MPRI 2–2 TD 2 du 13/1/2017

Thomas Ehrhard

On rappelle qu'une hypercohérence est une structure $X = (|X|, \Gamma(X))$ où $|X|$ est un ensemble au plus dénombrable et $\Gamma(X) \subseteq \mathcal{P}^*_{\mathrm{fin}}(|X|)$ (l'ensemble des parties finies non vides de $|X|$) est tel que $\forall a \in |X|\ \{a\} \in \Gamma(X)$.

On définit alors le *domaine qualitatif* associé $\mathsf{qD}(X)$ par

$$\mathsf{qD}(X) = \{x \subseteq |X| \mid \forall u \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{fin}}(x)\ u \in \Gamma(X)\}$$

1) Prouver que $\mathsf{qD}(X)$ contient $\emptyset$ et tous les $\{a\}$ pour $a \in |X|$, que $x \subseteq y \in \mathsf{qD}(X) \Rightarrow x \in \mathsf{qD}(X)$ et que si $D \subseteq \mathsf{qD}(X)$ est filtrant, alors $\bigcup D \in \mathsf{qD}(X)$.

On dit qu'une partie A de $\mathsf{qD}(X)$ est cohérente si elle est finie, non vide, et satisfait: $\forall u \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{fin}}(|X|)\ u \lhd A \Rightarrow u \in \Gamma(X)$. On note $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des parties cohérentes de $\mathsf{qD}(X)$.

On définit le préordre d'Egli-Milner $\sqsubseteq$ sur $\mathcal{P}^*_{\mathrm{fin}}(\mathcal{C}(X))$ de la façon suivante: $A \sqsubseteq B$ si $\forall x \in A\, \exists y \in B\ x \subseteq y$ et $\forall y \in B\, \exists x \in A\ x \subseteq y$.

2) Montrer que, si $B \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{fin}}(\Gamma(X))$ et $B \sqsubseteq A \in \mathcal{C}(X)$ alors $B \in \mathcal{C}(X)$. Montrer que si A contient $\emptyset$ ou est borné (c'est-à-dire qu'il existe $y \in \mathsf{qD}(X)$ tel que $\forall x \in B\ x \subseteq y$), alors $A \in \mathcal{C}(X)$.

Une fonction fortement stable d'une hypercohérence X vers une hypercohérence Y est une fonction $f : \mathsf{qD}(X) \to \mathsf{qD}(Y)$ qui est croissante (par rapport à l'inclusion), Scott-continue (si $D \subseteq \mathsf{qD}(X)$ est filtrant alors $f(\bigcup D) = \bigcup\{f(x) \mid x \in D\}$, c'est-à-dire $f(\bigcup D) \subseteq \bigcup\{f(x) \mid x \in D\}$, l'autre inclusion résultant de la croissance de f) et de plus: pour tout $A \in \mathcal{C}(X)$ on a $f(A) \in \mathcal{C}(Y)$ et $f(\bigcap A) = \bigcap\{f(x) \mid x \in A\}$ (c'est-à-dire $f(\bigcap A) \supseteq \bigcap\{f(x) \mid x \in A\}$, l'autre inclusion résultant de la croissance de f). On dit qu'un tel f est linéaire si de plus $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f(x \cup x') = f(x) \cup f(x')$ pour tous $x, x' \in \mathsf{qD}(X)$ tels que $x \cup x' \in \mathsf{qD}(X)$ (c'est-à-dire $f(x \cup x') \subseteq f(x) \cup f(x')$).

On rappelle que l'hypercohérence $X \multimap Y$ est définie par $|X \multimap Y| = |X| \times |Y|$ et $w \in \Gamma(X \multimap Y)$ si et seulement si

$$\pi_1(w) \in \Gamma(X) \Rightarrow (\pi_2(w) \in \Gamma(Y) \text{ et } \#\pi_2(w) = 1 \Rightarrow \#\pi_1(w) = 1)$$

où π_i est la i-ème projection du produit cartésien dans la catégorie des ensembles et des fonctions.

3) Soit f fortement stable et linéaire de X vers Y. On définit (comme dans le cas des espaces cohérents)

$$\mathsf{tr}(f) = \{(a, b) \in |X| \times |Y| \mid b \in f(\{a\})\}\,.$$

3.1) Soit w une partie finie et non vide de $\mathsf{tr}(f)$. On suppose que $\pi_1(w) \in \Gamma(X)$. Soit $A = \{\{a\} \mid a \in \pi_1(w)\}$. Vérifier que $A \in \mathcal{C}(X)$ puis que $\pi_2(w) \lhd f(A)$. En déduire que $\pi_2(w) \in \Gamma(Y)$.

3.2) Supposer en plus que $\pi_2(w)$ est un singleton $\{b\}$. En utilisant le fait que $f(\bigcap A) = \bigcap\{f(x) \mid x \in A\}$ et la linéarité de f, montrer que $\pi_1(w)$ est nécessairement un singleton. Déduire de tout cela que $\mathsf{tr}(f) \in \mathsf{qD}(X \multimap Y)$.

4) Soit $t \in \mathsf{qD}(X \multimap Y)$. Comme dans les espaces cohérents, on définit une fonction $\mathsf{fun}(t) : \mathsf{qD}(X) \to \mathcal{P}(|Y|)$ par

$$\mathsf{fun}(t)(x) = \{b \in |Y| \mid \exists a \in x\ (a, b) \in t\}\,.$$

4.1) Montrer que si $x \in \mathsf{qD}(X)$ alors $\mathsf{fun}(t)(x) \in \mathsf{qD}(Y)$. Pour cela, on considère une partie finie non vide v de $\mathsf{fun}(t)(x)$ et on construit un sous-ensemble fini non vide w de t tel que $\pi_2(w) = v$ et $\pi_1(w) \subseteq x$.

4.2) Soit $A \in \mathcal{C}(X)$. Montrer que $f(A) \in \mathcal{C}(Y)$: comme ci-dessus, étant donné $v \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(s)(|X|)$ tel que $v \lhd \mathsf{fun}(t)(A)$, définir une partie finie non vide w de t telle que $\pi_2(w) = v$ et $\pi_1(w) \lhd A$.

4.3) Finir la preuve que $\mathsf{fun}(t)$ est fortement stable. Montrer que $\mathsf{fun}(t)$ est linéaire.

4.4) Montrer que les fonctions fun et tr sont inverses l'une de l'autre.

La catégorie **FSlin** a pour objets les hypercohérences et $\mathbf{FSlin}(X,Y) = \mathsf{qD}(X \multimap Y)$ (l'identité est la relation diagonale, la composition est la composition des relations). C'est une catégorie monoïdale symétrique, avec le produit tensoriel $\otimes$ défini par

$$X_1 \otimes X_2 = (|X_1| \times |X_2|, \{w \in \mathcal{P}^*_{\text{fin}}(|X_1| \times |X_2|) \mid \pi_i(w) \in \Gamma(X_i) \text{ pour } i = 1,2\})$$

qui a pour unité l'objet $1 = (\{*\}, \{\{*\}\})$. Il faut aussi donner l'action de $\otimes$ sur les morphismes. C'est fait dans l'exercice suivant.

5) Pour $i = 1,2$, soit $s_i \in \mathbf{FSlin}(X_i, Y_i)$ où les X_i et Y_i sont des hypercohérences pour $i = 1,2$. On définit

$$s_1 \otimes s_2 = \{((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \mid (a_i,b_i) \in s_i \text{ pour } i = 1,2\} \subseteq |X_1 \otimes X_2 \multimap Y_1 \otimes Y_2|.$$

5.1) Montrer que $s_1 \otimes s_2 \in \mathsf{qD}(X_1 \otimes X_2 \multimap Y_1 \otimes Y_2)$. On pourra utiliser la notation suivante: si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensemble et si $J \subseteq I$ alors $\pi_J : \prod_{i\in I} E_i \to \prod_{i\in J} E_i$ est la projection qui envoie $(e_i)_{i\in I}$ sur $(e_i)_{i\in J}$. On considérera $|X_1 \otimes X_2 \multimap Y_1 \otimes Y_2|$ comme un produit indexé par $I = \{1,2,3,4\}$.

Pour conclure qu'on a bien une catégorie monoïdale symétrique (SMC), il faut donner explicitement des isomorphismes naturels $\alpha_{X_1,X_2,X_3} \in \mathbf{FSlin}((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3, X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3))$, $\lambda_X \in \mathbf{FSlin}(1 \otimes X, X)$, $\sigma_{X_1,X_2} \in \mathbf{FSlin}(X_1 \otimes X_2, X_2 \otimes X_1)$ etc satisfaisant une série de *diagrammes de cohérence*, voir section 3.5 des notes de cours. Cela ne pose aucune difficulté.

On veut montrer que cette catégorie monoïdale symétrique est *close*, ce qui signifie qu'il y a des "objets des morphismes linéaires". Soient X et Y des hypercohérences, on définit

$$\mathsf{ev}_{X,Y} = \{(((a,b),a),b) \mid a \in |X| \text{ et } b \in |Y|\} \subseteq |((X \multimap Y) \otimes X) \multimap Y|$$

5.2) Montrer que $\mathsf{ev}_{X,Y} \in \mathbf{FSlin}((X \multimap Y) \otimes X, Y)$.

5.3) Soit $t \in \mathbf{FSlin}(Z \otimes X, Y)$. Soit $\mathsf{cur}(t) = \{(c,(a,b)) \in |Z \multimap (X \multimap Y)| \mid ((c,a),b) \in t\}$; montrer que $\mathsf{cur}(t) \in \mathbf{FSlin}(Z, X \multimap Y)$.

5.4) Vérifier les équations suivantes (qui signifient que $(X \multimap Y, \mathsf{ev})$ est bien un objet des morphismes dans **FSlin**):

$$\begin{aligned} \mathsf{ev}\,(\mathsf{cur}(t) \otimes X) &= t \\ \mathsf{cur}(t)\, s &= \mathsf{cur}(t\,(s \otimes X)) \quad \text{pour } s \in \mathbf{FSlin}(Z', Z) \\ \mathsf{cur}(\mathsf{ev}) &= \mathsf{Id}_{X \multimap Y} \end{aligned}$$

où on utilise X pour dénoter le morphisme identité en X.

5.5) Soit $\perp = 1$. Montrer que $\mathsf{cur}\,(\mathsf{ev}_{X,\perp}\ \sigma_{X,X\multimap\perp})$ est un isomorphisme (autrement dit **FSlin** est $*$-autonome).

6) On définit $!X$ en prenant pour $|!X|$ l'ensemble des éléments finis de $\mathsf{qD}(X)$ et $\Gamma(!X) = \mathcal{C}(X) \cap \mathcal{P}(|!X|)$. Si $t \in \mathbf{FSlin}(X,Y)$, on pose

$$!t = \{(x_0, y_0) \in |!X \multimap !Y| \mid \forall a \in x_0\ \exists b \in y_0\ (a,b) \in t \text{ et } \forall b \in y_0\ \exists a \in x_0\ (a,b) \in t\}\,.$$

6.1) Montrer que $!t \in \mathbf{FSlin}(!X, !Y)$.

6.2) Montrer qu'on a bien défini un foncteur $\mathbf{FSlin} \to \mathbf{FSlin}$.

6.3) On définit $\mathsf{der}_X = \{(\{a\}, a) \mid a \in |X|\} \subseteq |!X \multimap X|$, vérifier que $\mathsf{der}_X \in \mathbf{FSlin}(!X, X)$.

6.4) Prouver qu'on a ainsi défini une transformation naturelle. Autrement dit, montrer que, si $s \in \mathbf{FSlin}(X,Y)$, alors $s\ \mathsf{der}_X = \mathsf{der}_Y\ !s$.

6.5) On définit $\mathsf{dig}_X = \{(x_1 \cup \cdots \cup x_n, \{x_1, \ldots, x_n\}) \mid x_1, \ldots, x_n \in |!X| \text{ et } x_1 \cup \cdots \cup x_n \in |!X|\}$. Montrer que $\mathsf{dig}_X \in \mathbf{FSlin}(!X, !!X)$. On admettra qu'on a bien défini une transformation naturelle.

6.6) Vérifier que les équations de comonade sont bien vérifiées, à savoir:

$$\mathsf{dig}_X\ \mathsf{der}_{!X} = \mathsf{Id}_{!!X} \tag{1}$$
$$\mathsf{dig}_X\ !\mathsf{der}_X = \mathsf{Id}_{!!X} \tag{2}$$
$$!\mathsf{dig}_X\ \mathsf{dig}_X = \mathsf{dig}_{!X}\ \mathsf{dig}_X \tag{3}$$

7) Soit $t \in \mathbf{FSlin}(!X, Y)$ (autrement dit, t est un morphisme dans la catégorie de Kleisli de la comnade "!"). On définit une fonction

$$\begin{aligned}\mathsf{Fun}(t) : \mathsf{qD}(X) &\to \mathcal{P}(|Y|)\\ x &\mapsto \{b \mid \exists x_0 \subseteq x\ (x_0, b) \in t\}\end{aligned}$$

Montrer que cette fonction prend ses valeurs dans $\mathsf{qD}(Y)$ et qu'elle est fortement stable.

8) Réciproquement soit f fortement stable de X vers Y (autrement dit f est une fonction croissante et Scott continue $\mathsf{qD}(X) \to \mathsf{qD}(Y)$ qui préserve la cohérence et commute aux intersections des ensembles cohérents). On définit comme dans le cas stable

$$\mathsf{Tr}(f) = \{(x_0, b) \in |!X \multimap Y| \mid b \in f(x_0) \text{ et } \forall x_0' \subseteq x_0\ b \in f(x_0') \Rightarrow x_0' = x_0\}\,.$$

Autrement dit, $(x_0, b) \in \mathsf{Tr}(f)$ signifie que x_0 est une clique finie de X, que $b \in f(x_0)$ et que x_0 est minimal avec cette propriété.

Montrer que $\mathsf{Tr}(f) \in \mathbf{FSlin}(!X, Y)$.

9) La catégorie de Kleisli $\mathbf{FSlin}_!$ de la comonade "!" est définie de la façon suivante: ses objets sont ceux de $\mathbf{FSlin}$ (les hypercohérences) et $\mathbf{FSlin}_!(X, Y) = \mathbf{FSlin}(!X, Y)$. La composition dans cette catégorie, notée "$\circ$", est définie de la façon suivante: si $s \in \mathbf{FSlin}(!X, Y)$ et $t \in \mathbf{FSlin}(!Y, Z)$, alors

$$t \circ s = t\,!s\ \mathsf{dig}_X$$

et l'identité en X est $\mathsf{der}_X \in \mathbf{FSlin}(!X, X)$.

9.1) En utilisant les équations de comonade (1), vérifier qu'on a bien défini ainsi une catégorie (associativité de la composition, neutralité de l'identité).

9.2) Montrer que $\mathsf{Fun}(t \circ s) = \mathsf{Fun}(t) \circ \mathsf{Fun}(s)$ (dans le terme de droite, on utilise la composition usuelle des fonctions) et, accessoirement, que $\mathsf{Fun}(\mathsf{der}_X)$ est la fonction identité sur $\mathsf{qD}(X)$.

9.3) Réciproquement soient f une fonction fortement stable de X vers Y et g une fonction fortement stable de Y vers Z. Montrer que $\mathsf{Tr}(g \circ f) = \mathsf{Tr}(g) \circ \mathsf{Tr}(f)$ (et un énoncé similaire pour l'identité, qu'on donnera).

10) On rappelle la construction du produit cartésien d'hypercohérences: si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille au plus dénombrable d'hypercohérences, on définit $X = \&_{i \in I} X_i$ par

$$\begin{aligned}|X| &= \bigcup_{i \in I} \{i\} \times |X_i|\\ \Gamma(X) &= \{w \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{fin}}(|X|) \mid \forall i \in I\ \pi_1(w) = \{i\} \Rightarrow \pi_2(w) \in \Gamma(X_i)\}\end{aligned}$$

et la i-ème projection est $\mathsf{pr}_i = \{((i, a), a) \mid a \in |X_i|\} \in \mathbf{FSlin}(X, X_i)$ (pour $i \in I$).

On rappelle aussi qu'un isomorphisme entre deux hypercohérences X et Y est une bijection $\varphi : |X| \to |Y|$ telle que $\forall u \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{fin}}(|X|)\ u \in \Gamma(X) \Leftrightarrow \varphi(u) \in \Gamma(Y)$.

10.1) En le munissant de projections bien choisies, montrer que $\&_{i \in I} X_i$ est aussi le produit cartésien des X_i dans $\mathbf{FSlin}_!$ (voir section 3.3 des notes de cours pour la définition générale de produit cartésien).

10.2) Donner un isomorphisme entre $!X_1 \otimes !X_2$ et $!(X_1 \,\&\, X_2)$.

10.3) Prouver que la catégorie $\mathbf{FSlin}_!$ est cartésienne fermée (voir chapitre 3 des notes de cours pour la définition générale de cette notion). Comme objet des morphismes de X vers Y, on prendra l'hypercohérence $X \Rightarrow Y = !X \multimap Y$, munie d'un morphisme d'évaluation $\mathsf{Ev} \in \mathbf{FSlin}_!((X \Rightarrow Y) \,\&\, X, Y)$ donné par

$$\mathsf{Ev} = \{(\{(1, (x_0, b))\} \cup (\{2\} \times x_0), b) \mid x_0 \in |!X| \text{ et } b \in |Y|\}\,.$$

11) L'hypercohérence des entiers est $\mathsf{N} = (\mathbb{N}, \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\})$. On note $\mathsf{N}^k = \mathsf{N} \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} \mathsf{N}$ (k fois).

11.1) Décrire $\mathsf{qD}(\mathsf{N}^k)$ et $\mathcal{C}(\mathsf{N}^k)$ le plus simplement possible.

11.2) Montrer que $\{(\{(1,0),(2,1)\},0),(\{(2,0),(3,1)\},0),(\{(3,0),(1,1)\},1)\} \notin \mathbf{FSlin_!}(\mathsf{N}^3,\mathsf{N})$.

11.3) Soient $s_0 = \{(\{(1,0),(2,1)\},0),(\{(2,0),(3,1)\},0)\}$ et $s_1 = (\{(3,0),(1,1)\},1)\}$, montrer que $s_0, s_1 \in \mathsf{qD}(\mathsf{N}^3 \Rightarrow \mathsf{N})$ et que $\{(s_0,0),(s_1,1)\} \in \mathsf{qD}((\mathsf{N}^3 \Rightarrow \mathsf{N}) \Rightarrow \mathsf{N})$.

11.4) Soit $\mathsf{N_{coh}}$ l'espace cohérent des entiers plats: $\mathsf{N_{coh}} = (\mathbb{N}, =)$. Montrer que $s_0, s_1 \in \mathsf{Cl}(\mathsf{N}^3_{\mathsf{coh}} \Rightarrow \mathsf{N_{coh}})$ et que $\{(s_0,0),(s_1,1)\} \notin \mathsf{Cl}((\mathsf{N}^3_{\mathsf{coh}} \Rightarrow \mathsf{N_{coh}}) \Rightarrow \mathsf{N_{coh}})$. Quelle est la morale?

12) On pose $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit N^I comme le produit $\&_{i\in I} X_i$ où chaque X_i est l'hypercohérence N.

12.1) Adapter la preuve vue en cours pour montrer que les fonctions fortement stables de N^I vers N sont exactement les fonctions séquentielles, c'est-à-dire les fonctions croissantes et Scott continues $f : \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I) \to \mathsf{qD}(\mathsf{N})$ telles que, pour tout $x \in \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)$, si $f(x) = \emptyset$ et s'il existe $y \in \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)$ tel que $x \subseteq y$ et $f(y) \neq \emptyset$, alors il existe $i \in \{1, 2, \dots\}$ (un indice de séquentialité de f en x) tel que

- $\mathsf{pr}_i(x) = \emptyset$ (où $\mathsf{pr}_i(z) = \{a \in \mathbb{N} \mid (i,a) \in z\}$, pour $z \in \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)$; pr_i est la i-ème projection du produit cartésien dans $\mathbf{FSlin_!}$, vue comme fonction fortement stable)
- et pour tout $y \in \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)$, si $x \subseteq y$ et $f(y) \neq \emptyset$ alors $\mathsf{pr}_i(y) \neq \emptyset$.

Par conséquent un élément de $t = \mathbf{FSlin_!}(\mathsf{N}^I, \mathsf{N}^I)$ peut être considéré comme une famille $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ de fonctions séquentielles (on a $\mathsf{Fun}(t)(x) = (f_i(x))_{i=1}^{\infty}$ en identifiant $\mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)$ et $\prod_{i\in I} \mathsf{qD}(\mathsf{N})$).

Soit $\theta : I \to (\{1\} \times I) \cup (\{2\} \times I)$ une bijection quelconque (par exemple $\theta(i) = (1, \frac{i}{2})$ si i est pair et $\theta(i) = (2, \frac{i+1}{2})$ si i est impair). Remarquer que cette bijection induit un isomorphisme entre les hypercohérences N^I et $\mathsf{N}^I \mathbin{\&} \mathsf{N}^I$ qu'on notera encore θ.

On appellera espace séquentiel un couple $\mathcal{X} = (\underline{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{X}})$ où $\underline{\mathcal{X}}$ est un ensemble (le support de $\mathcal{X}$) et $\widehat{\mathcal{X}}$ est un ensemble de fonctions $\mathsf{qD}(\mathsf{N}^I) \to \underline{\mathcal{X}}$ qui vérifie les propriétés suivantes: pour tout $\xi \in \underline{\mathcal{X}}$ la fonction constante qui a ξ comme unique valeur appartient à $\widehat{\mathcal{X}}$, et si $\gamma \in \widehat{\mathcal{X}}$ et h est fortement stable de N^I vers N^I, alors $\gamma \circ h \in \widehat{X}$. Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des espaces séquentiels, un morphisme de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$ est une fonction $f : \underline{\mathcal{X}} \to \underline{\mathcal{Y}}$ telle que, pour tout $\gamma \in \widehat{\mathcal{X}}$, on a $f \circ \gamma \in \widehat{\mathcal{Y}}$.

12.2) Montrer que les espaces séquentiels et leurs morphismes forment une catégorie qu'on notera **SeqSp**. Montrer que cette catégorie est cartésienne fermée. Indications: la définition du produit cartésien est sans surprise. On construit l'espace $\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}$ des morphismes de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$ comme suit. On prend pour $\underline{\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}}$ l'ensemble des morphismes de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$, et une fonction $\gamma : \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I) \to \underline{\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}}$ appartient à $\widehat{\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}}$ si et seulement si la fonction associée $\gamma' : \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I) \times \underline{\mathcal{X}} \to \underline{\mathcal{Y}}$ (définie par $\gamma'(x,\xi) = \gamma(x)(\xi)$) vérifie que, pour tout $\delta \in \widehat{\mathcal{X}}$, on a $\gamma' \circ (\mathsf{Id}_{\mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)} \times \delta) \circ \mathsf{fun}(\theta^{-1}) \in \widehat{\mathcal{Y}}$ (en identifiant $\mathsf{qD}(\mathsf{N}^I) \times \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)$ avec $\mathsf{qD}(\mathsf{N}^I \mathbin{\&} \mathsf{N}^I)$).

12.3) Soit X une hypercohérence et $A \in \mathcal{C}(X)$. En s'inspirant de l'idée de la "fonction de Gustave" (exercice précédent), montrer qu'il existe $G \in \mathcal{C}(\mathsf{N}^I)$ et γ fortement stable de N^I vers X telle que $\gamma(G) = A$. Montrer aussi que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathsf{qD}(X)$ alors il existe une suite croissante $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)$ et une fonction fortement stable γ de N^I vers X telle que $\gamma(z_n) = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour la question suivante, on notera qu'une fonction croissante $f : \mathsf{qD}(X) \to \mathsf{qD}(Y)$ est Scott continue si et seulement si elle commute aux unions des suites croissantes d'élements de $\mathsf{qD}(X)$ (il est inutile de considérer toutes les familles filtrantes, c'est dû au fait que $|X|$ est au plus dénombrable).

12.4) Soient X et Y des hypercohérences et $f : \mathsf{qD}(X) \to \mathsf{qD}(Y)$ une fonction. Montrer que f est fortement stable si et seulement si, pour toute fonction fortement stable γ de N^I vers X, la fonction $f \circ \gamma$ est fortement stable de N^I vers Y.

12.5) Si X est une hypercohérence, montrer qu'on définit un espace séquentiel $\mathsf{Seq}(X)$ en posant $\underline{\mathsf{Seq}(X)} = \mathsf{qD}(X)$ et en prenant pour $\widehat{\mathsf{Seq}(X)}$ l'ensemble des fonctions fortement stables de N^I vers X. Montrer que cette opération s'étend en un foncteur $\mathbf{FSlin_!} \to \mathbf{SeqSp}$ (envoyer un morphisme $s \in \mathbf{FSlin_!}(X,Y)$ sur $\mathsf{Fun}(s)$) et montrer que ce foncteur est fidèle (évident), plein (par la question précédente) et préserve la structure cartésienne fermée (commute au produit cartésien et à $\Rightarrow$).