Merge(Ax.6, 9.1, 20)
$\star$22	$(3, x_1, x_2, x_3, x_4, Ois)$	ElimC(22.1)

(23) *Il y a un chien dans la maison n^o 5 :*

23.1	$(5, Blanc, Sue, Biere, PhiMo, Chien)$	Merge(17.1, 21, Ax.2)
$\star$23	$(5, x_1, x_2, x_3, x_4, Chien)$	ElimC(23.1)

(24) *Il y a un chat dans la maison nº 1 :*

$$\begin{array}{lll}
24.1 & \overline{(2, x_1, x_2, x_3, Roth, x_5)} & \\
 & \vee(1, x_1, x_2, x_3, x_4, Chat) & \\
 & \vee(3, x_1, x_2, x_3, x_4, Chat) & \text{Ax.10}[i := 2] \\
\star 24 & (1, x_1, x_2, x_3, x_4, Chat) & \text{Cut}(24.1)(13, 22)
\end{array}$$

(25) *C'est dans la maison nº 4 qu'il y a un poisson !*

$$\begin{array}{lll}
\star 25 & (4, x_1, x_2, x_3, x_4, Pois) & \text{Cut}(\mathcal{I}_{Pois})(24, 11, 22, 23)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\star\star & (4, Vert, All, Cafe, Marl, Pois) & \text{Merge}(19.1, 25)
\end{array}$$

4 Résolution équationelle

Dans cette modélisation, on ne conserve comme symboles de constantes que les indices : 1, 2, 3, 4, 5. Ce qui était ci-dessus symboles de constantes pour les valeurs de couleurs, nationalités, etc. deviennent ici des *symboles de variables* dont il s'agit de déterminer la valeur. Ces variables prendront leur valeur dans l'intervale [1..5]. Résoudre l'énigme consiste donc ici à déterminer la valeur entière (numéro de maison) de la variable $Pois$: résoudre *l'équation* $Pois = i$.

Les contraintes La relation entre caractéristiques devient ici l'égalité entre valeurs de variables : que l'anglais habite la maison rouge devient donc $Ang = Rouge$.

Ainsi, les énoncés de l'énigme, numérotés de 1 à 15, sont transcrits de la façon suivante :

1. $Ang = Rouge$
2. $Sue = Chien$
3. $Dan = The$
4. $Blanc = Vert + 1$
5. $Vert = Cafe$
6. $PaMal = Ois$
7. $Lait = 3$
8. $Jaune = Dunh$
9. $Nor = 1$
10. $Roth = Chat + 1 \vee Roth = Chat - 1$
11. $Chev = Dunh + 1 \vee Chev = Dunh - 1$
12. $PhiMo = Biere$
13. $Bleu = Nor + 1 \vee Bleu = Nor - 1$

14. $All = Marl$
15. $Roth = Eau - 1 \vee Roth = Eau + 1$

Les contraintes d'existence sont résumées par la simple disjonction

$$V = 1 \vee V = 2 \vee V = 3 \vee V = 4 \vee V = 5$$

On nomme $\mathcal{I}_V$ la disjonction correspondant à la variable V.

La contrainte d'unicité est exprimée par le fait que chaque variable doit recevoir une valeur unique, i.e. différente des valeurs des autres variables : pour chaque couple de variables *lexicalement différentes* V_1, V_2 qui appartiennent à une même espèce, on a l'inégalité

$$V_1 \neq V_2$$

L'inexistence des maisons d'indice 0 et 6 s'énonce : pour toute variable V

$$V \neq 0 \qquad V \neq 6$$

que l'on nomme schématiquement $N0$ et $N6$.

Règles et justifications Les deux règles majeures utilisée dans cette version sont l'élimination de l'alternative et la réduction à l'absurde. Pour ces deux règles, nous admettrons leur utilisation étendue aux *équations opposables.* Une équation $x' = y'$ est opposable à $x = y$ si de $x' = y'$ on sait déduire $x \neq y$. Si V_1 et $V_2 = n$ sont deux variables différentes d'une même espèce et t n'importe quelle expression (constante, variable, etc.), alors les équations $V_1 = t$ et $V_2 = t$ sont opposables. En effet, puisque V_1 et $V_2 = n$ sont deux variables différentes d'une même espèce, on a l'inégalité $V_1 \neq V_2$; en y remplaçant V_2 par t, comme nous y autorise l'équation $V_2 = t$, on obtient l'inégalité $V_1 \neq t$.

C'est par définition même de la relation d'égalité que l'on peut tpoujours remplacer un égal par un égal : si l'on sait que $x = z$, dans une équation $x = y$, on peut toujours remplacer x par z pour obtenbir l'équation logiquement équivalente $z = y$.

La relation d'égalité est symétrique : nous assimilerons les équations $x = y$ et $y = x$.

Les justifications issues des régles ci utilisées sont :
- Ax.n l'axiome n° n.
- Ax.n $[\alpha]$ l'axiome n° n où l'un des termes a été remplacé en conformité avec l'équation référencée par α.
- Hyp pose d'une hypothèse (en vue d'une réduction à l'absurde).
- Abs $(n)(\alpha_1, \alpha_2)$ la réduction à l'absurde de l'hypothèse posée ligne n par la contradiction entre les équation et inéquation référencées α_1 et α_2.
- Cut$(\alpha)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ l'élimination entre la disjonction référencée par α et les inéquations (ou équations) référencées par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

La solution

(1) *Le norvégien habite la maison n^o 1 :*

$\star 1$	$Nor = 1$	Ax.9

(2) *On boit du lait dans la maison du milieu (n^o 3) :*

$\star 2$	$Lait = 3$	Ax.7

(3) *La maison bleue est la maison n^o 2 :*

3.1	$Bleu = 0 \vee Bleu = 2$	Ax.13 [1]
$\star 3$	$Bleu = 2$	Cut(3)($N0$)

(4) *La maison verte est la maison n^o 4 :*

4.1	$Vert = 1$	Hyp
4.2	$Blanc = 2$	Ax.4 [5]
4.3	$Vert \neq 1$	Abs (4.1)(4.2, 3)
4.4	$Vert = 3$	Hyp
4.5	$Cafe = 3$	Ax.5 [4.4]
4.6	$Vert \neq 3$	Abs (4.4)(4.5, 3)
4.7	$Vert = 5$	Hyp
4.8	$Blanc = 6$	Ax.4 [4.7]
4.9	$Vert \neq 5$	Abs (4.7)(4.8, $N6$)
$\star 4$	$Vert = 4$	Cut($\mathcal{I}_{Vert}$)(4.3, 3, 4.6, 4.9)

(5) *La maison blanche est la maison n^o 5 :*

$\star 5$	$Blanc = 5$	Ax.4 [4]

(6) *La maison rouge est la maison n^o 3 :*

6.1	$Rouge = 1$	Hyp
6.2	$Ang = 1$	Ax.1 [6.1]
6.3	$Rouge \neq 1$	Abs (6.1)(6.2, 1)
$\star 6$	$Rouge = 3$	Cut($\mathcal{I}_{Rouge}$)(6.3, 3, 4, 5)

(7) *La maison jaune est la maison n^o 1 :*

$\star 7$	$Jaune = 1$	Cut($\mathcal{I}_{Jaune}$)(3, 6, 4, 5)

(8) *On fume des Dunhill dans la maison n^o 1 :*

$\star 8$	$Dunh = 1$	Ax.8 [7]

(9) *L'Anglais habite la maison n^o 3 :*

$\star 9$	$Ang = 3$	Ax.1 [6]

(10) *On boit du café dans la maison n^o 4 :*

$\star 10$	$Cafe = 4$	Ax.5 [4]

(11) *Il y a un cheval dans la maison n^o 2 :*

11.1	$Chev = 0 \vee Chev = 2$	Ax.11 [8]
$\star 11$	$Chev = 2$	Cut(11.1)($N0$)

(12) *On boit de l'eau dans la maison n^o 1 :*

12.1	$Biere = 1$	Hyp
12.2	$PhiMo = 1$	Ax.12 [12.1]
12.3	$Biere \neq 1$	Abs (12.1)(12.2, 8)
12.4	$The = 1$	Hyp
12.5	$Dan = 1$	Ax.3 [12.4]
12.6	$The \neq 1$	Abs (12.4)(12.5, 1)
$\star 12$	$Eau = 1$	Cut($\mathcal{B}_1$)(12.3, 10, 12.6, 2)

(13) *On fume des Rothmann dans la maison n^o 2 :*

13.1	$Roth = 0 \vee Roth = 2$	Ax.15 [12]
$\star 13$	$Roth = 2$	Cut(13.1)($N0$)

(14) *Le Danois habite la maison n^o 2 :*

14.1	$All = 2$	Hyp
14.2	$Marl = 2$	Ax.14 [14.1]
14.3	$All \neq 2$	Abs (14.1)(14.2, 13)
14.4	$Sue = 2$	Hyp
14.5	$Chien = 2$	Ax.2 [14.4]
14.6	$Sue \neq 2$	Abs (14.4)(14.5, 11)
$\star 14$	$Dan = 2$	Cut($\mathcal{N}_2$)(9, 14.3, 14.6, 1)

(15) *On boit du thé dans la maison n^o 2 :*

$\star 15$	$The = 2$	Ax.3 [14]

(16) *On boit de la bière dans la maison n^o 5 :*

$\star 16$	$Biere = 5$	Cut($\mathcal{I}_{Biere}$)(12, 15, 2, 10)

(17) *On fume des Philipp Morris dans la maison n^o 5 :*

$\star 17$	$PhiMo = 5$	Ax.12 [16]

(18) *L'Allemand habite la maison n^o 4 :*

18.1	$All = 5$	Hyp
18.2	$Marl = 5$	Ax.14 [18.1]
18.3	$All \neq 5$	Abs (18.1)(18.2, 17)
$\star 18$	$All = 4$	Cut($\mathcal{I}_{All}$)(1, 14, 9, 18.3)

19*On fume des Marlboro dans la maison n^o 4 :*

$\star 19$	$Marl = 4$	Ax.14 [18]

(20) *On fume des Pall Mall dans la maison n^o 3 :*

$\star 20$	$PaMal = 3$	Cut($\mathcal{I}_{PaMal}$)(8, 13, 19, 17)

(21) *Le Suédois habite la maison n^o 5 :*

$\star 21$	$Sue = 5$	Cut($\mathcal{I}_{Sue}$)(1, 14, 9, 18)

(22) *Il y a un oiseau dans la maison n^o 3 :*

$\star 22$	$Ois = 3$	Ax.6 [20]

(23) *Il y a un chien dans la maison n^o 5 :*

$\star 23$	$Chien = 5$	Ax.2 [21]

(24) *Il y a un chat dans la maison n^o 1 :*

24.1	$Chat = 1 \vee Chat = 3$	Ax.10 [13]
$\star 24$	$Chat = 1$	Cut(24.1)(22)

(25) *C'est dans la maison n^o 4 qu'il y a un poisson !*

$\star 25$	$Pois = 4$	Cut($\mathcal{I}_{Pois}$)(24, 11, 22, 23)

5 Résumé graphique des étapes de résolution

La méthode *naïve* de résolution de l'énigme consiste à dessiner un tableau de 5 sur 5 dont chaque colonne (ou ligne) représente une maison et chaque ligne (ou colonne) représente un attribut. Le jeu consiste alors à remplir progressivement les cases du tableau en fonction des informations déduites jusqu'à ce qu'apparaisse l'information recherchée : les poissons.

Nous donnons ci-après les 25 étapes (5 maisons, 5 attributs : $25 = 5 \times 5$) de remplissage du tableau qui reflètent nos 25 étapes de raisonnement. Nous avons choisi le rangement du tableau en ligne pour les maisons et colonnes pour les attributs : cette présentation est à rapprocher de la seconde formalisation en calcul des prédicats où chaque maison est modélisée par un n-uplet de 6 valeurs.

(1)

$\mathcal{I}$ndice	$\mathcal{C}$ouleur	$\mathcal{N}$ationalité	$\mathcal{B}$oisson	$\mathcal{F}$ume	$\mathcal{A}$nimal
1		Nor.			
2					
3					
4					
5					

(2)

$\mathcal{I}$ndice	$\mathcal{C}$ouleur	$\mathcal{N}$ationalité	$\mathcal{B}$oisson	$\mathcal{F}$ume	$\mathcal{A}$nimal
1		Nor.			
2					
3			Lait		
4					
5					

(3)

$\mathcal{I}$ndice	$\mathcal{C}$ouleur	$\mathcal{N}$ationalité	$\mathcal{B}$oisson	$\mathcal{F}$ume	$\mathcal{A}$nimal
1		Nor.			
2	Bleu				
3			Lait		
4					
5					

(4)

$\mathcal{I}$ndice	$\mathcal{C}$ouleur	$\mathcal{N}$ationalité	$\mathcal{B}$oisson	$\mathcal{F}$ume	$\mathcal{A}$nimal
1		Nor.			
2	Bleu				
3			Lait		
4	Vert				
5					

(5)

$\mathcal{I}$ndice	$\mathcal{C}$ouleur	$\mathcal{N}$ationalité	$\mathcal{B}$oisson	$\mathcal{F}$ume	$\mathcal{A}$nimal
1		Nor.			
2	Bleu				
3			Lait		
4	Vert				
5	Blanc				

(6)

Indice	Couleur	Nationalité	Boisson	Fume	Animal
1		Nor.			
2	Bleu				
3	Rouge		Lait		
4	Vert				
5	Blanc				

(7)

Indice	Couleur	Nationalité	Boisson	Fume	Animal
1	Jaune	Nor.			
2	Bleu				
3	Rouge		Lait		
4	Vert				
5	Blanc				

(8)

Indice	Couleur	Nationalité	Boisson	Fume	Animal
1	Jaune	Nor.		Dunh.	
2	Bleu				
3	Rouge		Lait		
4	Vert				
5	Blanc				

(9)

Indice	Couleur	Nationalité	Boisson	Fume	Animal
1	Jaune	Nor.		Dunh.	
2	Bleu				
3	Rouge	Ang.	Lait		
4	Vert				
5	Blanc				

(10)

Indice	Couleur	Nationalité	Boisson	Fume	Animal
1	Jaune	Nor.		Dunh.	
2	Bleu				
3	Rouge	Ang.	Lait		
4	Vert		Café		
5	Blanc				

(11)

Indice	Couleur	Nationalité	Boisson	Fume	Animal
1	Jaune	Nor.		Dunh.	
2	Bleu				Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait		
4	Vert		Café		
5	Blanc				

(12)

$\mathcal{I}$ndice	$\mathcal{C}$ouleur	$\mathcal{N}$ationalité	$\mathcal{B}$oisson	$\mathcal{F}$ume	$\mathcal{A}$nimal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	
2	Bleu				Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait		
4	Vert		Café		
5	Blanc				

(13)

$\mathcal{I}$ndice	$\mathcal{C}$ouleur	$\mathcal{N}$ationalité	$\mathcal{B}$oisson	$\mathcal{F}$ume	$\mathcal{A}$nimal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	
2	Bleu			Roth.	Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait		
4	Vert		Café		
5	Blanc				

(14)

$\mathcal{I}$ndice	$\mathcal{C}$ouleur	$\mathcal{N}$ationalité	$\mathcal{B}$oisson	$\mathcal{F}$ume	$\mathcal{A}$nimal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	
2	Bleu	Dan.		Roth.	Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait		
4	Vert		Café		
5	Blanc				

(15)

$\mathcal{I}$ndice	$\mathcal{C}$ouleur	$\mathcal{N}$ationalité	$\mathcal{B}$oisson	$\mathcal{F}$ume	$\mathcal{A}$nimal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	
2	Bleu	Dan.	Thé	Roth.	Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait		
4	Vert		Café		
5	Blanc				

(16)

$\mathcal{I}$ndice	$\mathcal{C}$ouleur	$\mathcal{N}$ationalité	$\mathcal{B}$oisson	$\mathcal{F}$ume	$\mathcal{A}$nimal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	
2	Bleu	Dan.	Thé	Roth.	Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait		
4	Vert		Café		
5	Blanc		Bière	Phi. Mo.	

(17)

$\mathcal{I}$ndice	$\mathcal{C}$ouleur	$\mathcal{N}$ationalité	$\mathcal{B}$oisson	$\mathcal{F}$ume	$\mathcal{A}$nimal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	
2	Bleu	Dan.	Thé	Roth.	Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait		
4	Vert		Café		
5	Blanc		Bière	Phi. Mo.	

(18)

Indice	Couleur	Nationalité	Boisson	Fume	Animal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	
2	Bleu	Dan.	Thé	Roth.	Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait		
4	Vert	All	Café		
5	Blanc		Bière	Phi. Mo.	

(19)

Indice	Couleur	Nationalité	Boisson	Fume	Animal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	
2	Bleu	Dan.	Thé	Roth.	Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait		
4	Vert	All	Café	Marl.	
5	Blanc		Bière	Phi. Mo.	

(20)

Indice	Couleur	Nationalité	Boisson	Fume	Animal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	
2	Bleu	Dan.	Thé	Roth.	Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait	Pa. Mal.	
4	Vert	All	Café	Marl.	
5	Blanc		Bière	Phi. Mo.	

(21)

Indice	Couleur	Nationalité	Boisson	Fume	Animal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	
2	Bleu	Dan.	Thé	Roth.	Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait	Pa. Mal.	
4	Vert	All	Café	Marl.	
5	Blanc	Suè.	Bière	Phi. Mo.	

(22)

Indice	Couleur	Nationalité	Boisson	Fume	Animal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	
2	Bleu	Dan.	Thé	Roth.	Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait	Pa. Mal.	Ois.
4	Vert	All	Café	Marl.	
5	Blanc	Suè.	Bière	Phi. Mo.	

(23)

Indice	Couleur	Nationalité	Boisson	Fume	Animal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	
2	Bleu	Dan.	Thé	Roth.	Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait	Pa. Mal.	Ois.
4	Vert	All	Café	Marl.	
5	Blanc	Suè.	Bière	Phi. Mo.	Chien

(24)

$\mathcal{I}$ndice	$\mathcal{C}$ouleur	$\mathcal{N}$ationalité	$\mathcal{B}$oisson	$\mathcal{F}$ume	$\mathcal{A}$nimal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	Chat
2	Bleu	Dan.	Thé	Roth.	Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait	Pa. Mal.	Ois.
4	Vert	All	Café	Marl.	
5	Blanc	Suè.	Bière	Phi. Mo.	Chien

(25)

$\mathcal{I}$ndice	$\mathcal{C}$ouleur	$\mathcal{N}$ationalité	$\mathcal{B}$oisson	$\mathcal{F}$ume	$\mathcal{A}$nimal
1	Jaune	Nor.	Eau	Dunh.	Chat
2	Bleu	Dan.	Thé	Roth.	Chev.
3	Rouge	Ang.	Lait	Pa. Mal.	Ois.
4	Vert	All	Café	Marl.	**Pois.**
5	Blanc	Suè.	Bière	Phi. Mo.	Chien