Notes de cours de Master
MPRI 2 – 02
2017 - 2018
Lambda-calcul: syntaxe et sémantique

Preliminary version

Thomas Ehrhard
Preuves, Programmes, Systèmes (UMR 7126)
Université Paris Diderot – Paris 7 et CNRS
http://www.irif.fr/~ehrhard/

17 février 2018

Table des matières

On conseille de faire les exercices au fur et à mesure de la lecture (parfois, la solution d'un exercice se trouve plus loin dans le texte). Les exercices avec un astérisque sont à faire en priorité (ils sont simples, et servent à vérifier que les notions ont été comprises).

Nos principaux ouvrages de référence, dont ce cours s'inspire d'ailleurs largement, sont [Kri90], [GLT89] (épuisé, mais accessible sur la page Web d'Yves Lafont) et [AC98].

Notations et terminologie générales

Si I est un ensemble, $\mathcal{P}(I)$ est l'ensemble de ses parties et $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ est l'ensemble de ses parties finies et $\mathcal{P}^*_{\mathrm{fin}}(I)$ est l'ensemble des éléments non vides de $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(I)$. Si I est un ensemble, on note $\#I$ son cardinal.

Soient $s \subseteq A \times B$ et $t \subseteq B \times C$ des relations binaires. On note $t\,s \subseteq A \times C$ leur composée relationnelle, donnée par

$$t\,s = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B (a, b) \in s \text{ et } (b, c) \in t\}\,.$$

Si R est une relation binaire sur un sensemble S, on note R^* sa *clôture transitive et reflexive*, c'est-à-dire la plus petite relation binaire sur S contenant R qui est réflexive et transitive. On voit facilement que $a\ R^*\ b$ ssi on peut trouver une suite $a_1, \ldots, a_n \in S$ telle que $a_1 = a$, $a_n = b$ et $a_i\ R\ a_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.

Un *ensemble filtrant* est un ensemble non vide partiellement ordonné Γ tel que

$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma\ \exists \delta \in \Gamma \quad \gamma, \gamma' \leq \delta\,.$$

Si Γ et Δ sont des ensembles filtrants, alors $\Gamma \times \Delta$ (avec l'ordre produit) est aussi un ensemble filtrant. Une *famille filtrante* est une famille indexée par un ensemble filtrant.

On note $\mathbb{N}^+$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Chapitre 1

Syntaxe de PCF

On définit un lambda-calcul étendu, qui ressemble plus à un langage de programmation que le lambda-calcul pur : c'est le langage PCF (Programming with Computable Functions). Voir aussi [AC98], et [GLT89] qui parle du *système T* de Gödel, qui est similaire à PCF, avec un opérateur de “récursion primitive” moins expressif que l'opérateur de point fixe.

1.1 Syntaxe

On définit d'abord les types : ι est un type (le type des entiers), et si A et B sont des types, alors $A \to B$ est un type.

Les termes du langage PCF sont définis par la syntaxe suivante.

— Toute variable est un terme ;
— si P et Q sont des termes, x une variable et A un type, alors $\lambda x^A\, P$ et $(P)\, Q$ sont des termes ;
— si P est un terme, alors $\mathsf{fix}(P)$ est un terme ;
— si P, Q et R sont des termes et si z est une variable, alors $\mathsf{if}(P, Q, z \cdot R)$ est un terme ;
— si n est un entier naturel, alors $\underline{n}$ est un terme ;
— si P est un terme alors $\underline{\mathsf{succ}}(P)$ est un terme.

Remarque 1.1.1 La conditionnelle appelle un commentaire car elle diffère de celles habituellement considérée dans PCF, comme par exemple dans [AC98]. Nous allons donner une sémantique opérationnelle en appel par nom à cette version de PCF. La conditionnelle est habitellement donnée par une construction plus simple $\mathsf{if}(M, P, Q)$: on calcule M, si on obtient 0 on rend P et sinon on rend Q. Mais en appel par nom, la valeur de M est alors perdue. Bien sûr P et Q peuvent contenir d'autres copies de M mais chacune de ces copies nécessitera un nouveau calcul (toujours le même en fait) de la valeur de M. Dans la construction $\mathsf{if}(M, P, z \cdot Q)$ on calcule M, si on obtient $\underline{0}$ on rend P et si on obtient $\underline{n+1}$ on rend $Q\,[\underline{n}/z]$. Autrement dit, on a mis en mémoire la valeur de M et on peut la réutiliser dans la suite sans avoir à réévaluer M à chaque fois. Autrement dit encore, cette construction conditionnelle introduit une possibilité d'appel par valeur, restreinte au seul type de base. On verra que ce choix a une jutification sémantique très naturelle du point de vue de la logique linéaire, voir Section **??**.

Dans le terme $\lambda x^A\, M$, la variable x est liée. De même, dans $\mathsf{if}(M, P, z \cdot Q)$, la variable z est liée dans Q. Les termes de PCF sont donc considérés à α-conversion près, c'est-à-dire à renommage près des variables liées (attention, dans un tel renommage, il ne faut pas utiliser des variables libres dans le sous-terme associé au lieur considéré). Ce sont des difficultés superficielles que l'on peut régler en remplaçant les variables par des pointeurs ou des *indices de de Bruijn*.

Soit M un terme, $x_1, \dots, x_l$ des variables deux à deux distinctes. Soient $P_1, \dots, P_l$ des termes. On définit la *substitution parallèle* $M\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l]$ par récurrence sur M :

— $x_i\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] = P_i$

— $x\,[P_1/x_1,\ldots,P_l/x_l] = x$ si $x \notin \{x_1,\ldots,x_n\}$
— $\underline{n}\,[P_1/x_1,\ldots,P_l/x_l] = \underline{n}$
— $\underline{\mathsf{succ}}(M)\,[P_1/x_1,\ldots,P_l/x_l] = \underline{\mathsf{succ}}(M\,[P_1/x_1,\ldots,P_l/x_l])$
— the substituted term $\mathsf{if}(M,P,z\cdot Q)\,[P_1/x_1,\ldots,P_l/x_l]$ is defined as the term

$$\mathsf{if}(M\,[P_1/x_1,\ldots,P_l/x_l]\,,P\,[P_1/x_1,\ldots,P_l/x_l]\,,z\cdot Q\,[P_1/x_1,\ldots,P_l/x_l])$$

and one has to assume that z is not free in the P_i's (otherwise, apply an α-conversion for z in $\mathsf{if}(M,P,z\cdot Q)$)
— $(\lambda x^A\,P)\,[P_1/x_1,\ldots,P_l/x_l] = \lambda x^A\,(P\,[P_1/x_1,\ldots,P_l/x_l])$ and one has to assume that x is not free in the P_i's (otherwise, perform an α-conversion for the variable x)
— $\mathsf{fix}(P)\,[P_1/x_1,\ldots,P_l/x_l] = \mathsf{fix}((P\,[P_1/x_1,\ldots,P_l/x_l]))$.

1.2 Typage

Voici ensuite les règles de typage. Comme d'habitude, un contexte Γ est une suite $(x_1 : A_1,\ldots,x_l : A_l)$ où les x_i sont des variables deux à deux distinctes et où les A_i sont des types.

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash (M)\,N : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A\,M : A \to B} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to A}{\Gamma \vdash \mathsf{fix}(M) : A}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \underline{n} : \iota} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \iota}{\Gamma \vdash \underline{\mathsf{succ}}(M) : \iota}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \iota \qquad \Gamma \vdash P : A \qquad \Gamma, z : \iota \vdash Q : A}{\Gamma \vdash \mathsf{if}(M,P,z\cdot Q) : A}$$

Remarque 1.2.1 Etant donnés un contexte de typage Γ et un terme M, il existe au plus un type A tel que $\Gamma \vdash M : A$. De plus la dérivation de typage qui mène à la conclusion $\Gamma \vdash M : A$ est unique et totalement déterminée par M. C'est pour obtenir cet effet que nous avons indiqué le type de la variable dans la construction $\lambda x^A\,M$.

1.2.1 Usual conditional. In the usual presentations of PCF, one uses another conditional $\mathsf{if}_{\mathrm{u}}(M,P,Q)$ with the following typing rule :

$$\frac{\Gamma \vdash M : \iota \qquad \Gamma \vdash P : A \qquad \Gamma : \iota \vdash Q : A}{\Gamma \vdash \mathsf{if}_{\mathrm{u}}(M,P,Q) : A}$$

Of course this conditional can be defined using ours as follows :

$$\mathsf{if}_{\mathrm{u}}(M,P,Q) = \mathsf{if}(M,P,z\cdot Q)$$

where z does not occur free in Q.

1.3 Réduction.

On définit une relation de *réduction* β sur les termes de PCF, suivant le même schéma que pour la beta-réduction du lambda-calcul. On définit donc, par récurrence sur M, l'ensemble des termes M' tels que $M\ \beta\ M'$.

$$\frac{}{\left(\lambda x^A\,M\right)N\ \beta\ M\,[N/x]}$$

$$\frac{}{\mathsf{fix}(M)\ \beta\ (M)\,\mathsf{fix}(M)}$$

$$\frac{}{\mathsf{if}(\underline{0}, P, z \cdot Q)\ \beta\ P} \qquad \frac{}{\mathsf{if}(\underline{n+1}, P, z \cdot Q)\ \beta\ Q\,[\underline{n}/z]}$$

$$\frac{}{\underline{\mathsf{succ}}(\underline{n})\ \beta\ \underline{n+1}}$$

$$\frac{M\ \beta\ M'}{(M)\,N\ \beta\ (M')\,N} \qquad \frac{N\ \beta\ N'}{(M)\,N\ \beta\ (M)\,N'}$$

$$\frac{M\ \beta\ M'}{\mathsf{fix}(M)\ \beta\ \mathsf{fix}(M')}$$

$$\frac{M\ \beta\ M'}{\mathsf{if}(M, P, z \cdot Q)\ \beta\ \mathsf{if}(M', P, z \cdot Q)}$$

$$\frac{P\ \beta\ P'}{\mathsf{if}(M, P, z \cdot Q)\ \beta\ \mathsf{if}(M, P', z \cdot Q)} \qquad \frac{Q\ \beta\ Q'}{\mathsf{if}(M, P, z \cdot Q)\ \beta\ \mathsf{if}(M, P, z \cdot Q')}$$

$$\frac{M\ \beta\ M'}{\underline{\mathsf{succ}}(M)\ \beta\ \underline{\mathsf{succ}}(M')}$$

Remarque 1.3.1 Autrement dit, dans PCF, un redex est un terme de l'une des formes suivantes :
— $\left(\lambda x^A\, R\right) Q$ qui se réduit en $R\,[Q/x]$,
— $\mathsf{fix}(P)$ qui se réduit en $(P)\,\mathsf{fix}(P)$,
— $\mathsf{if}(\underline{n}, P, z \cdot Q)$ avec $n \in \mathbb{N}$, qui se réduit en P si $n = 0$ et en $Q\,[\underline{n-1}/z]$ si $n > 0$,
— $\underline{\mathsf{succ}}(\underline{n})$ qui se réduit en $\underline{n+1}$,
Et on a $M\ \beta\ M'$ si on obtient M' en choisissant dans M un redex (en une position quelconque) et en le réduisant.

Exercice 1.3.1 Essayer de démontrer un théorème de confluence pour (la clôture réflexive-transitive de) cette réduction.

1.3.1 Réduction de tête (faible). On définit de même la *réduction de tête faible* β_{wh} ("faible" signifie qu'on ne réduit jamais sous un λ).

$$\frac{}{\left(\lambda x^A\, M\right) N\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M\,[N/x]}$$

$$\frac{}{\mathsf{fix}(M)\ \beta_{\mathsf{wh}}\ (M)\,\mathsf{fix}(M)}$$

$$\frac{}{\mathsf{if}(\underline{0}, P, z \cdot Q)\ \beta_{\mathsf{wh}}\ P} \qquad \frac{}{\mathsf{if}(\underline{n+1}, P, z \cdot Q)\ \beta_{\mathsf{wh}}\ Q\,[\underline{n}/z]}$$

$$\frac{}{\underline{\mathsf{succ}}(\underline{n})\ \beta_{\mathsf{wh}}\ \underline{n+1}}$$

$$\frac{M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M'}{(M)\,N\ \beta_{\mathsf{wh}}\ (M')\,N}$$

$$\frac{M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M'}{\mathsf{if}(M, P, z \cdot Q)\ \beta_{\mathsf{wh}}\ \mathsf{if}(M', P, z \cdot Q)}$$

$$\frac{M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M'}{\underline{\mathsf{succ}}(M)\ \beta_{\mathsf{wh}}\ \underline{\mathsf{succ}}(M')}$$

Remarque 1.3.2 On a $\beta_{\mathsf{wh}} \subseteq \beta$. Observer que β_{wh} est une *stratégie de réduction*, c'est-à-dire que, étant donné un terme de PCF M, ou bien M est en “forme normale de tête” (non réductible au sens de β_{wh}), ou bien M contient exactement un redex tel que $M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M'$.

Lemme 1.3.3 *Soit M un terme de* PCF*. Il existe des variables $x_1, \dots, x_n$, un terme H et des termes $P_1, \dots, P_l$ (avec $l \geq 0$) de* PCF *tels que*

— $M = \lambda {x_1}^{A_1} \dots \lambda {x_n}^{A_n}\,(H)\,P_1 \cdots P_l$

— *H n'est pas de la forme $\lambda x^A\, R$*

— *Si $H = (Q)\,P$, alors $Q = \lambda x^A\, R$*

De plus, cette écriture de M est unique, on l'appelle forme canonique *de M. On appelle H le* terme de tête *de M.*

Démonstration. Simple récurrence sur M. □

Proposition 1.3.4 *Si $\vdash M : \iota$ et M est β_{wh}-normal, alors $M = \underline{k}$ pour un $k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Par le lemme 1.3.3, on peut écrire $M = \lambda {x_1}^{A_1} \dots \lambda {x_n}^{A_n}\,(H)\,P_1 \cdots P_l$, la forme canonique de M. Comme $\vdash M : \iota$, on a $n = 0$ et les termes $H, P_1, \dots, P_l$ sont tous clos. De plus, on peut trouver des types $B_1, \dots, B_l$ tels que

$$\vdash H : B_1 \to \cdots \to B_l \to \iota \quad \text{et} \quad \forall i\ \vdash P_i : B_i\,.$$

Or H ne peut pas être une abstraction, puisque c'est un terme de tête. H ne peut pas être de la forme $\mathsf{fix}(Q)$ ou $\big(\lambda x^A\, R\big)\, P$ puisque M est β_{wh}-normal. Et H ne peut pas être une variable puisqu'il est clos. Donc H est de l'une des formes suivantes :

— $H = \underline{k}$, et dans ce cas on a $l = 0$ et la preuve est terminée.

— $H = \mathsf{if}(P, Q, z \cdot R)$ et on a $\vdash P : \iota$ et P est β_{wh}-normal. Par hypothèse de récurrence, $P = \underline{k}$ pour un $k \in \mathbb{N}$, ce qui contredit l'hypothèse que M est β_{wh}-normal.

— $H = \underline{\mathsf{succ}}(P)$ et on a $\vdash P : \iota$ et P est β_{wh}-normal. Par hypothèse de récurrence, $P = \underline{k}$ pour un $k \in \mathbb{N}$, ce qui contredit l'hypothèse que M est β_{wh}-normal. □

Exercice 1.3.2 Ecrire un terme clos M tel que $\vdash M : \iota \to \iota$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait $(M)\,\underline{p}\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{2p}$.

Ecrire un terme clos M tel que $\vdash M : \iota \to \iota \to \iota$ tel que $\big((M)\,\underline{p}\big)\,\underline{q}\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{p+q}$.

Ecrire un terme clos M tel que $\vdash M : (\iota \to \iota) \to \iota$ qui (intuitivement) prend une fonction f de type $\iota \to \iota$ et rend le plus petit entier n tel que $f(n) = 0$, s'il en existe un (sinon, le programme peut boucler).

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction partielle et soit $D \subseteq \mathbb{N}$ son domaine de définition. Soit M un terme clos tel que $\vdash M : \iota \to \iota$. On dit que M représente f si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

— si $n \in D$ alors $(M)\,\underline{n}\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{f(n)}$

— si $n \notin D$ alors la β_{wh}-réduction ne termine pas sur $(M)\,\underline{n}$.

Théorème 1.3.5 *Une fonction partielle $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est représentable par un terme clos de* PCF *de type $\iota \to \iota$ si et seulement si f est une fonction récursive partielle.*

La preuve n'est pa difficile mais supposerait d'introduire du matériel supplémentaire. On peut donc voir PCF comme une extension de la notion de fonction récursive partielle à l'ordre supérieur.

1.3.2 Exemples de programmes

La fonction prédécesseur :

$$\mathsf{pred} = \lambda x^\iota\ \mathsf{if}(x, \underline{0}, z \cdot z) \quad \text{et on a} \quad \vdash \mathsf{pred} : \iota \to \iota$$

L'addition :

$$\mathsf{add} = \lambda x^\iota\ \mathsf{fix}(\lambda a^{\iota \to \iota}\ \lambda y^\iota\ \mathsf{if}(y, x, z \cdot \underline{\mathsf{succ}}((a)\,z)))$$
$$\text{et on a} \quad \vdash \mathsf{add} : \iota \to (\iota \to \iota)$$

La fonction exponentielle $n \mapsto 2^n$:

$$\mathsf{exp} = \mathsf{fix}(\lambda e^{\iota\to\iota}\,\lambda x^\iota\,\mathsf{if}(x, \underline{1}, z\cdot(\mathsf{add})\,(e)\,z\;(e)\,z))$$
$$\text{et on a}\quad \vdash \mathrm{exp}_{:}\,\iota \to \iota$$

Une fonction pour comparer des entiers :

$$\mathsf{cmp} = \mathsf{fix}(\lambda c^{\iota\to(\iota\to\iota)}\,\lambda x^\iota\,\lambda y^\iota\,\mathsf{if}(x, \underline{0}, z\cdot \mathsf{if}(y, \underline{1}, z'\cdot(c)\,z\,z')))$$
$$\text{et on a}\quad \vdash \mathsf{cmp} : \iota \to (\iota \to \iota)$$

Une fonction qui cherche le premier entier où une fonction de type $\iota \to \iota$, passée en argument, s'annule :

$$\lambda f^{\iota\to\iota}\,(\mathsf{fix}(\lambda g^{\iota\to\iota}\,\lambda x^\iota\,\mathsf{if}((f)\,x, x, z\cdot(g)\,\underline{\mathsf{succ}}(x))))\,\underline{0}$$

On peut introduire une construction "let" qui permet de mettre en mémoire des valeurs entières (mais pas des valeurs quelconques, attention). Il fuffit de poser

$$\mathsf{let}\ x\ \mathsf{be}\ M\ \mathsf{in}\ N = \mathsf{if}(M, N\,[\underline{0}/x]\,, z\cdot N\,[\underline{\mathsf{succ}}(z)/x])$$

et alors la règle de typage suivante est dérivable :

$$\frac{\Gamma \vdash M : \iota \qquad \Gamma, x : \iota \vdash N : A}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\ x\ \mathsf{be}\ M\ \mathsf{in}\ N : A}$$

1.3.3 Réduction du sujet et propriété fondamentale de la réduction de tête.

Lemme 1.3.6 (substitution) *Soient $P, Q \in \mathsf{PCF}$. Si $\Gamma, x : A \vdash P : B$ et si $\Gamma \vdash Q : A$, alors $\Gamma \vdash P\,[Q/x] : B$.*

Proposition 1.3.7 (réduction du sujet) *Soit $M \in \mathsf{PCF}$. Si $\Gamma \vdash M : A$ et $M\ \beta\ M'$, alors $\Gamma \vdash M' : A$.*

Exercice 1.3.3 Démontrer le lemme de substitution puis la réduction du sujet.

1.3.4 Equivalences entre termes Une question naturelle est de savoir quand deux termes clos sont équivalents en tant que programmes. La β-réduction nous fournit une première réponse : on peut dire que deux termes clos M et M' sont équivalents si $\vdash M : A$ et $\vdash M' : A$ pour un type A (ils ont le même type) et si $M \sim_\beta M'$ où $\sim_\beta$ est la clôture réflexive, symétrique et transitive de β (modulo un théorème de confluence qu'il faudrait prouver, cela revient à dire que M et M' ont un réduit commun pour β).

Cependant, cette notion d'équivalence est beaucoup trop faible. Par exemple, les deux termes suivants sont manifestement identiques comme programmes, mais ne sont pas équivalent au sens de $\sim_\beta$:

$$G = \lambda x^\iota\,\lambda y^\iota\,\mathsf{if}(x, \mathsf{if}(y, \underline{0}, z\cdot\underline{1}), z\cdot\underline{1}) \text{ et } D = \lambda y^\iota\,\lambda x^\iota\,\mathsf{if}(x, \mathsf{if}(y, \underline{0}, z\cdot\underline{1}), z\cdot\underline{1})\,.$$

Soient M et N deux termes de PCF clos de type A. On écrira $M \sqsubseteq_{\mathrm{obs}} N$ si, pour tout terme clos C de type $A \to \iota$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad (C)\,M\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{k} \Rightarrow (C)\,N\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{k}\,.$$

Clairement, $\sqsubseteq_{\mathrm{obs}}$ est une relation de préordre sur les termes clos de type A. On note $\simeq_{\mathrm{obs}}$ la relation d'équivalence associée. Autrement dit $M \simeq_{\mathrm{obs}} M'$ si $M \sqsubseteq_{\mathrm{obs}} M'$ et $M' \sqsubseteq_{\mathrm{obs}} M$, c'est-à-dire, pour tout terme clos C de type $A \to \iota$ et tout entier k, on a $(C)\,M\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{k}$ si et seulement si $(C)\,M'\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{k}$. Intuitivement, cela signifie que M et M' sont interchangeables en tant que sous-programme de n'importe quel programme C qui produit un résultat observable (ici, un entier). Il n'est pas complètement trivial de prouver que $G \sim_\beta D$, mais c'est néanmoins vrai.

De façon générale, il est très difficile de prouver que deux programmes sont observationnellement équivalents, à cause de la quantification universelle sur tous les "contextes" C. On va voir que la sémantique dénotationnelle donne un moyen puissant.

En utilisant la confluence de β on montrerait facilement que $M \sim_\beta M' \Rightarrow M \simeq_{\mathrm{obs}} M'$ mais la sémantique nous donnera aussi une preuve très simple de ce fait.

Chapitre 2

PCF with lazy integers

In PCF, integers are "strict" in the sense that they are either undefined or completely evaluated. It is however possible to deal with integers in a lazy way, that is, to deal with partially defined integers. The syntax of this variant LPCF of PCF is defined as follows.

$$M, N \ldots := x \mid \underline{0} \mid \underline{\mathsf{succ}}(M) \mid \mathsf{if}(M, N, x \cdot P) \mid (M)\, N \mid \lambda x^A\, M \mid \mathsf{fix}\, x^A \cdot M\,.$$

The typing rules are exactly the same as those of PCF, we record them for completeness.

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash (M)\, N : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A\, M : A \to B} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash M : A}{\Gamma \vdash \mathsf{fix}\, x^A \cdot M : A}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \underline{0} : \iota} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \iota}{\Gamma \vdash \underline{\mathsf{succ}}(M) : \iota}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \iota \qquad \Gamma \vdash P : A \qquad \Gamma, z : \iota \vdash Q : A}{\Gamma \vdash \mathsf{if}(M, P, z \cdot Q) : A}$$

2.1 Reduction

Just as for PCF, we define a reduction relation by means of "deduction rules"

$$\frac{}{\big(\lambda x^A\, M\big)\, N \;\beta\; M\,[N/x]}$$

$$\frac{}{\mathsf{fix}\, x^A \cdot M \;\beta\; M\,\big[\mathsf{fix}\, x^A \cdot M/x\big]}$$

$$\frac{}{\mathsf{if}(\underline{0}, P, z \cdot Q) \;\beta\; P} \qquad \frac{}{\mathsf{if}(\underline{\mathsf{succ}}(M), P, z \cdot Q) \;\beta\; Q\,[M/z]}$$

$$\frac{M \;\beta\; M'}{\underline{\mathsf{succ}}(M) \;\beta\; \underline{\mathsf{succ}}(M')}$$

$$\frac{M \;\beta\; M'}{(M)\, N \;\beta\; (M')\, N} \qquad \frac{N \;\beta\; N'}{(M)\, N \;\beta\; (M)\, N'}$$

$$\frac{M \;\beta\; M'}{\mathsf{fix}\, x^A \cdot M \;\beta\; \mathsf{fix}\, x^A \cdot M'}$$

$$\frac{M\ \beta\ M'}{\mathsf{if}(M, P, z\cdot Q)\ \beta\ \mathsf{if}(M', P, z\cdot Q)}$$

$$\frac{P\ \beta\ P'}{\mathsf{if}(M, P, z\cdot Q)\ \beta\ \mathsf{if}(M, P', z\cdot Q)} \qquad \frac{Q\ \beta\ Q'}{\mathsf{if}(M, P, z\cdot Q)\ \beta\ \mathsf{if}(M, P, z\cdot Q')}$$

Remarque 2.1.1 In other words in LPCF, a redex si a term of one of the following shapes :
— $\left(\lambda x^A\, R\right) Q$ which reduces to $R\,[Q/x]$,
— $\mathsf{fix}\, x^A \cdot P$ which reduces to $P\left[\mathsf{fix}\, x^A \cdot P/x\right]$,
— $\mathsf{if}(\underline{0}, P, z\cdot Q)$ which reduces to P,
— $\mathsf{if}(\underline{\mathsf{succ}}(M), P, z\cdot Q)$ which reduces to $Q\,[M/z]$.
And $M\ \beta\ M'$ if one gets M' by chosing anywhere in M a redex and replacing it with its reduced form. The main difference wrt. PCF is that, in the conditional construct, the predecessor of an integer its passed to the term in the right branch without being evaluated.

As usual we set $\Omega^A = \mathsf{fix}\, x^A \cdot x$ which is a closed term such that $\vdash \Omega^A : A$, the ever-looping term of type A.

2.1.1 Weak head reduction.

We define similarly a *weak head reduction* β_{wh} ("weak" means that one cannot reduce under λs).

$$\frac{}{\left(\lambda x^A\, M\right) N\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M\,[N/x]}$$

$$\frac{}{\mathsf{fix}\, x^A \cdot M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M\left[\mathsf{fix}\, x^A \cdot M/x\right]}$$

$$\frac{}{\mathsf{if}(\underline{0}, P, z\cdot Q)\ \beta_{\mathsf{wh}}\ P} \qquad \frac{}{\mathsf{if}(\underline{\mathsf{succ}}(M), P, z\cdot Q)\ \beta_{\mathsf{wh}}\ Q\,[M/z]}$$

$$\frac{M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M'}{(M)\, N\ \beta_{\mathsf{wh}}\ (M')\, N}$$

$$\frac{M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M'}{\mathsf{if}(M, P, z\cdot Q)\ \beta_{\mathsf{wh}}\ \mathsf{if}(M', P, z\cdot Q)}$$

Remarque 2.1.2 One has $\beta_{\mathsf{wh}} \subseteq \beta$. Observe that β_{wh} is a *reduction strategy*, meaning that, given an LPCF term M, either M is a "head normal form" (non reducible for β_{wh}), or M contains exactly one redex such that $M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M'$ for an LPCF term M', which is uniquely determined.

In particular we cannot add the reduction rule

$$\frac{M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M'}{\underline{\mathsf{succ}}(M)\ \beta_{\mathsf{wh}}\ \underline{\mathsf{succ}}(M')}$$

as othewise a term like $M = \mathsf{if}(\underline{\mathsf{succ}}(\Omega^\iota), \underline{0}, z\cdot \underline{\mathsf{succ}}(\underline{0}))$ would be reducible in two different ways. With our definition of β_{wh} the only possible reduction is $M \beta_{\mathsf{wh}}\, \underline{\mathsf{succ}}(\underline{0})$. This example illustrates the lazyness of the language : we don't need to know anything about the term P to say that the term $\underline{\mathsf{succ}}(P)$ represents a non-zero integer.

2.1.2 Subject reduction and confluence

Proposition 2.1.3 *Assume that $\Gamma \vdash M : A$ and the $M\ \beta\ M'$. Then $\Gamma \vdash M' : A$.*

This is proven by induction on the derivation of the fact that $M\ \beta\ M'$, using the following substitution lemma.

Lemme 2.1.4 *If $\Gamma, x : A \vdash M : B$ and $\Gamma \vdash M : A$, then $\Gamma \vdash M\,[N/x] : B$.*

This is proven by induction on the typing derivation of M (that is, on M).

It is useful to know that the reduction β satisfies the Church-Rosser property :

Théorème 2.1.5 *If $M\ \beta^*\ M_i$ for $i = 1, 2$, there exists M' such that $M_i\ \beta^*\ M'$ for $i = 1, 2$. That is : the relation β^* satisfies the* Diamond Property.

The Tait-Martin-Löf method consists in defining an auxiliary notion of *parallel reduction* ρ by the following rules.

$$\frac{}{\underline{0}\ \rho\ \underline{0}} \qquad \frac{}{x\ \rho\ x}$$

$$\frac{M\ \rho\ M' \qquad N\ \rho\ N'}{\left(\lambda x^A\, M\right) N\ \rho\ M'\,[N'/x]} \qquad \frac{M\ \rho\ M'}{\lambda x^A\, M\ \rho\ \lambda x^A\, M'}$$

$$\frac{M\ \rho\ M'}{\mathsf{fix}\, x^A \cdot M\ \rho\ M'\left[\mathsf{fix}\, x^A \cdot M'/x\right]}$$

$$\frac{P\ \rho\ P'}{\mathsf{if}(\underline{0}, P, z \cdot Q)\ \rho\ P'} \qquad \frac{Q\ \rho\ Q' \qquad M\ \rho\ M'}{\mathsf{if}(\underline{\mathsf{succ}}(M), P, z \cdot Q)\ \rho\ Q'\,[M'/z]}$$

$$\frac{M\ \rho\ M'}{\underline{\mathsf{succ}}(M)\ \rho\ \underline{\mathsf{succ}}(M')}$$

$$\frac{M\ \rho\ M' \qquad N\ \rho\ N'}{(M)\, N\ \rho\ (M')\, N'}$$

$$\frac{M\ \rho\ M'}{\mathsf{fix}\, x^A \cdot M\ \rho\ \mathsf{fix}\, x^A \cdot M'}$$

$$\frac{M\ \rho\ M' \qquad P\ \rho\ P' \qquad Q\ \rho\ Q'}{\mathsf{if}(M, P, z \cdot Q)\ \rho\ \mathsf{if}(M', P', z \cdot Q')}$$

If $M\ \rho\ M'$ then M' is obtained from M by reducing an arbitrary number of redexes *which are already present in* M. In other words, one is not allowed to reduce redexes which have have been created by a β-reduction in the same ρ reduction step.

Exercice 2.1.1 Give examples of two terms M and M' such that $M\ \beta^*\ M'$ but not $M \rho M'$.

Exercice 2.1.2 Check that $M\ \rho\ M$ for all term M. Prove that $\beta \subseteq \rho \subseteq \beta^*$. Conclude that $\rho^* = \beta^*$.

Exercice 2.1.3 Prove that, if a relation γ satisfies the Diamond Property, then its reflexive-transitive closure γ^* satisfies also the Diamond Property.

So it suffices to prove that the relation ρ satisfies the Diamond Property.

Exercice 2.1.4 Assume that $\Gamma, x : A \vdash M : B$ and $\Gamma \vdash N : A$ and assume that $M\ \rho\ M'$ and $N\ \rho\ N'$. Prove by induction on M that $M\,[N/x]\ \rho\ M'\,[N'/x]$.

Exercice 2.1.5 Prove that ρ satisfies the Diamond Property. That is : Assume that $\Gamma \vdash M : A$ and that $M\ \rho\ M_i$ for $i = 1, 2$. Prove that there is a term R such that $M_i\ \rho\ R$ for $i = 1, 2$. The proof is by induction on M. For each induction step, one has to consider all possible ρ-deduction rules which apply. For instance, if $M = (P)\, Q$, we have the following possibilities :

— $P\ \rho\ P_i$ and $Q\ \rho\ Q_i$ for $i = 1, 2$, with $M_i = (P_i)\, Q_i$.

— $P = \lambda x^B\, H$, $H\ \rho\ H_i$, $Q\ \rho\ Q_i$, $M_1 = H_1\,[Q_1/x]$ and $M_2 = \left(\lambda x^B\, H_2\right) Q_2$.

— A case symmetric to the previous one, swapping 1 and 2.
— $P = \lambda x^{B \to A}\, H$, $H\ \rho\ H_i$, $Q\ \rho\ Q_i$, $M_i = H_i\,[Q_i/x]$ for $i = 1, 2$.
In each case one applies the inductive hypothesis and the result of Exercise 2.1.4 in all cases but the first one.

The other inductive steps are dealt with similarly, the most important being the following ones :
— $M = \mathsf{if}(N, P, x \cdot Q)$ and then the main sub-case is when $N = \underline{\mathsf{succ}}(H)$
— $M = \mathsf{fix}\, x^A \cdot N$.
The other ones are routine.

As usual one of the main consequences of confluence is that, when a term normalizes, it has a unique normal form. Typically, if $\vdash M : \iota$, then either M has no β-normal form, or there is a unique integer n such that $M\ \beta^*\ \underline{n}$.

Also, defining $\sim_\beta$ as the least equivalence relation on terms which contains β, we can deduce from confluence that, if $\Gamma \vdash M : A$ and $\Gamma \vdash M' : A$, then $M \sim_\beta M'$ iff there exists a term N such that $M\ \beta^*\ N$ and $M'\ \beta^*\ N$.

2.1.3 Examples For any type A, we have defined $\Omega^A = \mathsf{fix}\, x^A \cdot x$ which satisfies $\vdash \Omega^A : A$ and $\Omega^A\ \beta_{\mathsf{wh}}\ \Omega^A$: it represents the ever-looping program of type A.

Given $n \in \mathbb{N}$ and a term M such that $\Gamma \vdash M : \iota$, we define $\mathsf{succ}^n(M)$ such that $\Gamma \vdash \mathsf{succ}^n(M) : \iota$ by $\mathsf{succ}^0(M) = M$ and $\mathsf{succ}^{n+1}(M) = \underline{\mathsf{succ}}(\mathsf{succ}^n(M))$.

The integer n is represented by $\underline{n} = \mathsf{succ}^n(\underline{0})$. We have various ways of defining an addition function. A first solution is

$$\mathsf{radd} = \lambda x^\iota\, \mathsf{fix}\, a^{\iota \to \iota} \cdot \lambda y^\iota\, \mathsf{if}(y, x, z \cdot \underline{\mathsf{succ}}((a)\, z))$$

then we have $(\mathsf{radd})\, M\, \underline{n}\ \beta^*\ \mathsf{succ}^n(M)$ for any term M such that $\Gamma \vdash M : \iota$, so that in particular $(\mathsf{radd})\, \underline{m}\, \underline{n}\ \beta^*\ \underline{m+n}$. Observe that $(\mathsf{radd})\, M\, (\mathsf{succ}^n(\Omega^\iota))\ \beta^*\ \mathsf{succ}^n(\Omega)$ where Ω is a term which does not β_{wh}-normalize.

A different algorithm, which swaps its arguments at each recursive call is

$$\mathsf{add} = \mathsf{fix}\, a^{\iota \to \iota \to \iota} \cdot \lambda x^\iota\, \lambda y^\iota\, \mathsf{if}(y, x, z \cdot \underline{\mathsf{succ}}((a)\, z\, x))$$

Here is a function which computes the greatest lower bound of two integers

$$\mathsf{min} = \mathsf{fix}\, f^{\iota \Rightarrow \iota \Rightarrow \iota} \cdot \lambda x^\iota\, \lambda y^\iota\, \mathsf{if}(x, \underline{0}, x' \cdot \mathsf{if}(y, \underline{0}, y' \cdot \underline{\mathsf{succ}}((f)\, x'\, y')))$$

Exercice 2.1.6 Prove that $(\mathsf{min})\, \underline{m}\, \mathsf{succ}^n(M)\ {\beta_{\mathsf{wh}}}^*\ \underline{m}$ and $(\mathsf{min})\, \mathsf{succ}^n(M)\, \underline{m}\ {\beta_{\mathsf{wh}}}^*\ \underline{m}$ as soon as $m \leq n$.

Exercice 2.1.7 Consider the term :

$$\mathsf{it} = \lambda f^{A \to A}\, \lambda x^A\, \mathsf{fix}\, F^{\iota \to A} \cdot \lambda y^\iota\, \mathsf{if}(y, x, y' \cdot (f)\, ((F)\, y'))$$

Prove that $\vdash \mathsf{it} : (A \to A) \to A \to \iota \to A$ and explain the beavior of it.

Let $\underline{\infty} = \mathsf{fix}\, z^\iota \cdot \underline{\mathsf{succ}}(z)$. Let $M = \lambda f^{A \to A}\, (\mathsf{it})\, f\, \Omega^A\, \underline{\infty}$. Check that $\vdash M : (A \to A) \to A$ and that M behaves exactly like $\lambda f^{A \to A}\, \mathsf{fix}\, x^A \cdot (f)\, x$.

Chapitre 3

A call-by-push-value programming language

We introduce now a programming language, more general than PCF, and similar to Paul Levy's call-by-push-value lambda-calculus. We call this language Λ_{HP} (for the time being) because it corresponds to a kind of "half-polarized" linear logic.

3.1 Syntax and typing

Types are given by the following BNF syntax. We define by mutual induction two kinds of types : *positive types* (denoted with letters φ, ψ...) and *general types* (denoted with letters σ, τ...), given type variables ζ, ξ... :

$$\varphi, \psi, \ldots := {!\sigma} \mid \varphi \otimes \psi \mid \varphi \oplus \psi \mid \zeta \mid \mathsf{Fix}\,\zeta \cdot \varphi \tag{3.1}$$

$$\sigma, \tau \ldots := \varphi \mid \varphi \multimap \sigma \mid \top \tag{3.2}$$

We consider the types up to the equation $\mathsf{Fix}\,\zeta \cdot \varphi = \varphi\,[\mathsf{Fix}\,\zeta \cdot \varphi/\zeta]$.

Terms are given by the following BNF syntax, given variables $x, y, \ldots$.

$$\begin{aligned} M, N \ldots := {} & x \mid M^{!} \mid \langle M, N\rangle \mid \mathsf{in}_1 M \mid \mathsf{in}_2 M \\ & \mid \lambda x^{\varphi}\, M \mid \langle M\rangle N \mid \mathsf{case}(M, x_1 \cdot N_1, x_2 \cdot N_2) \\ & \mid \mathsf{pr}_1 M \mid \mathsf{pr}_2 M \mid \mathsf{der}(M) \mid \mathsf{fix}\, x^{!\sigma}\, M \end{aligned}$$

This calculus can be seen as a special case of Levy's CBPV [Lev02] in which the type constructor F is the identity (and U is "!").

The notion of substitution is defined as usual. We give now the typing rules for these terms. A typing context is an expression $\mathcal{P} = (x_1 : \varphi_1, \ldots, x_k : \varphi_k)$ where all types are positive and the x_is are pairwise distinct variables.

$$\frac{\mathcal{P} \vdash M : \sigma}{\mathcal{P} \vdash M^{!} : {!\sigma}} \qquad \frac{\mathcal{P} \vdash M_1 : \varphi_1 \qquad \mathcal{P} \vdash M_2 : \varphi_2}{\mathcal{P} \vdash \langle M_1, M_2\rangle : \varphi_1 \otimes \varphi_2} \qquad \frac{\mathcal{P} \vdash M : \varphi_i}{\mathcal{P} \vdash \mathsf{in}_i M : \varphi_1 \oplus \varphi_2}$$

$$\frac{}{\mathcal{P}, x : \varphi \vdash x : \varphi} \qquad \frac{\mathcal{P}, x : \varphi \vdash M : \sigma}{\mathcal{P} \vdash \lambda x^{\varphi}\, M : \varphi \multimap \sigma} \qquad \frac{\mathcal{P} \vdash M : \varphi \multimap \sigma \qquad \mathcal{P} \vdash N : \varphi}{\mathcal{P} \vdash \langle M\rangle N : \sigma}$$

$$\frac{\mathcal{P} \vdash M : {!\sigma}}{\mathcal{P} \vdash \mathsf{der}(M) : \sigma} \qquad \frac{\mathcal{P}, x : {!\sigma} \vdash M : \sigma}{\mathcal{P} \vdash \mathsf{fix}\, x^{!\sigma}\, M : \sigma}$$

$$\frac{\mathcal{P} \vdash M : \varphi_1 \oplus \varphi_2 \qquad \mathcal{P}, x_1 : \varphi_1 \vdash M_1 : \sigma \qquad \mathcal{P}, x_2 : \varphi_2 \vdash M_2 : \sigma}{\mathcal{P} \vdash \mathsf{case}(M, x_1 \cdot M_1, x_2 \cdot M_2) : \sigma}$$

$$\frac{\mathcal{P} \vdash M : \varphi_1 \otimes \varphi_2}{\mathcal{P} \vdash \mathsf{pr}_i M : \varphi_i}$$

Remarque 3.1.1 It might seem strange to the reader acquainted with LL that the rules introducing the $\otimes$ connective and eliminating the $\multimap$ connective have an "additive" handling of typing contexts (the same typing context $\mathcal{P}$ occurs in both premises). The reason for this becomes clear in Section 4.6 where positive types are interpreted as !-coalgebras, which are equipped with morphisms allowing to interpret the structural rules of weakening and contraction. This is why typing contexts involve positive types only.

The next lemma is a simple observation.

Lemme 3.1.2 *Let $\mathcal{P}$ be a typing context and M be a term. There is at most one type σ and one typing derivation of the judgment $\mathcal{P} \vdash M : \sigma$.*

One says that typing is *syntax driven*. Concretely this means that when a term M is typeable, the corresponding typing derivation is isomorphic to M.

Proposition 3.1.3 (Substitution Lemma for types) *Assume that $\mathcal{P}, x : \varphi \vdash M : \sigma$ and $\mathcal{P} \vdash N : \varphi$. Then $\mathcal{P} \vdash M\,[N/x] : \sigma$.*

Exercice 3.1.1 Prove this lemma (simple induction on M).

3.2 Weak reduction

We define now a *weak* reduction relation on terms, meaning that we never reduce within a "box" $M^!$ or under a λ. We first define the notion of *value* as follows :

— any variable x is a value

— for any term M, the term $M^!$ is a value

— if M is a value then $\mathsf{in}_i M$ is a value for $i = 1, 2$

— if M_1 and M_2 are values then $\langle M_1, M_2 \rangle$ is a value.

Remarque 3.2.1 A closed value is simply a tree whose leaves are "boxes" or "thunks" $M^!$ (where the M's are arbitrary well typed closed terms) and whose internal nodes are either unary nodes bearing an index 1 or 2, or ordered binary nodes.

We use letters V, $W \ldots$ to denote values. Our reduction relation is defined as follows.

$$\frac{}{\mathsf{der}(M^!) \rightarrow_{\mathsf{w}} M} \qquad \frac{}{\langle \lambda x^{\varphi}\, M \rangle V \rightarrow_{\mathsf{w}} M\,[V/x]} \qquad \frac{}{\mathsf{pr}_i \langle V_1, V_2 \rangle \rightarrow_{\mathsf{w}} V_i}$$

$$\frac{}{\mathsf{fix}\, x^{!\sigma}\, M \rightarrow_{\mathsf{w}} M\left[(\mathsf{fix}\, x^{!\sigma}\, M)^!/x\right]} \qquad \frac{M \rightarrow_{\mathsf{w}} M'}{\mathsf{der}(M) \rightarrow_{\mathsf{w}} \mathsf{der}(M')}$$

$$\frac{M \rightarrow_{\mathsf{w}} M'}{\langle M \rangle N \rightarrow_{\mathsf{w}} \langle M' \rangle N} \qquad \frac{N \rightarrow_{\mathsf{w}} N'}{\langle M \rangle N \rightarrow_{\mathsf{w}} \langle M \rangle N'}$$

$$\frac{M \rightarrow_{\mathsf{w}} M'}{\mathsf{pr}_i M \rightarrow_{\mathsf{w}} \mathsf{pr}_i M'} \qquad \frac{M_1 \rightarrow_{\mathsf{w}} M_1'}{\langle M_1, M_2 \rangle \rightarrow_{\mathsf{w}} \langle M_1', M_2 \rangle} \qquad \frac{M_2 \rightarrow_{\mathsf{w}} M_2'}{\langle M_1, M_2 \rangle \rightarrow_{\mathsf{w}} \langle M_1, M_2' \rangle}$$

$$\frac{}{\mathsf{case}(\mathsf{in}_i V, x_1 \cdot M_1, x_2 \cdot M_2) \rightarrow_{\mathsf{w}} M_i\,[V/x_i]} \qquad \frac{M \rightarrow_{\mathsf{w}} M'}{\mathsf{in}_i M \rightarrow_{\mathsf{w}} \mathsf{in}_i M'}$$

$$\frac{M \to_{\mathsf{w}} M'}{\mathsf{case}(M, x_1 \cdot M_1, x_2 \cdot M_2) \to_{\mathsf{w}} \mathsf{case}(M', x_1 \cdot M_1, x_2 \cdot M_2)}$$

Proposition 3.2.2 (Subject reduction) *Assume that $\mathcal{P} \vdash M : \sigma$ and that $M \to_{\mathsf{w}} M'$. Then $\mathcal{P} \vdash M' : \sigma$.*

Démonstration. By induction on the deduction that $M \to_{\mathsf{w}} M'$.

Assume that $M = \mathsf{der}(N^!)$ and $M' = N$. Since $\mathcal{P} \vdash M : \sigma$ we must have $\mathcal{P} \vdash N^! : !\sigma$ and hence $\mathcal{P} \vdash N : \sigma$.

Assume that $M = \langle \lambda x^{\varphi}\, N \rangle V$ and $M' = N\,[x/V]$. Since $\mathcal{P} \vdash M : \sigma$ there must be a positive type ψ such that $\mathcal{P} \vdash \lambda x^{\varphi}\, N : \psi \multimap \sigma$. Therefore we must have $\psi = \varphi$ and $\mathcal{P}, x : \varphi \vdash N : \sigma$. By Proposition 3.1.3 we have $\mathcal{P} \vdash N\,[V/x] : \sigma$ as required.

Assume that $M = \mathsf{pr}_i\langle V_1, V_2\rangle$ and $M' = V_i$. Since $\mathcal{P} \vdash M : \sigma$, there must be two positive types φ_1 and φ_2 such that $\mathcal{P} \vdash \langle V_1, V_2\rangle : \varphi_1 \otimes \varphi_2$, and we have $\sigma = \varphi_1$. For $j = 1, 2$ we must have $\mathcal{P} \vdash V_j : \varphi_j$ and therefore $\mathcal{P} \vdash N : \sigma$ (taking $j = i$).

Assume that $M = \mathsf{fix}\, x^{!\sigma}\, N$ and $M' = N\left[M^!/x\right]$. We know that $\mathcal{P} \vdash \mathsf{fix}\, x^{!\sigma}\, N : \sigma$ and therefore we must have $\mathcal{P}, x : !\sigma \vdash N : \sigma$. We also know that $\mathcal{P} \vdash M^! : !\sigma$ and therefore, by Proposition 3.1.3 we have $\mathcal{P} \vdash N\left[M^!/x\right] : \sigma$ as required.

Assume that $M = \mathsf{case}(\mathsf{in}_i N, x_1 \cdot R_1, x_2 \cdot R_2)$ and $M' = R_i\,[N/x_i]$. Since $\mathcal{P} \vdash M : \sigma$, there must be positive types φ_1 and φ_2 such that $\mathcal{P} \vdash \mathsf{in}_i N : \varphi_1 \oplus \varphi_2$ and also $\mathcal{P}, x_j : \varphi_j \vdash R_j : \sigma$ for $j = 1, 2$. We must have $\mathcal{P} \vdash N : \varphi_i$ and hence, by Proposition 3.1.3 we have $\mathcal{P} \vdash R_i\,[N/x] : \sigma$ as required.

Assume that $M = \mathsf{der}(N)$ and $M' = \mathsf{der}(N')$ with $N \to_{\mathsf{w}} N'$. We have $\mathcal{P} \vdash M : \sigma$ hence $\mathcal{P} \vdash N : !\sigma$. By inductive hypothesis we have $\mathcal{P} \vdash N' : !\sigma$ (remember that our proof is on the height of the derivation of the considered weak reduction step) and hence $\mathcal{P} \vdash M' : \sigma$ as required.

Assume that $M = \langle N\rangle R$ and $M' = \langle N'\rangle R$ with $N \to_{\mathsf{w}} N'$. Since $\mathcal{P} \vdash M : \sigma$ there is a positive type φ such that $\mathcal{P} \vdash N : \varphi \multimap \sigma$ and $\mathcal{P} \vdash R : \varphi$. By inductive hypothesis $\mathcal{P} \vdash N' : \varphi \multimap \sigma$ and hence $\mathcal{P} \vdash M' : \sigma$ as required.

The remaining cases are similar and left to the reader. □

Proposition 3.2.3 *Any value is $\to_{\mathsf{w}}$-normal. If φ is a positive type, $\vdash M : \varphi$ and M is $\to_{\mathsf{w}}$-normal, then M is a value.*

This is easy. In the second statement M has to be closed (the term $\langle \mathsf{der}(x)\rangle V$ is normal, is not a value and can be given a positive type).

Proposition 3.2.4 *The relation $\to_{\mathsf{w}}$ has the diamond property : if $M \to_{\mathsf{w}} M_i$ for $i = 1, 2$, then there is a term M' such that $M_i \to_{\mathsf{w}} M'$ for $i = 1, 2$.*

Exercice 3.2.1 Prove this proposition by induction on the structure of M. Observe that, in the case where $M = \langle \lambda x^{\varphi}\, N\rangle V$, the only possible reduction from M is $M \to_{\mathsf{w}} N\,[V/x]$ because V and $\lambda x^{\varphi}\, N$ are $\to_{\mathsf{w}}$-normal.

3.2.1 Examples Given any type σ, we define $\Omega^{\sigma} = \mathsf{fix}\, x^{!\sigma}\, \mathsf{der}(x)$ which satisfies $\vdash \Omega^{\sigma} : \sigma$. It is clear that $\Omega^{\sigma} \to_{\mathsf{w}} \mathsf{der}((\Omega^{\sigma})^!) \to_{\mathsf{w}} \Omega^{\sigma}$ so that we can consider Ω^{σ} as the ever-looping program of type σ.

Unit type and natural numbers. We define a unit type 1 by $1 = !\top$, and we set $* = (\Omega^{\top})^!$. We define the type ι of unary natural numbers by $\iota = 1 \oplus \iota$ (by this we mean that $\iota = \mathsf{Fix}\,\zeta \cdot (1 \oplus \zeta)$). We define $\underline{0} = \mathsf{in}_1 *$ and $\underline{n+1} = \mathsf{in}_2 \underline{n}$ so that we have $\mathcal{P} \vdash \underline{n} : \iota$ for each $n \in \mathbb{N}$.

Then, given a term M, we define the term $\mathsf{suc}(M) = \mathsf{in}_2 M$, so that we have

$$\frac{\mathcal{P} \vdash M : \iota}{\mathcal{P} \vdash \mathsf{suc}(M) : \iota}$$

Last, given terms M, N_1 and N_2 and a variable x, we define an "ifz" conditional by $\mathsf{if}(M, N_1, x \cdot N_2) = \mathsf{case}(M, z \cdot N_1, x \cdot N_2)$ where z is not free in N_1, so that

$$\frac{\mathcal{P} \vdash M : \iota \qquad \mathcal{P} \vdash N_1 : \sigma \qquad \mathcal{P}, x : \iota \vdash N_2 : \sigma}{\mathcal{P} \vdash \mathsf{if}(M, N_1, x \cdot N_2) : \sigma}$$

STREAMS. Let φ be a positive type and S_φ be the positive type defined by $\mathsf{S}_\varphi = \varphi \otimes !\mathsf{S}_\varphi$, that is $\mathsf{S}_\varphi = \mathsf{Fix}\,\zeta \cdot (\varphi \otimes !\zeta)$. We can define a term M such that $\vdash M : \mathsf{S}_\varphi \multimap \iota \multimap \varphi$ which computes the nth element of a stream :

$$M = \mathsf{fix}\, f^{!(\mathsf{S}_\varphi \multimap \iota \multimap \varphi)}\, \lambda x^{\mathsf{S}_\varphi}\, \lambda y^\iota\, \mathsf{if}(y, \mathsf{pr}_1 x, z \cdot \langle \mathsf{der}(f) \rangle \mathsf{der}(\mathsf{pr}_2 x)\, z)$$

Conversely, we can define a term N such that $\vdash N : !(\iota \multimap \varphi) \multimap \mathsf{S}_\varphi$ which turns a function into a stream.

$$N = \mathsf{fix}\, F^{!(!(\iota \multimap \varphi) \multimap \mathsf{S}_\varphi)}\, \lambda f^{!(\iota \multimap \varphi)}\, \langle \langle \mathsf{der}(f) \rangle \underline{0}, (\langle \mathsf{der}(F) \rangle (\lambda x^\iota\, \langle \mathsf{der}(f) \rangle \mathsf{suc}(x))^!)^! \rangle$$

Observe that the recursive call of F is encapsulated into a box, which makes the construction lazy.

LISTS. There are various possibilities for defining a type of lists of elements of a positive type φ. The simplest definition is $\lambda_0 = 1 \oplus (\varphi \otimes \lambda_0)$. This corresponds to the ordinary ML “strict” type of lists. But we can also define $\lambda_1 = 1 \oplus (\varphi \otimes !\lambda_1)$ and then we have a type of lazy lists where the tail of the list is computed only when required (this type contains also streams).

We could also consider $\lambda_2 = 1 \oplus (!\sigma \otimes \lambda_2)$ which allows to manipulate lists of objects of type σ (which can be a general type) without accessing their elements.

Chapitre 4

Catégories

4.1 Concepts de base

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée :
- d'une classe d'objets $\mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$
- pour chaque $X, Y \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$, d'une classe de morphismes de X vers Y, notée $\mathcal{C}(X,Y)$
- pour chaque $X \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$, d'un élément particulier Id_X de $\mathcal{C}(X,X)$ appelé morphisme identité en X
- et, pour chaque triplet $(X,Y,Z) \in \mathcal{C}^3$, d'une opération de composition

$$\begin{array}{rcl} \circ : \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) & \to & \mathcal{C}(X,Z) \\ (f,g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

tels que les équations suivantes soient satisfaites (pour $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ et $h \in \mathcal{C}(Z,V)$) :

$$f \circ \mathsf{Id}_X = f \qquad \mathsf{Id}_Y \circ f = f \qquad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Voici quelques exemples fondamentaux.

Set. C'est la catégorie dont les objets sont les ensembles et les morphisms sont les fonctions. Elle est sous-jacente à la plupart des catégories qu'on rencontre en mathématiques dont les objets sont des ensembles avec structure et les morphismes, les fonctions préservant ces structures un un certain sens. Exemple :
- la catégorie des monoïdes et homomorphismes de monoïdes
- la catégorie des groupes et homomorphismes de groupes
- étant donné un corps, la catégorie des espaces vectoriels sur ce corps, et des fonctions linéaires entre ces espaces
- la catégorie des espaces topologiques et des fonctions continues

Rel. C'est une catégorie beaucoup moins habituelle, mais très importante pour nous. Ses objets sont les ensembles, mais $\mathbf{Rel}(X,Y)$ est $\mathcal{P}(X \times Y)$, vu comme l'ensemble des relations de X vers Y. Le morphisme identité Id_X est la relation diagonale : $\mathsf{Id}_X = \{(a,a) \mid a \in X\}$ et la composition est défine de façon relationnelle : si $s \in \mathbf{Rel}(X,Y)$ et $t \in \mathbf{Rel}(Y,Z)$, alors

$$t \circ s = \{(a,c) \mid \exists b \in Y \ (a,b) \in s \text{ et } (b,c) \in t\}\,.$$

On notera très souvent cette composition $t\,s$ comme un produit, et l'identité id_X. Les catégories construites sur ce modèle sont moins fréquentes en mathématiques. Comme exemple, on peut mentionner que les matrices sur un corps peuvent être vues comme les morphismes d'une catégorie de ce genre.

Un isomorphisme est un morphisme $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ tel qu'il existe un morphisme $g \in \mathcal{C}(Y,X)$ tel que $g \circ f = \mathsf{Id}_X$ et $f \circ g = \mathsf{Id}_Y$. Si g et g' vérifient cette condition, on a $g = g \circ \mathsf{Id}_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \mathsf{Id}_X \circ g' = g'$ en vertu des équations ci-dessus, donc g est complètement déterminé par f et on le note f^{-1}.

La catégorie opposée de la catégorie $\mathcal{C}$ est la catégorie $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ donnée par $\mathsf{Obj}(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}) = \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}(X,Y) = \mathcal{C}(Y,X)$. Les identités sont les mêmes, et la composition est définie de façon évidente (en inversant l'ordre des facteurs).

4.1.1 Foncteurs Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est une opération qui

— à tout objet X de $\mathcal{C}$ associe un objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$

— et à tout morphisme $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ associe un morphisme $F(f) \in \mathcal{C}(F(X), F(Y))$

et qui vérifie, pour tous $X, Y, Z \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$ et tout $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ et $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$:

$$F(\mathsf{Id}_X) = \mathsf{Id}_{F(X)} \qquad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

Un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ vers $\mathcal{D}$ (ou, ce qui revient au même, un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}^{\mathsf{op}}$).

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est *plein* si, pour tous $X, Y \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$, la fonction $\mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(F(X), F(Y))$ qui envoie f sur $F(f)$ est surjective. Il est *fidèle* si cette fonction est injective.

Par exemple, l'opération P de **Rel** vers **Set** qui envoie un ensemble X sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ et une relation $s \in \mathbf{Rel}(X,Y)$ sur la fonction $P(s) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ donnée par $P(s)(u) = \{b \in Y \mid \exists a \in u\ (a,b) \in s\}$ est un foncteur de la catégorie **Rel** vers la catégorie **Set**.

Exercice 4.1.1 Montrer que ce foncteur P est fidèle, mais pas plein.

4.1.2 Transformations naturelles Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle de F vers G est une famille $T = (T_X)_{X \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}}$ de morphisms telle que, pour tout $X \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$ on ait $T_X \in \mathcal{D}(F(X), G(X))$ et telle que, pour tout $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, on ait $G(f) \circ T_X = T_Y \circ F(f)$. On exprime cette condition en disant que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "T_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "T_Y"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

ce qui signifie que la composition des morphismes situés sur ses deux faces sont égales. On écrit alors $S : F \overset{\bullet}{\to} G$. Soient $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ trois foncteurs. Si $S : F \overset{\bullet}{\to} G$ et $T : G \overset{\bullet}{\to} H$, on définit $T \circ S : F \overset{\bullet}{\to} H$ par $(T \circ S)_X = T_X \circ S_X$. On définit ainsi la catégorie $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ des foncteurs et transformations naturelles. Cette composition est souvent appelée *composition verticale*.

Exercice 4.1.2 Soient $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G, G' : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ deux foncteurs. Soient $S : F \overset{\bullet}{\to} F'$ et $T : G \overset{\bullet}{\to} G'$ deux transformations naturelles. Soient $X \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$. Montrer que $G'(S_X) \circ T_{F(X)} = T_{F'(X)} \circ G(S_X)$. On note $(T * S)_X \in \mathcal{E}(G(F(X)), G'(F'(X)))$ le morphisme ainsi défini. Montrer que $T * S$ est une transformation naturelle $G \circ F \overset{\bullet}{\to} G' \circ F'$. Vérifier que cette opération est associative et donner son élément neutre ; on l'appelle *composition horizontale* des transformations naturelles. Soient $F'' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G'' : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ deux autres foncteurs et $S' : F' \overset{\bullet}{\to} F''$ et $T' : G' \overset{\bullet}{\to} G''$ deux autres transformations naturelles. Montrer que $(T' \circ T) * (S' \circ S) = (T' * S') \circ (T * S)$. Cette propriété est appelée *loi d'échange*. La catégorie des catégories, avec pour morphismes les foncteurs, et morphismes entre morphismes les transformations naturelles (munies de ces deux lois de compositions) est une 2-*catégorie*.

4.2 Monades

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Une *monade* sur $\mathcal{C}$ est un triplet (T, ε, μ) où $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un foncteur, $\varepsilon : \mathsf{Id}_{\mathcal{C}} \overset{\bullet}{\to} T$ et $\mu : T^2 = T \circ T \overset{\bullet}{\to} T$ sont des transformations naturelles. On demande en plus que les diagrammes suivants commutent.

$$
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\varepsilon_{T(X)}"] \arrow[dr, "\mathsf{Id}_{T(X)}"'] & T^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\
& T(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "T(\varepsilon_X)"] \arrow[dr, "\mathsf{Id}_{T(X)}"'] & T^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\
& T(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^3(X) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T^2(X) \arrow[r, "\mu_X"] & T(X)
\end{tikzcd}
$$

On définit alors deux catégories. La catégorie des T-algèbres $\mathcal{C}^T$, ou catégorie d'Eilenberg-Moore. Les objets de $\mathcal{C}^T$ sont les couples (X,h) où $X \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$ et $h \in \mathcal{C}(T(X),X)$ tel que les diagrammes suivants commutent.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[dr, "\mathsf{Id}_X"'] & T(X) \arrow[d, "h"] \\
& X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^2(X) \arrow[r, "T(h)"] \arrow[d, "\mu_X"'] & T(X) \arrow[d, "h"] \\
T(X) \arrow[r, "h"] & X
\end{tikzcd}
$$

Les éléments de $\mathcal{C}^T((X,h),(Y,k))$ sont les $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ tels que le diagramme suivant commute.

$$
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "T(f)"'] & X \arrow[d, "f"] \\
T(Y) \arrow[r, "k"] & Y
\end{tikzcd}
$$

Exercice 4.2.1 Justifier qu'on a bien défini une catégorie $\mathcal{C}^T$.

On définit ensuite la catégorie des T-algèbres libres, ou catégorie de Kleisli, notée $\mathcal{C}_T$. Tout d'abord, on pose $\mathsf{Obj}\,\mathcal{C}_T = \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$. Puis on pose $\mathcal{C}_T(X,Y) = \mathcal{C}(X,T(Y))$. Dans cette catégorie, l'identité en X est $\mathsf{Id}^{\mathsf{K}}_X = \varepsilon_X$ et on définit la composition de la façon suivante. Soient $f \in \mathcal{C}_T(X,Y) = \mathcal{C}(X,T(Y))$ et $g \in \mathcal{C}_T(Y,Z) = \mathcal{C}(Y,T(Z))$. On pose

$$g \circ^{\mathsf{K}} f = \mu_Z \circ T(g) \circ f\,.$$

Exercice 4.2.2 Montrer qu'on a bien défini ainsi une catégorie $\mathcal{C}_T$.

Exercice 4.2.3 Si X est un objet de $\mathcal{C}$, vérifier que $(T(X),\mu_X)$ est une T-algèbre. On l'appelle la *T-algèbre libre engendrée par* X et on la note ici $F(X)$. Soit $f \in \mathcal{C}_T(X,Y)$. On pose $F(f) = \mu_Y \circ T(f)$. Montrer qu'on a ainsi défini un foncteur $F : \mathcal{C}_T \to \mathcal{C}^T$. Montrer que F est plein et fidèle.

Exercice 4.2.4 Soit $M : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ le foncteur qui, à un ensemble X, associe l'ensemble $M(X)$ des suites $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ et à une fonction $f : X \to Y$ associe la fonction $M(f) : M(X) \to M(Y)$ qui à $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ associe $\langle f(a_1),\dots,f(a_n)\rangle$. Si X est un ensemble, on définit $\varepsilon_X : X \to M(X)$ comme la fonction qui à a associe $\langle a\rangle$, et $\mu_X : M(M(X)) \to M(X)$ comme la fonction qui à une suite $\langle m_1,\dots,m_n\rangle$ de suites d'éléments de X associe la concaténation $m_1 \cdots m_n$ de ces suites.

— Montrer que ε et μ sont des transformations naturelles.
— Montrer que (M,ε,μ) est une monade.
— Montrer que $\mathbf{Set}^M$ est la catégorie des monoïdes et des morphismes de monoïdes.

Exercice 4.2.5 En renversant le sens des flèches, expliquer ce qu'est une comonade, décrire les catégories d'Eilenberg-Moore et de Kleisli d'une comonade.

4.3 Limites projectives.

4.3.1 Objet terminal. Un objet T d'une catégorie $\mathcal{C}$ est *terminal* si, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathcal{C}(X,T)$ a exactement un élément. Soient T et T' deux objets terminaux de $\mathcal{C}$. Soit f l'unique élément de $\mathcal{C}(T',T)$ et f' l'unique élément de $\mathcal{C}(T,T')$. Comme nécessairement $\mathcal{C}(T,T) = \{\mathsf{Id}_T\}$, on doit avoir $f \circ f' = \mathsf{Id}_T$ et de même $f' \circ f = \mathsf{Id}_{T'}$. Autrement dit, il n'y a qu'un morphisme de T vers T', et ce morphisme est un isomorphisme. C'est une façon très forte de dire que, si une catégorie a un objet terminal, alors cet objet est unique à unique isomorphisme.

4.3.2 Cas général. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et I une petite catégorie (c'est-à-dire une catégorie dont la classe des objets est un ensemble). Il y a un foncteur évident $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$ qui envoie un objet X de $\mathcal{C}$ sur le foncteur constant $\Delta(X)(i) = X$ et $\Delta(X)(u) = \mathsf{Id}_X$. Soit $D : I \to \mathcal{C}$ un foncteur (un tel “petit” foncteur est parfois appelé un *diagramme*). Un *cône projectif* appuyé sur D est un couple (X,f) où $X \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$ et $f : \Delta(X) \stackrel{\bullet}{\to} D$. Autrement dit, c'est la donnée de l'objet X, et, pour tout $i \in \mathsf{Obj}\,I$, d'un morphisme $f_i \in \mathcal{C}(X, D(i))$ tel que, pour chaque $\varphi \in I(i,j)$, on ait $D(\varphi) \circ f_i = f_j$.

Soient (X,f) et (Y,g) deux cône projectifs appuyés sur D. Un morphisme de cônes de (X,f) vers (Y,g) est, par définition, la donnée d'un $h \in \mathcal{C}(X,Y)$ tel que, pour chaque $i \in I$, on ait $g_i \circ h = f_i$. On définit ainsi une catégorie $\mathcal{C}_D$. Par définition, un *cône projectif limite* sur D est un objet terminal dans la catégorie $\mathcal{C}_D$.

Autrement dit, un cône projectif limite sur D est un cône (L,l) appuyé sur D tel que, pour tout autre cône (X,f) appuyé sur D, il existe un unique $h \in \mathcal{C}(L,X)$ tel que $\forall i \in I\ l_i \circ h = f_i$.

Proposition 4.3.1 *Soient $(Y,(f_i)_{i\in I})$ et $(Y',(f'_i)_{i\in I})$ deux limites projectives du diagramme D. Alors il existe un unique morphisme $g \in \mathcal{C}(Y,Y')$ tel que $\forall i \in I\ f'_i \circ g = f_i$. De plus, g est un isomorphisme.*

Cela résulte directement de la caractérisation du cône limite comme objet terminal dans la catégorie $\mathcal{C}_D$. Quand elle existe, la limite projective est donc unique à unique isomorphisme près.

Voici quelques exemples de limites projectives.

Si I est une catégorie discrète, c'est-à-dire que les seuls morphismes de I sont les identités, alors D est juste une famille d'objets et sa limite projective, si elle existe, est appelée *produit cartésien* de cette famille. Cas particuliers : si $I = \emptyset$, la limite projective consiste simplement en un objet $\top$ caractérisé par le fait que, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathcal{C}(X,\top)$ est un singleton, dont l'unique élément est noté t_X. Autrement dit, $\top$ est un objet terminal. Si $I = \{1,2\}$, un diagramme est un couple d'objets (X_1,X_2) et sa limite projective est notée $(X_1 \,\&\, X_2, \mathsf{pr}_1, \mathsf{pr}_2)$. Si $f_i \in \mathcal{C}(Y,X_i)$ pour $i = 1,2$, l'unique morphisme $g \in \mathcal{C}(Y, X_1 \,\&\, X_2)$ tel que $\mathsf{pr}_i \circ g = f_i$ pour $i = 1,2$ est noté $\langle f_1, f_2\rangle$.

Supposons que le produit cartésien binaire existe pour toute paire d'objets. L'opération $(X_1,X_2) \mapsto X_1 \,\&\, X_2$ peut être étendue en un foncteur $\mathcal{C}^2 \to \mathcal{C}$: soient $f_i \in \mathcal{C}(X_i,Y_i)$ pour $i = 1,2$. On a $f_i \circ \mathsf{pr}_i \in \mathcal{C}(X_1 \,\&\, X_2, X_i)$ et donc il existe un unique morphisme $f_1 \,\&\, f_2 \in \mathcal{C}(X_1 \,\&\, X_2, Y_i)$ tel que $\mathsf{pr}_i \circ (f_1 \,\&\, f_2) = f_i \circ \mathsf{pr}_i$.

Soit I la catégorie dont l'ensemble des objets est $\{1,2\}$ et $I(1,2) = \{\alpha,\beta\}$. Un diagramme est la donnée de deux objets X et Y de $\mathcal{C}$ et de deux morphismes $f, g \in \mathcal{C}(X,Y)$. Une limite projective de ce diagramme est la donnée d'un objet E et d'un morphisme $e \in \mathcal{C}(E,X)$ tel que $f \circ e = g \circ e$ et tel que, pour tout objet Z de $\mathcal{C}$ et tout morphisme $h \in \mathcal{C}(Z,X)$ tel que $f \circ h = g \circ h$, il existe un unique morphisme $h_0 \in \mathcal{C}(Z,E)$ tel que $h = e \circ h_0$. Une telle limite est appelée *égaliseur* de f et g.

Exercice 4.3.1 Montrer que **Set** a tous les égaliseurs. Qu'en est-il de **Rel** ?

Exercice 4.3.2 Examiner le cas où I a $\{1,2,3\}$ pour ensembles d'objets, et $I(1,3) = \{\alpha\}$, $I(2,3) = \{\beta\}$ et $I(i,j) = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $(i,j) \notin \{(1,3),(2,3)\}$. Une telle limite est appelée *produit fibré*.

Exercice 4.3.3 En renversant le sens des flèches, expliciter la notion duale de colimite (ou limite inductive).

4.3.3 Catégorie cartésienne. On donne une description directe de cette notion importante, indépendante de la notion générale de limite projective introduite ci-dessus.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Un *produit cartésien* de $(X_i)_{i\in I}$ est un couple $(Y,(\pi_i)_{i\in I})$ où $Y \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$ et $\pi_i \in \mathcal{C}(Y,X_i)$ pour $i \in I$ qui vérifie la *propriété universelle* suivante : pour tout $Z \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$ et toute famille $(f_i)_{i\in I}$ telle que $f_i \in \mathcal{C}(Z,X_i)$, il existe un unique $g \in \mathcal{C}(Z,Y)$ tel que, pour tout $i \in I$, on ait $\pi_i \circ g = f_i$.

Théorème 4.3.2 *Soient $(Y,(\pi_i)_{i\in I})$ et $(Y',(\pi'_i)_{i\in I})$ deux produits cartésiens de la famille $(X_i)_{i\in I}$. Il existe un unique $h \in \mathcal{C}(Y,Y')$ tel que $\pi'_i \circ h = \pi_i$ pour tout $i \in I$, et h est un isomorphisme.*

Démonstration. L'existence et l'unicité de h résultent de la propriété universelle de $(Y',(\pi'_i)_{i\in I})$ et de l'existance des $\pi_i \in \mathcal{C}(Y,X_i)$. De la même façon, on définit un unique $h' \in \mathcal{C}(Y',Y)$ tel que $\pi_i \circ h' = \pi'_i$ pour tout $i \in I$. Alors $h' \circ h \in \mathcal{C}(Y,Y)$ vérifie $\pi_i \circ h' \circ h = \pi_i$ pour tout $i \in I$, or Id_Y vérifie également ces égalités, et donc $h' \circ h = \mathsf{Id}_Y$ par l'unicité dans la propriété universelle. De même on voit que $h \circ h' = \mathsf{Id}_{Y'}$. □

Donc le produit cartésien, quand il existe, est unique à unique isomorphisme près : c'est typique des constructions définies par une propriété universelle. On peut à chaque fois démontrer une propriété similaire à celle énoncée par ce théorème (on ne les redémontrera pas par la suite pour les autres constructions universelles).

On dit que $\mathcal{C}$ est cartésienne si toutes les familles finies $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ ont un produit cartésien. On en choisit un, que l'on note $(\&_{i\in I} X_i,(\pi_i)_{i\in I})$. Soit I un ensemble fini fixé. On peut définir un foncteur "produit cartésien" P_I de $\mathcal{C}^I$ vers $\mathcal{C}$ en posant $P_I((X_i)_{i\in I}) =\&_{i\in I} X_i$, et, pour une famille $(f_i)_{i\in I}$ (avec $\forall i \in I\ f_i \in \mathcal{C}(X_i,Y_i)$), en définissant $g = P_I((f_i)_{i\in I})$ comme l'unique morphisme $g \in \mathcal{C}(\&_{i\in I} X_i,\&_{i\in I} Y_i)$ tel que $\forall i \in I\ \pi_i \circ g = f_i \circ \pi_i$ pour $i = 1,2$. La fonctorialité dit que $\mathsf{Id}_{X_1}\ \&\ \mathsf{Id}_{X_2} = \mathsf{Id}_{X_1\&X_2}$ et que, si $f_i \in \mathcal{C}(X_i,Y_i)$ et $g_i \in \mathcal{C}(Y_i,Z_i)$ pour $i = 1,2$, alors

$$(g_1 \ \&\ g_2) \circ (f_1 \ \&\ f_2) = (g_1 \circ f_1) \ \&\ (g_2 \circ f_2)\,.$$

Elle se démontre en utilisant la propriété universelle du produit cartésien : par exemple, les morphismes ci-dessus sont tous les deux des morphismes $h \in \mathcal{C}(X_1 \,\&\, X_2, Z_1 \,\&\, Z_2)$ tels que $h \circ \mathsf{pr}_i = g_i \circ f_i \circ \mathsf{pr}_i$ pour $i = 1,2$, ils sont donc égaux puisqu'il n'y a qu'un seul tel morphisme.

On suppose toujours $\mathcal{C}$ cartésienne. On démontre de la même façon que le produit cartésien admet $\top$ comme "élément neutre" à gauche et à droite, c'est-à-dire qu'il existe des isomorphismes naturels $\lambda_X : \top \,\&\, X \to X$ et $\rho_X : X \,\&\, \top \to X$. Il est associatif au sens où il existe des isomorphismes naturesl $\alpha_{X_1,X_2,X_3} : (X_1 \,\&\, X_2) \,\&\, X_3 \to X_1 \,\&\, (X_2 \,\&\, X_3)$ et il est symétrique au sens où il existe des isomorphismes naturels $\sigma_{X_1,X_2} : X_1 \,\&\, X_2 \to X_2 \,\&\, X_1$. Ces morphismes satisfont des commutations sur lesquelles on reviendra quand on parlera de catégories monoïdales.

On peut encore axiomatiser les catégories cartésiennes de façon équationnelles : la catégorie $\mathcal{C}$ est cartésienne si elle a un objet terminal et les opérations suivantes :

— une opération qui à $X_1, X_2 \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$ associe $X_1 \,\&\, X_2$ et $\mathsf{pr}_i \in \mathcal{C}(X_1 \,\&\, X_2, X_i)$ pour $i = 1,2$;

— et une opération qui $(f_i \in \mathcal{C}(Y,X_i))_{i=1,2}$ associe $\langle f_1,f_2\rangle \in \mathcal{C}(Y,X_1 \,\&\, X_2$

qui vérifient les équations suivantes :

$$\begin{gathered}\mathsf{pr}_i \circ \langle f_1,f_2\rangle = f_i \quad \text{pour } i = 1,2\\ \langle f_1,f_2\rangle \circ g = \langle f_1 \circ g, f_2 \circ g\rangle\\ \langle \mathsf{pr}_1,\mathsf{pr}_2\rangle = \mathsf{Id}_{X_1\&X_2}\end{gathered}$$

Pour prouver qu'une catégorie est cartésienne, il peut être plus facile de démontrer ces équations plutôt que de prouver directement la propriété universelle. On laisse la vérification de l'équivalence entre ces deux présentations comme un exercice.

Exemples : les produits dans **Set** et dans **Rel**. Dans **Set**, l'objet terminal est n'importe quel ensemble à 1 élément. Le produit cartésien de X_1 et X_2 est le produit habituel $X_1 \times X_2$ et les projections sont, elles aussi, les fonctions de projection usuelle. Si $f_i \in \mathbf{Set}(Y,X_i)$, la fonction $\langle f_1,f_2\rangle$ est donnée par $\langle f_1,f_2\rangle(a) = (f_1(a),f_2(a))$.

Dans $\mathbf{Rel}$, l'objet terminal est l'ensemble vide puisque $\mathbf{Rel}(X, \emptyset) = \mathcal{P}(X \times \emptyset) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ est bien un singleton. Le produit cartésien d'une famille d'objets $(X_i)_{i\in I}$ est l'ensemble $\&_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}\{i\} \times X_i$ (c'est une union disjointe). Les projections sont données par

$$\mathsf{pr}_i = \{((i, a), a) \mid i \in I \text{ et } a \in X_i\} .$$

Soit $s_i \in \mathbf{Rel}(Y, X_i)$, pour chaque $i \in I$. On définit $\langle s_i\rangle_{i\in I} \in \mathbf{Rel}(Y, \&_{i\in I} X_i)$ par

$$\langle s_i\rangle_{i\in I} = \{(b,(i, a)) \mid i \in I \text{ et } (b, a) \in s_i\}$$

et on vérifie facilement que $\langle s_i\rangle_{i\in I}$ est l'unique élément de pr_i tel que $\mathsf{pr}_i \langle s_j\rangle_{j\in I} = s_i$ pour chaque $i \in I$.

4.4 Catégorie cartésiennes fermées

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie cartésienne. Soient $X, Y \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$. Un *objet des morphismes* de X vers Y est la donnée d'un couple (E, e) où E est un objet de $\mathcal{C}$ et $e \in \mathcal{C}(E \,\&\, X, Y)$ sont tels que, pour tout $f \in \mathcal{C}(Z \,\&\, X, Y)$ il existe un unique $f' \in \mathcal{C}(Z, E)$ tel que $e \circ (f' \,\&\, \mathsf{Id}_X) = f$. Cette notion est de nouveau définie par une propriété universelle, et donc de façon unique à unique isomorphisme près comme on va le voir.

Soit (E', e') un autre objet des morphismes de X vers Y. Comme $e' \in \mathcal{C}(E' \,\&\, X, Y)$ et donc il existe un unique $h' \in \mathcal{C}(E', E)$ tel que $e \circ (h \,\&\, \mathsf{Id}_X) = e'$ et de même il existe un unique $h' \in \mathcal{C}(E, E')$ tel que $e' \circ (h' \,\&\, \mathsf{Id}_X) = e$. On a donc $e \circ ((h \circ h') \,\&\, \mathsf{Id}_X) = e$, et comme $e \circ (\mathsf{Id}_E \,\&\, \mathsf{Id}_X) = e$, on a $h \circ h' = \mathsf{Id}_E$ et de même $h' \circ h = \mathsf{Id}_{E'}$, donc h est un isomorphisme dont h' est l'inverse.

Il a donc un sens d'introduire des notations : l'objet des morphismes E sera noté $X \Rightarrow Y$, le morphisme e dit d'*évaluation* sera noté $\mathsf{Ev}_{X,Y}$ ou simplement Ev et si $f \in \mathcal{C}(Z \,\&\, X, Y)$, l'unique morphisme $h : \mathcal{C}(Z, X \Rightarrow Y)$ tel que $\mathsf{Ev} \circ (h \,\&\, \mathsf{Id}_X)$ sera noté $\mathsf{Cur}(f)$ (*curryfication* de f, en l'honneur de Haskell Curry, père du λ-calcul).

Tout comme le produit cartésien, ces constructions peuvent être caractérisées par un système de trois équations :

$$\begin{aligned} \mathsf{Ev} \circ (\mathsf{Cur}(f) \,\&\, \mathsf{Id}_X) &= f \\ \mathsf{Cur}(f) \circ g &= \mathsf{Cur}(f \circ (g \,\&\, \mathsf{Id}_X)) \quad \text{où } g \in \mathcal{C}(Z', Z) \\ \mathsf{Cur}(\mathsf{Ev}) &= \mathsf{Id}_{X\Rightarrow Y} \ . \end{aligned}$$

Encore une fois, il peut être plus facile de vérifier ces équations que de prouver directement la propriété universelle.

Exercice 4.4.1 Soient $X, Y \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}_{X,Y}$ la catégorie suivante : un objet de $\mathcal{C}_{X,Y}$ est un couple (Z, f) où $Z \in \mathsf{Obj}\,\mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}(Z \,\&\, X, Y)$. L'ensemble $\mathcal{C}_{X,Y}((Z, f),(Z', f'))$ est l'ensemble des $g \in \mathcal{C}(Z, Z')$ tels que $f' \circ (g \,\&\, \mathsf{Id}_X) = f$. Vérifier qu'on a bien défini ainsi une catégorie, et qu'un objet des morphismes de X vers Y est exactement un objet terminal dans cette catégorie.

Enoncer la propriété d'unicité des objets des morphismes qui en résulte.

Exercice 4.4.2 Vérifier que $\mathbf{Set}$ est cartésienne fermée et que $\mathbf{Rel}$ ne l'est pas.

4.5 Qu'est-ce qu'un modèle de la logique linéaire ?

Il y a plusieurs façons différentes de présenter catégoriquement les modèles de la logique linéaire. Nous suivons l'approche proposée par Seely et corrigée par Bierman, nous parlerons simplement de catégories de Seely. Notre principale référence est le long et très détaillé article de Melliès [Mel09].

4.5.1 Catégories monoïdales. Alors qu'une catégorie cartésienne est une catégorie ayant une certaine propriété (existence de limites sur les diagrammes discrets finis), une catégorie monoïdale n'est pas qu'une catégorie, c'est une structure $(\mathcal{L}, 1, \otimes, \lambda, \rho, \alpha)$ où $\mathcal{L}$ est une catégorie, 1 est un objet de $\mathcal{L}$, $\otimes$ est un foncteur $\mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}$ (noté de façon infixe) et les autres éléments du sextuplet sont des isomorphismes naturels.

Dans une telle catégorie $\mathcal{L}$ (dont les morphismes sont intuitivement des fonctions linéaires), la composition est notée par simple juxtaposition. Si $s \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $t \in \mathcal{L}(Y, Z)$, la composition de ces deux morphismes est notée $t\,s \in \mathcal{L}(X, Z)$.

— $\lambda_X : 1 \otimes X \to X$ est un iso naturel exprimant que 1 est élément neutre à gauche pour $\otimes$, et de même $\rho_X : X \otimes 1 \to X$ est un iso naturel exprimant que 1 est neutre à droite.
— $\alpha_{X_1,X_2,X_3} : (X_1 \otimes X_2) \otimes X_3 \to X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3)$ est un isomorphisme naturel exprimant que le produit tensoriel est une opération associative.

Ces isomorphismes doivent satisfaire entre eux des *conditions de cohérence* qui permettent de donner une valeur unique à tous les isomorphismes que l'on peut avoir envie d'écrire de façon générique. Par exemple, on doit avoir la commutation suivante :

$$\begin{tikzcd}
(1 \otimes X_1) \otimes X_2 \arrow[r, "\lambda_{X_2 \otimes X_3}"] \arrow[d, "\alpha_{1,X_1,X_2}"'] & X_1 \otimes X_2 \\
1 \otimes (X_1 \otimes X_2) \arrow[ur, "\lambda_{X_1 \otimes X_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

qui expriment que les deux façons canoniques de passer de $(1 \otimes X_1) \otimes X_2$ à $X_1 \otimes X_2$ sont équivalentes. On a un diagramme similaire pour ρ, et le fameux pentagone de McLane :

$$\begin{tikzcd}
((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3) \otimes X_4 \arrow[r, "\alpha_{X_1 \otimes X_2, X_3, X_4}"] \arrow[d, "\alpha_{X_1,X_2,X_3 \otimes X_4}"'] & (X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes X_4) \arrow[dd, "\alpha_{X_1,X_2,X_3 \otimes X_4}"] \\
(X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3)) \otimes X_4 \arrow[d, "\alpha_{X_1,X_2 \otimes X_3,X_4}"'] & \\
X_1 \otimes ((X_2 \otimes X_3) \otimes X_4) \arrow[r, "X_1 \otimes \alpha_{X_2,X_3,X_4}"] & X_1 \otimes (X_2 \otimes (X_3 \otimes X_4))
\end{tikzcd}$$

Une catégorie monoïdale symétrique est une structure $(\mathcal{L}, 1, \otimes, \lambda, \rho, \alpha, \sigma)$ telle que $(\mathcal{L}, 1, \otimes, \lambda, \rho, \alpha)$ soit une catégorie symétrique, et $\sigma_{X_1} X_2 : X_1 \otimes X_2 \to X_2 \otimes X_1$ soit un isomorphisme naturel ; il exprime que le produit tensoriel est "commutatif". Cet isomorphisme doit satisfaire la propriété fondamentale suivante :

$$\sigma_{X_2,X_1}\,\sigma_{X_1,X_2} = \mathsf{Id}_{X_1 \otimes X_2} \ .$$

Il existe une notion de *catégorie monoïdale tressée* dans laquelle il y a un isomorphisme naturel σ, qui ne satisfait pas cette condition, mais une condition plus faible liée aux groupes de tresses.

Dans une catégorie monoïdale symétrique, il faut aussi que d'autres diagrammes de cohérence commutent, à savoir

$$\begin{tikzcd}
(X_1 \otimes X_2) \otimes X_3 \arrow[r, "\alpha_{X_1,X_2,X_3}"] \arrow[d, "\sigma_{X_1,X_2 \otimes X_3}"'] & X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3) \arrow[r, "\sigma_{X_1,X_2 \otimes X_3}"] & (X_2 \otimes X_3) \otimes X_1 \arrow[d, "\alpha_{X_2,X_3,X_1}"] \\
(X_2 \otimes X_1) \otimes X_3 \arrow[r, "\alpha_{X_2,X_1,X_3}"] & X_2 \otimes (X_1 \otimes X_3) \arrow[r, "X_2 \otimes \sigma_{X_1,X_3}"] & X_2 \otimes (X_3 \otimes X_1)
\end{tikzcd}$$

ainsi que

$$\begin{tikzcd} 1 \otimes X \arrow[r, "\lambda_X"] \arrow[d, "\sigma_{1,X}"'] & X \\ X \otimes 1 \arrow[ur, "\rho_X"] & \end{tikzcd}$$

4.5.2 Fermeture monoïdale. On dit qu'une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{L}, 1, \otimes, \lambda, \rho, \alpha, \sigma)$ est *fermée* si, pour tout objet X de $\mathcal{L}$, le foncteur $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ qui envoie Z sur $Z \otimes X$ admet un adjoint à droite. Ce foncteur adjoint à droite est noté $X \multimap \_$. Autrement dit, pour chaque paire d'objet X et Y de $\mathcal{L}$, on a un couple $(X \multimap Y, \mathsf{ev})$ où $X \multimap Y$ est un objet de $\mathcal{L}$ et $\mathsf{ev} \in \mathcal{L}((X \multimap Y) \otimes X, Y)$, et pour chaque morphisme $f \in \mathcal{L}(Z \otimes X, Y)$, on a un morphisme $\mathsf{cur}(f) \in \mathcal{L}(Z, X \multimap Y)$ tel que les conditions suivantes soient satisfaites.

— $\mathsf{ev}\,(\mathsf{cur}\,(f) \otimes X) = f$

— si $g \in \mathcal{L}(Z', Z)$, alors $\mathsf{cur}\,(f)\ g = \mathsf{cur}\,(f\,(g \otimes X))$

— et $\mathsf{cur}\,(\mathsf{ev}) = \mathsf{Id}_{X \multimap Y}$.

L'existence d'un adjoint est une propriété universelle : quand l'adjoint existe, il est unique à unique isomorphisme près. Pour une catégorie monoïdale symétrique, être fermée est donc une propriété, et non une structure supplémentaire. On utilisera toujours les notations ci-dessus ($\_ \multimap \_$, ev etc) pour les opérations associées à cette propriété.

Soit Z un objet de $\mathcal{L}$. On peut construire un morphisme naturel

$$\eta_X \in \mathcal{L}(X, (X \multimap Z) \multimap Z)$$

On a en effet $\mathsf{ev} : (X \multimap Z) \otimes X \to Z$ et donc $\mathsf{ev}\ \sigma : X \otimes (X \multimap Z) \to Z$, et on pose $\eta_X = \mathsf{cur}\,(\mathsf{ev}\ \sigma) : X \to (X \multimap Z) \multimap Z$.

4.5.3 $*$-autonomie. On appelle *catégorie $*$-autonome* une structure

$$(\mathcal{L}, 1, \otimes, \lambda, \rho, \alpha, \sigma, \perp)$$

où $(\mathcal{L}, 1, \otimes, \lambda, \rho, \alpha, \sigma)$ est une catégorie monoïdale symétrique fermée (pour laquelle on utilise les notations introduites ci-dessus), et $\perp$ est un objet de $\mathcal{L}$, dit *objet dualisant*, qui possède la propriété suivante : le morphisme naturel associé $\eta_X \in \mathcal{L}(X, (X \multimap \perp) \multimap \perp)$ est un isomorphisme, pour tout objet X.

L'$*$-autonomie d'une catégorie monoïdale symétrique fermée n'est pas une propriété, mais une structure (à savoir la donnée de $\perp$).

On note $X^\perp = (X \multimap \perp)$ en sorte que les objets X et $X^{\perp\perp}$ sont canoniquement isomorphes par l'isomorphisme η_X associé à $\perp$.

On peut alors définir une nouvelle opération : $X \parr Y = (X^\perp \otimes Y^\perp)^\perp$.

Exercice 4.5.1 Exhiber des isomorphismes naturels λ', ρ', α', σ' tels que la structure $(\mathcal{L}, \parr, \perp, \lambda', \rho', \alpha', \sigma')$ soit une catégorie monoïdale symétrique. Exhiber un isomorphisme naturel entre $X \multimap Y$ et $X^\perp \parr Y$.

4.5.4 Produit cartésien. Ce que nous avons présenté correspond au fragment multiplicatif de la logique linéaire. Pour interpréter le fragment additif, il suffit de demander que la catégorie $*$-autonome $(\mathcal{L}, 1, \otimes, \lambda, \rho, \alpha, \sigma, \perp)$ soit telle que $\mathcal{L}$ soit cartésienne. Quand c'est le cas, on note $\top$ l'objet terminal et & le produit cartésien binaire.

Exercice 4.5.2 Exhiber des isomorphismes naturels entre $X \parr \top$ et $\top$ et entre $(X_1 \mathbin{\&} X_2) \parr Y$ et $(X_1 \parr Y) \mathbin{\&} (X_2 \parr Y)$.

Exercice 4.5.3 Montrer que $\mathcal{L}$ est co-cartesienne, avec $0 = \top^\perp$ comme objet initial, et $X \oplus Y = (X^\perp \mathbin{\&} Y^\perp)^\perp$ comme co-produit binaire.

If $(X_i)_{i\in I}$ is a family of objects of $\mathcal{L}$ which has a coproduct in $\mathcal{L}$, this coproduct is denoted $\bigoplus_{i\in I} X_i$ and the injections are denoted as $\mathsf{in}_j \in \mathcal{L}(X_j, \bigoplus_{i\in I} X_i)$ for each $j \in I$. If $(f_i)_{i\in I}$ is a family of morphisms $f_i \in \mathcal{L}(X_i, Y)$ then we denote as $[f_i]_{i\in I}$ the unique morphism in $f \in \mathcal{L}(\bigoplus_{i\in I} X_i, Y)$ such that $f\,\mathsf{in}_i = f_i$ for each $i \in I$.

Given $g \in \mathcal{L}(Y, Z)$, we have $g\,[f_i]_{i\in I} = [g\,f_i]_{i\in I}$. In the special case where $Y = \bigoplus_{i\in I} X_i$ and $f_i = \mathsf{in}_i$, we have $[f_i]_{i\in I} = \mathsf{Id}_Y$.

More generally, let X be an object of $\mathcal{L}$ and assume now that $(f_i)_{i\in I}$ is a family of morphisms such that $f_i \in \mathcal{L}(X_i \otimes X, Y)$. Using monoidal closedness, we can similarly show that there is an unique morphism $f \in \mathcal{L}((\bigoplus_{i\in I} X_i) \otimes X, Y)$ such that $f\,(\mathsf{in}_i \otimes X) = f_i$ for each $i \in I$.

Exercice 4.5.4 Complete the proof of this last fact.

4.5.5 Exponentielles. Une *exponentielle* sur une catégorie $*$-autonome cartésienne $(\mathcal{L}, 1, \otimes, \lambda, \rho, \alpha, \sigma, \perp)$ est la donnée d'un foncteur $!\_ : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, d'une structure de comonade sur ce foncteur et d'un isomorphisme naturel dit isomorphisme de Seely.

Plus précisément, et pour fixer les notations, une exponentielle est une structure $(!\_, \mathsf{der}, \mathsf{dig}, \mathsf{m}^2, \mathsf{m}^0)$ où $!\_ : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ est un foncteur, $\mathsf{der}_X \in \mathcal{L}(!X, X)$ et $\mathsf{dig}_X \in \mathcal{L}(!X, !!X)$ sont des transformations naturelles, $\mathsf{m}^0 : 1 \to\, !\top$ est un isomorphisme et $\mathsf{m}^2_{X,Y} : !X \otimes !Y \to\, !(X \mathbin{\&} T)$ est un isomorphisme naturel (ces deux derniers isomorphismes sont appelés *isomorphismes de Seely* alors qu'ils sont plutôt dûs à Girard !). Ces morphismes doivent satisfaire les diagrammes suivants. Les 3 premiers expriment que $(!\_, \mathsf{der}, \mathsf{dig})$ est une comonade.

$$\begin{tikzcd}
!X & !!X \arrow[l, "\mathsf{der}_{!X}"'] \arrow[r, "!\mathsf{der}_X"] & !X \\
 & !X \arrow[ul, "!X"] \arrow[u, "\mathsf{dig}_X"] \arrow[ur, "!X"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
!X \arrow[r, "\mathsf{dig}_X"] \arrow[d, "\mathsf{dig}_X"'] & !!X \arrow[d, "!\mathsf{dig}_X"] \\
!!X \arrow[r, "\mathsf{dig}_{!X}"] & !!!X
\end{tikzcd}$$

Les deux suivants concernent les isomorphismes de Seely.

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes !X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mathsf{m}^0 \otimes !X"'] & !X \arrow[d, "!\langle \mathsf{t}_X, X\rangle"] \\
!\top \otimes !X \arrow[r, "\mathsf{m}^2_{\top,X}"] & !(\top \mathbin{\&} X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
!X \otimes 1 \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "!X \otimes \mathsf{m}^0"'] & !X \arrow[d, "!\langle X, \mathsf{t}_X\rangle"] \\
!X \otimes !\top \arrow[r, "\mathsf{m}^2_{X,\top}"] & !(X \mathbin{\&} \top)
\end{tikzcd}$$

où on rappelle que t_X est l'unique élément de $\mathcal{L}(X, \top)$; par conséquent $\langle \mathsf{t}_X, X\rangle$ est un isomorphisme (qui dit que $\top$ est neutre à gauche pour $\&$).

$$\begin{tikzcd}
(!X_1 \otimes !X_2) \otimes !X_3 \arrow[r, "\alpha_{!X_1,!X_2,!X_3}"] \arrow[d, "\mathsf{m}^2_{X_1,X_2} \otimes !X_3"'] & !X_1 \otimes (!X_2 \otimes !X_3) \arrow[d, "!X_1 \otimes \mathsf{m}^2_{X_2,X_3}"] \\
!(X_1 \mathbin{\&} X_2) \otimes !X_3 \arrow[d, "\mathsf{m}^2_{X_1 \& X_2, X_3}"'] & !X_1 \otimes !(X_2 \mathbin{\&} X_3) \arrow[d, "\mathsf{m}^2_{X_1, X_2 \& X_3}"] \\
!((X_1 \mathbin{\&} X_2) \mathbin{\&} X_3) \arrow[r, "\langle \mathsf{pr}_1\,\mathsf{pr}_1, \langle \mathsf{pr}_2\,\mathsf{pr}_1, \mathsf{pr}_2\rangle\rangle"'] & !(X_1 \mathbin{\&} (X_2 \mathbin{\&} X_3))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
!X_1 \otimes !X_2 \arrow[r, "\sigma_{!X_1,!X_2}"] \arrow[d, "\mathsf{m}^2_{X_1,X_2}"] & !X_2 \otimes !X_1 \arrow[d, "\mathsf{m}^2_{X_2,X_1}"] \\
!(X_1 \mathbin{\&} X_2) \arrow[r, "!\langle \mathsf{pr}_2, \mathsf{pr}_1\rangle"] & !(X_2 \mathbin{\&} X_1)
\end{tikzcd}$$

On dit que $(!\_, \mathsf{m}^0, \mathsf{m}^2_{,})$ est une *foncteur monoïdal symétrique* de la catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{L}, \&, \top)$ vers la catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{L}, \otimes, 1)$ (on omet les isomorphismes naturels de structure monoïdale symétrique). C'est la bonne façon catégorique de dire que "$!\_$ envoie le produit cartésien sur le produit tensoriel", ce qui justifie d'ailleurs la terminologie "exponentielle" : le produit cartésien est additif, le produit tensoriel est multiplicatif, à rapprocher de $e^{x+y} = e^x e^y$.

Finalement, il faut encore qu'une condition technique soit satisfaite, qui se traduit par la commutation du diagramme suivant. Ces conditions relient le digging aux isomorphismes de Seely.

$$\begin{tikzcd}
!X \otimes !Y \arrow[r, "\mathsf{m}^2_{X,Y}"] \arrow[dd, "\mathsf{dig}_X \otimes \mathsf{dig}_Y"] & !(X \,\&\, Y) \arrow[d, "\mathsf{dig}_{X\&Y}"] \\
 & !!(X \,\&\, Y) \arrow[d, "!\langle !\mathsf{pr}_1, !\mathsf{pr}_2 \rangle"] \\
!!X \otimes !!Y \arrow[r, "\mathsf{m}^2_{!X,!Y}"] & !(!X \,\&\, !Y)
\end{tikzcd}$$

4.5.6 Derived structures Given $f \in \mathcal{L}(!X, Y)$, we can define $f^! \in \mathcal{L}(!X, !Y)$ by $f^! = !f\ \mathsf{dig}_X$. This is the *unary promotion* of f.

Given more generally $f \in \mathcal{L}(!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n, Y)$ we want now to define an n-ary promotion $f^! \in \mathcal{L}(!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n, !Y)$.

For this we define $\mu^0 \in \mathcal{L}(1, !1)$ and $\mu^2_{X,Y} \in \mathcal{L}(!X \otimes !Y, !(X \otimes Y))$. The first of these morphisms is defined as the following composition of morphisms in $\mathcal{L}$

$$1 \xrightarrow{\mathsf{m}^0} !\top \xrightarrow{\mathsf{dig}_\top} !!\top \xrightarrow{!(\mathsf{m}^0)^{-1}} !1$$

The second morphism is defined as the following composition in $\mathcal{L}$

$$\begin{tikzcd}
!X \otimes !Y \arrow[d, "\mathsf{m}^2_{X,Y}"] & & !(X \otimes Y) \\
!(X \,\&\, Y) \arrow[r, "\mathsf{dig}_{X\&Y}"] & !!(X \,\&\, Y) \arrow[r, "!(\mathsf{m}^2_{X,Y})^{-1}"] & !(!X \otimes !Y) \arrow[u, "!(\mathsf{der}_X \otimes \mathsf{der}_Y)"']
\end{tikzcd}$$

It results straightforwardly from the definition that $\mu^2_{X,Y}$ is natural in X and Y. These two morphisms equip the functor ! with a lax[1] symmetric monoidal structure, from the monoidal category $(\mathcal{L}, 1, \otimes)$ to itself. This means that the following diagrams commute

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes !X \arrow[r, "\mu^0 \otimes !X"] \arrow[ddr, "\lambda_{!X}"'] & !1 \otimes !X \arrow[d, "\mu^2_{1,X}"] \\
 & !(1 \otimes X) \arrow[d, "!\lambda_X"] \\
 & !X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
!X \otimes 1 \arrow[r, "!X \otimes \mu^0"] \arrow[ddr, "\rho_{!X}"'] & !X \otimes !1 \arrow[d, "\mu^2_{X,1}"] \\
 & !(X \otimes 1) \arrow[d, "!\rho_X"] \\
 & !X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(!X \otimes !Y) \otimes !Z \arrow[r, "\mu^2_{X,Y} \otimes !Z"] \arrow[d, "\alpha_{!X,!Y,!Z}"'] & !(X \otimes Y) \otimes !Z \arrow[r, "\mu^2_{X\otimes Y,Z}"] & !((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[d, "!\alpha_{X,Y,Z}"] \\
!X \otimes (!Y \otimes !Z) \arrow[r, "!X \otimes \mu^2_{Y,Z}"] & !X \otimes !(Y \otimes Z) \arrow[r, "\mu^2_{X,Y\otimes Z}"] & !(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

1. "lax" means that the associated natural transformations are not isos in general.

$$\begin{tikzcd}
!X \otimes !Y \arrow[r, "\mu^2_{X,Y}"] \arrow[d, "\sigma_{!X,!Y}"'] & !(X \otimes Y) \arrow[d, "!\sigma_{Y,X}"] \\
!Y \otimes !X \arrow[r, "\mu^2_{Y,X}"] & !(Y \otimes X)
\end{tikzcd}$$

Exercice 4.5.5 Prove that the three diagrams above commute.

If we consider the isomorphisms α as identities (that is, if we identify the objects $(X \otimes Y) \otimes Z$ and $X \otimes (Y \otimes Z)$), then it makes sense to write an n-ary tensor as $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$, without parentheses. This is of course an abuse of notation which can be suitably corrected by inserting parentheses and explicit isomorphisms. The property above of $\mu^2_{,}$ means precisely that, independently of these choices of representations of n-ary tensors, we can canonical morphism

$$\mu^n \in \mathcal{L}(!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_1, !(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n))$$

by combining freely occurrences of $\mu^2_{,}$, the order in which we use them does not matter thanks to the coherence diagrams commutations satisfied by the monoidality isomorphisms associated with $\otimes$ (we can actually even insert 1's and permute factors).

Thanks to these morphisms, we can generalize promotion as follows.

FAUX, A CORRIGER! Let $f \in \mathcal{L}(!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n, Y)$, we have $(f\,\mu^n)^! \in \mathcal{L}(!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n, !Y)$. We simply denote this morphism again as $f^!$ (the only case where this choice can introduce an ambiguity is $n = 1$, and in that case, both notions coincide). Observe that this definition also makes sense when $n = 0$, in which case we have $f \in \mathcal{L}(1, Y)$ and $f^! \in \mathcal{L}(1, !Y)$.

Let $f \in \mathcal{L}(!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n, Y)$. The two following diagrams commute.

$$\begin{tikzcd}
!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n \arrow[r, "f^!"] \arrow[dr, "f"'] & !Y \arrow[d, "\mathsf{der}_Y"] \\
& Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n \arrow[r, "f^!"] \arrow[dr, "(f^!)^!"'] & !Y \arrow[d, "\mathsf{dig}_Y"] \\
& !!Y
\end{tikzcd}$$

Exercice 4.5.6 Prove these commutations.

Exercice 4.5.7 Let $g \in \mathcal{L}(!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n \otimes !Y, Z)$ and $f \in \mathcal{L}(!X_{n+1} \otimes \cdots \otimes !X_p, Y)$. Prove that the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd}
!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_p \arrow[r, "!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n \otimes f^!"] \arrow[dr, "(g\,(!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n \otimes f^!))^!"'] & !X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n \otimes !Y \arrow[d, "g^!"] \\
& !Z
\end{tikzcd}$$

We define now morphisms corresponding to the structural rules of Linear Logic, weakening and contraction. Let X be an object of $\mathcal{L}$. We define $\mathsf{wf}_X \in \mathcal{L}(!X, 1)$ as the following composition of morphisms in $\mathcal{L}$:

$$!X \xrightarrow{!\mathsf{t}_X} !\top \xrightarrow{(\mathsf{m}^0)^{-1}} 1$$

where t_X is the unique element of $\mathcal{L}(X, \top)$ (since $\top$ is the terminal object of $\mathcal{L}$). Similarly, we define $\mathsf{cf}_X \in \mathcal{L}(!X, !X \otimes !X)$ as the following composition of morphisms

$$!X \xrightarrow{!\langle \mathsf{pr}_1, \mathsf{pr}_2 \rangle} !(X \,\&\, X) \xrightarrow{(\mathsf{m}^2_{X,X})^{-1}} !X \otimes !X$$

Then one proves easily (exercise) that $(!X, \mathsf{wf}_X, \mathsf{cf}_X)$ is a symmetric comonoid in the SMC $(\mathcal{L}, 1, \otimes)$ meaning that the following diagrams commute. The first two commutations mean that wf_X is the "neutral element" of this comonoid.

$$\begin{tikzcd} !X \arrow[r, "\mathsf{cf}_X"] \arrow[ddr, "!X"'] & !X \otimes !X \arrow[d, "\mathsf{wf}_X \otimes !X"] \\ & 1 \otimes !X \arrow[d, "\lambda_X"] \\ & !X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} !X \arrow[r, "\mathsf{cf}_X"] \arrow[ddr, "!X"'] & !X \otimes !X \arrow[d, "!X \otimes \mathsf{wf}_X"] \\ & !X \otimes 1 \arrow[d, "\rho_X"] \\ & !X \end{tikzcd}$$

The next diagram expresses the associativity of the comultiplication cf_X.

$$\begin{tikzcd} !X \arrow[r, "\mathsf{cf}_X"] \arrow[d, "!X"'] & !X \otimes !X \arrow[r, "\mathsf{cf}_X \otimes !X"] & (!X \otimes !X) \otimes !X \arrow[d, "\alpha_{!X,!X,!X}"] \\ !X \otimes !X \arrow[rr, "!X \otimes (\mathsf{cf}_X)"] & & !X \otimes (!X \otimes !X) \end{tikzcd}$$

The last diagram expresses commutativity of comultiplication.

$$\begin{tikzcd} !X \arrow[r, "\mathsf{cf}_X"] \arrow[dr, "\mathsf{cf}_X"'] & !X \otimes !X \arrow[d, "\sigma_{!X,!X}"] \\ & !X \otimes !X \end{tikzcd}$$

Exercice 4.5.8 Prove these commutations. Given $f \in \mathcal{L}(!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n, Y)$, prove that the following diagrams commute, where φ and ψ are isos that you will give explicitly.

$$\begin{tikzcd} !X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n \arrow[r, "f^!"] \arrow[d, "\mathsf{wf}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathsf{wf}_{X_n}"'] & !Y \arrow[d, "\mathsf{wf}_Y"] \\ 1 \otimes \cdots \otimes 1 \arrow[r, "\varphi"] & 1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} !X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n \arrow[r, "f^!"] \arrow[d, "\mathsf{cf}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathsf{cf}_{X_n}"'] & !Y \arrow[d, "\mathsf{cf}_Y"] \\ (X_1 \otimes X_1) \otimes \cdots \otimes (X_n \otimes X_n) \arrow[r, "\psi"] & !Y \otimes !Y \end{tikzcd}$$

4.5.7 Catégorie de Kleisli. Il est alors possible de définir une catégorie cartésienne fermée. C'est la catégorie de Kleisli associée à la comonade $!\_$ que l'on note $\mathcal{L}_!$ (la construction de cette catégorie n'utilise que le fait que $!\_$ est une comonade). Les objets de $\mathcal{L}_!$ sont ceux de $\mathcal{L}$, et on a $\mathcal{L}_!(X,Y) = \mathcal{L}(!X,Y)$. L'identité est $\mathsf{der}_X \in \mathcal{L}_!(X,X)$. Etant donnés $f \in \mathcal{L}_!(X,Y)$ et $g \in \mathcal{L}_!(Y,Z)$, la composition est donnée par

$$g \circ f = g\,(!f)\ \mathsf{dig}_X = g\, f^!\,.$$

Exercice 4.5.9 Vérifier que $\mathcal{L}_!$ est bien une catégorie : associativité de la composition, neutralité de der_X pour la composition.

Le reste de la structure permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 4.5.1 *La catégorie $\mathcal{L}_!$ est cartésienne fermée.*

Démonstration. L'objet terminal est $\top$ et le produit cartésien de X_1 et X_2 est $(X_1 \ \& \ X_2, \mathsf{pr}_1 \ \mathsf{der}_{!(X_1 \& X_2)}, \mathsf{pr}_2 \ \mathsf{der}_{!(X_1 \& X_2)})$. En effet, si on se donne $f_i \in \mathcal{L}_!(Z, X_i)$ on a $\langle f_1, f_2 \rangle \in \mathcal{L}_!(Z, X_1 \ \& \ X_2)$ et on peut vérifier que les équations voulues sont satisfaites.

L'objet des morphismes de X vers Y est $(!X \multimap Y, \mathsf{Ev})$ où Ev est défini comme la composition suivante

$$\begin{tikzcd}
!((!X \multimap Y) \ \& \ X) \arrow[r, "(\mathsf{m}^2_{!X\multimap Y, X})^{-1}"] & !(!X \multimap Y) \otimes !X \arrow[r, "\mathsf{der}_{!X \multimap Y} \otimes \mathsf{Id}"] & (!X \multimap Y) \otimes !X \arrow[d, "\mathsf{ev}"'] \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

Soit $f \in \mathcal{L}_!(Z \ \& \ X, Y)$, alors $f \ \mathsf{m}^2_{Z,X} \in \mathcal{L}(!Z \otimes !X, Y)$ et donc

$$\mathsf{Cur}\,(f) = \mathsf{cur}\left(f \ \mathsf{m}^2_{Z,X}\right) \in \mathcal{L}_!(Z, !X \multimap Y)\,.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les équations voulues sont satisfaites. $\square$

4.5.8 Catégories des coalgèbres. Une !-colagèbre est un couple $P = (\underline{P}, \mathsf{h}_P)$ où $\underline{P}$ est un objet de $\mathcal{L}$ et $\mathsf{h}_P \in \mathcal{L}(\underline{P}, !\underline{P})$ vérifie les commutations suivantes

$$\begin{tikzcd}
\underline{P} \arrow[r, "\mathsf{h}_P"] \arrow[dr, "\mathsf{Id}_{\underline{P}}"'] & !\underline{P} \arrow[d, "\mathsf{der}_{\underline{P}}"] \\
& \underline{P}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{P} \arrow[r, "\mathsf{h}_P"] \arrow[d, "\mathsf{h}_P"'] & !\underline{P} \arrow[d, "\mathsf{dig}_{\underline{P}}"] \\
!\underline{P} \arrow[r, "!\mathsf{h}_P"] & !!\underline{P}
\end{tikzcd}$$

Etant donnés deux coalgèbres P et Q, un morphisme de P vers Q est un morphisme $f \in \mathcal{L}(\underline{P}, h_Q)$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\underline{P} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathsf{h}_P"'] & \underline{Q} \arrow[d, "\mathsf{h}_Q"] \\
!\underline{P} \arrow[r, "!f"] & !\underline{Q}
\end{tikzcd}$$

Exercice 4.5.10 Vérifier qu'on a ainsi défini une catégorie (l'identité et la composition sont celles de $\mathcal{L}$).

This category is denoted as $\mathcal{L}^!$ and is called the Eilenberg-Moore category of ! (or, simply, the category of coalgebras of !).

L'objet 1 de $\mathcal{L}$ a une structure de coalgèbre canonique qui est donnée par $\mu^0 \in \mathcal{L}(1, !1)$, see Section 4.5.6. On notera encore 1 cette !-coalgèbre.

Exercice 4.5.11 Vérifier qu'il s'agit bien d'une structure de colagèbre. Pour le second diagramme, il vaut mieux commencer en calculant la composée $!\mathsf{h}_1 \, \mathsf{h}_1$.

4.5.9 Coproducts and products of coalgebras. Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de colagèbres. Sur $X = \bigoplus_{i \in I} \underline{P_i}$, on définit une structure de colagèbre en définissant un morphisme $h \in \mathcal{L}(X, !X)$. Pour chaque $i \in I$, on observe d'abord que $!\mathsf{in}_i \, \mathsf{h}_{P_i} \in \mathcal{L}(\underline{P_i}, !X)$ et donc on pose $h = [!\mathsf{in}_i \, \mathsf{h}_{P_i}]_{i \in I}$. Autrement dit, h est l'unique morphisme de $\mathcal{L}(X, !X)$ tel que $h \, \mathsf{in}_i = !\mathsf{in}_i \, \mathsf{h}_{P_i}$ pour tout $i \in I$.

Let us check that we have defined a coalgebra. We have

$$\begin{aligned}
\mathsf{der}_X\ h &= [\mathsf{der}_X\ !\mathsf{in}_i\ \mathsf{h}_{P_i}]_{i\in I} \\
&= [\mathsf{in}_i\ \mathsf{der}_{h_{P_i}}\ \mathsf{h}_{P_i}]_{i\in I} \\
&= [\mathsf{in}_i]_{i\in I} = \mathsf{Id}_X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{and } !h\,h &= [!h\,!\mathsf{in}_i\,\mathsf{h}_{P_i}]_{i\in I} \\
&= [!(h\,\mathsf{in}_i)\,\mathsf{h}_{P_i}]_{i\in I} \\
&= [!(!\mathsf{in}_i\,\mathsf{h}_{P_i})\,\mathsf{h}_{P_i}]_{i\in I} \\
&= [!!\mathsf{in}_i\,!\mathsf{h}_{P_i}\,\mathsf{h}_{P_i}]_{i\in I} \\
&= [!!\mathsf{in}_i\ \mathsf{dig}_{!h_{P_i}}\ \mathsf{h}_{P_i}]_{i\in I} \\
&= [\mathsf{dig}_X\ !\mathsf{in}_i\,\mathsf{h}_{P_i}]_{i\in I} \\
&= \mathsf{dig}_X\ h
\end{aligned}$$

We use $\bigoplus_{i\in I} P_i$ to denote this coalgebra.

Let P and Q be coalgebras. We endow $X = \underline{P} \otimes \underline{Q}$ with a structure of caolgebra which is defined as the following composition of morphisms in $\mathcal{L}$, that we denote as $\mathsf{h}_{P\otimes Q}$:

$$\underline{P} \otimes \underline{Q} \xrightarrow{\mathsf{h}_P \otimes \mathsf{h}_Q} !\underline{P} \otimes !\underline{Q} \xrightarrow{\mu^2_{\underline{P},\underline{Q}}} !(\underline{P} \otimes \underline{Q})$$

Given any object X of $\mathcal{L}$, we can define an object $\mathsf{E}(X)$ of $\mathcal{L}^!$ as follows : $\mathsf{E}(X) = (!X, \mathsf{dig}_X)$. This is the *free* !-coalgebra generated by X. This operation can be extended into a functor : given $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ then it results from the naturality of dig that $\mathsf{E}(f) = !f \in \mathcal{L}^!(\mathsf{E}(X), \mathsf{E}(Y))$.

Exercice 4.5.12 Let X and Y be objects of $\mathcal{L}$. Prove that the coalgebras $\mathsf{E}(X \mathbin{\&} Y)$ and $\mathsf{E}(X) \otimes \mathsf{E}(Y)$ are isomorphic in the category $\mathcal{L}^!$.

Exercice 4.5.13 Given objects X and Y of $\mathcal{L}$, prove that there is a (natural) bijective correspondence between $\mathcal{L}_!(X,Y)$ and $\mathcal{L}^!(\mathsf{E}(X), \mathsf{E}(Y))$. In other words $\mathcal{L}_!$ can be considered as the category of free coalgebras (this is its intended meaning).

Lemme 4.5.2 *Let R and R' be coalgebras. Let $f \in \mathcal{L}^!(R,R')$ be such that f is an iso in $\mathcal{L}$. Then f is an iso in $\mathcal{L}^!$.*

Exercice 4.5.14 Prove this lemma.

So to prove that a morphism of coalgebras is an iso of coalgebras, it suffices to prove that it is an iso in $\mathcal{L}$.

Proposition 4.5.3 *Let $(P_i)_{i\in I}$ be a countable family of coalgebras and Q be a coalgebra. Then the coalgebras $(\bigoplus_{i\in I} P_i) \otimes Q$ and $\bigoplus_{i\in I}(P_i \otimes Q)$ are isomorphic (naturally) in $\mathcal{L}^!$.*

Démonstration. To define a (natural) morphism $f \in \mathcal{L}^!(\bigoplus_{i\in I}(P_i \otimes Q), (\bigoplus_{i\in I} P_i) \otimes Q)$, it suffices to define $f_i \in \mathcal{L}^!(P_i \otimes Q, (\bigoplus_{j\in I} P_j) \otimes Q)$ for each $i \in I$. We set $f_i = \mathsf{in}_i \otimes Q$. To prove that f is an iso in $\mathcal{L}^!$ it suffices to prove that it has an inverse in $\mathcal{L}$ by Lemma 4.5.2. So we define a morphism $g \in \mathcal{L}((\bigoplus_{i\in I} \underline{P_i}) \otimes \underline{Q}, Y)$ where $Y = \bigoplus_{i\in I}(\underline{P_i} \otimes \underline{Q})$. For this, by monoidal closeness, it suffices to define a morphism $g' \in \mathcal{L}(\bigoplus_{i\in I} \underline{P_i}, \underline{Q} \multimap Y)$. By the universal property of the coproduct, it suffices to define, for each $i \in I$, a morphism $g'_i \in \mathcal{L}(\underline{P_i}, \underline{Q} \multimap Y)$, that is, by monoidal closeness again, a morphism $f'_i \in \mathcal{L}^!(\underline{P_i} \otimes \underline{Q}, Y)$, we take of course $f'_i = \mathsf{in}_i$ (the i-th injection into the coproduct $\bigoplus_{i\in I}(\underline{P_i} \otimes \underline{Q})$). □

Exercice 4.5.15 Complete the proof by showing that g is the (left and right) inverse of f.

4.5.10 Structural structure of coalgebras Let P be a coalgebra. We can endow P with a structure of commutative $\otimes$-comonoid in $\mathcal{L}^!$. This means that we can define a morphism $\mathsf{w}_P \in \mathcal{L}^!(P,1)$ and a morphism $\mathsf{c}_P \in \mathcal{L}^!(P, P\otimes P)$. These morphisms are defined as the following composition of morphisms in $\mathcal{L}$:

$$\underline{P} \xrightarrow{\mathsf{h}_P} !\underline{P} \xrightarrow{\mathsf{wf}_{!\underline{P}}} 1$$

$$\underline{P} \xrightarrow{\mathsf{h}_P} !\underline{P} \xrightarrow{\mathsf{cf}_{!\underline{P}}} !\underline{P} \otimes !\underline{P} \xrightarrow{\mathsf{der}_{\underline{P}} \otimes \mathsf{der}_{\underline{P}}} \underline{P} \otimes \underline{P}$$

where the morphisms $\mathsf{wf}_{!\underline{P}}$ and $\mathsf{cf}_{!\underline{P}}$ are those defined in Section 4.5.6.

Exercice 4.5.16 Prove that w_P and c_P are morphisms of $\mathcal{L}^!$, and that the following diagrams commute, meaning that $(P, \mathsf{w}_P, \mathsf{c}_P)$ is a commutative $\otimes$-comonoid, meaning that the following diagrams commute :

$$\begin{tikzcd}
\underline{P} \arrow[r, "\mathsf{c}_P"] \arrow[ddr, "\underline{P}"'] & \underline{P} \otimes \underline{P} \arrow[d, "\mathsf{w}_P \otimes \underline{P}"] \\
& 1 \otimes \underline{P} \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \\
& \underline{P}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{P} \arrow[r, "\mathsf{c}_P"] \arrow[ddr, "\underline{P}"'] & \underline{P} \otimes \underline{P} \arrow[d, "\underline{P} \otimes \mathsf{w}_P"] \\
& \underline{P} \otimes 1 \arrow[d, "\rho^{-1}"] \\
& \underline{P}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\underline{P} \arrow[r, "\mathsf{c}_P"] \arrow[d, "\mathsf{c}_P"'] & \underline{P} \otimes \underline{P} \arrow[r, "\mathsf{c}_P \otimes \underline{P}"] & (\underline{P} \otimes \underline{P}) \otimes \underline{P} \arrow[d, "\alpha"] \\
\underline{P} \otimes \underline{P} \arrow[rr, "\underline{P} \otimes \mathsf{c}_P"] & & \underline{P} \otimes (\underline{P} \otimes \underline{P})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{P} \arrow[r, "\mathsf{c}_P"] \arrow[dr, "\mathsf{c}_P"'] & \underline{P} \otimes \underline{P} \arrow[d, "\sigma"] \\
& \underline{P} \otimes \underline{P}
\end{tikzcd}$$

Proposition 4.5.4 *Let $f \in \mathcal{L}^!(P,Q)$ be a coalgebra morphism. Then f is a morphism from the comonoid associated with P to the comonoid associated with Q.*

This means that the following two diagrams commute :

$$\begin{tikzcd}
\underline{P} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathsf{w}_P"'] & \underline{Q} \arrow[d, "\mathsf{w}_Q"] \\
& 1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{P} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathsf{c}_P"'] & \underline{Q} \arrow[d, "\mathsf{c}_Q"] \\
\underline{P} \otimes \underline{P} \arrow[r, "f \otimes f"'] & \underline{Q} \otimes \underline{Q}
\end{tikzcd}$$

Exercice 4.5.17 Prove the two commutations above.

Exercice 4.5.18 Prove that, for any object X of $\mathcal{L}$, one has $\mathsf{w}_{\mathsf{E}(X)} = \mathsf{wf}_{!X}$ and $\mathsf{c}_{\mathsf{E}(X)} = \mathsf{cf}_{!X}$.

Exercice 4.5.19 Prove that $P \otimes Q$ is the cartesian product of P and Q in the category $\mathcal{L}^!$ (warning : the proof of this statement is rather painful). Prove also that 1 (equiped with h_1 defined above) is the terminal object of $\mathcal{L}^!$, which is therefore a cartesian category.

Given an object P of $\mathcal{L}^!$ and an object X of $\mathcal{L}$, we define now the *generalized promotion* of a morphism $f \in \mathcal{L}(\underline{P}, X)$: it is the morphism $f^! = !f\, \mathsf{h}_P \in \mathcal{L}(\underline{P}, !X)$.

Exercice 4.5.20 Prove that $f^! \in \mathcal{L}^!(P, \mathsf{E}(X))$ and that the operation $f \mapsto f^!$ is a bijection $\mathcal{L}(\underline{P}, X) \to \mathcal{L}^!(P, \mathsf{E}(X))$ (define its inverse).

Let $\mathsf{U} : \mathcal{L}^! \to \mathcal{L}$ be the forgetful functor defined on objects by $\mathsf{U}(P) = \underline{P}$ and $\mathsf{U}(f) = f$. We have seen essentially that the functor E is *right adjoint* to the functor U. Observe that the functor ! is $\mathsf{U} \circ \mathsf{E}$: this a general phenomenon that any comonad can be described by means of an adjunction (actually by means of many adjunctions : such a decomposition of ! is called a *factorization*). Some people prefer to present models of LL as such adjunctions. The "linear/non linear" presentation of LL categorical semantics is a typical example of this. We prefer the comonadic presentation because it is agnostic on this choice of factorization which reflects a particular veiwpoint on LL.

4.5.11 Subobjects and embedding retraction pairs Remember that a partially ordered set Γ is directed if $\Gamma \neq \emptyset$ and $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \, \exists \gamma \in \Gamma \; \gamma_1 \leq \gamma$ and $\gamma_2 \leq \gamma$.

Exercice 4.5.21 Prove that a partially ordered set is directed iff for any $n \in \mathbb{N}$ and any family $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ of elements of Γ, there is an element γ of Γ such that $\gamma_i \leq \gamma$ for $i = 1, \dots, n$.

Given a class $\mathcal{M}$ equiped with a partial order $\sqsubseteq$, a directed family of elements of $\mathcal{M}$ is an indexed family $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ where Γ is a directed set, $X_\gamma \in \mathcal{M}$ for each $\gamma \in \Gamma$ and $\gamma \leq \gamma' \Rightarrow X_\gamma \sqsubseteq X_{\gamma'}$.

We describe now the categorical structure required for an LL categorical model $\mathcal{L}$ to allow the interpretation of *recursive types*.

We assume to be given an order relation $\sqsubseteq$ on the class of objects of $\mathcal{L}$; we denote as $\mathcal{L}_\sqsubseteq$ the corresponding partially ordered class. This class is also considered as a category with $\mathcal{L}_\sqsubseteq(X, Y) = \{*_{X,Y}\}$ (a singleton set whose unique elements is denoted as $*_{X,Y}$) if $X \sqsubseteq Y$ and $\mathcal{L}_\sqsubseteq(X, Y) = \emptyset$ otherwise, identities and composition defined in the obvious way. We also make the following assumptions :

— 0 (the initial object of $\mathcal{L}$) is also the initial object of $\mathcal{L}_\sqsubseteq$, that is, its least element for the partial order $\sqsubseteq$.

— Any countable directed family $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ of $\mathcal{L}_\sqsubseteq$ has a least upper bound denoted as $\bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$.

We say that the partially ordered class $\mathcal{L}_\sqsubseteq$ is *directed-cocomplete* or is a *complete partially ordered class (cpoc)*.

To make the connection between the partially ordered class $\mathcal{L}_\sqsubseteq$ and the category $\mathcal{L}$, we assume to be given a functor $\mathcal{I} : \mathcal{L}_\sqsubseteq \to \mathcal{L}^{\mathsf{op}} \times \mathcal{L}$ such that $\mathcal{I}(X) = (X, X)$ for each object X of $\mathcal{L}$. Given objects X and Y such that $X \sqsubseteq Y$ we use the notations $\mathsf{i}^-_{X,Y} \in \mathcal{L}(Y, X)$ and $\mathsf{i}^+_{X,Y} \in \mathcal{L}(X, Y)$ for the first and second component of the pair of morphisms $\mathcal{I}(*_{X,Y})$.

So we know that

$$
\begin{aligned}
\mathsf{i}^+_{X,X} &= \mathsf{Id}_X \\
\mathsf{i}^-_{X,X} &= \mathsf{Id}_X \\
X \sqsubseteq Y \sqsubseteq Z \Rightarrow \mathsf{i}^+_{X,Z} &= \mathsf{i}^+_{Y,Z} \, \mathsf{i}^+_{X,Y} \\
X \sqsubseteq Y \sqsubseteq Z \Rightarrow \mathsf{i}^-_{X,Z} &= \mathsf{i}^-_{X,Y} \, \mathsf{i}^-_{Y,Z}
\end{aligned}
$$

We assume moreover that

$$
X \sqsubseteq Y \Rightarrow \mathsf{i}^-_{X,Y} \, \mathsf{i}^+_{X,Y} = \mathsf{Id}_X
$$

This latter property reflects the intuition that X is a subobject of Y, that $\mathsf{i}^+_{X,Y}$ is an embedding morphism of X into Y and that $\mathsf{i}^-_{X,Y}$ is a kind of retraction of Y onto X.

We assume moreover that $\mathcal{I}$ preserves the "directed colimits" that we have assumed to exist in $\mathcal{L}_\sqsubseteq$. This means that the following property holds. Let $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ be a countable directed family of $\mathcal{L}_\sqsubseteq$. For each $\gamma \in \Gamma$, assume that we are given a morphism $f_\gamma \in \mathcal{L}(X_\gamma, Y)$ such that, for each $\gamma, \delta \in \Gamma$, if $\gamma \leq \delta$ then $f_\delta \, \mathsf{i}^+_{X_\gamma, X_\delta} = f_\gamma$ (such a family $(f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ is called a *cocone* to Y based on $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$). Then there is exactly one $f \in \mathcal{L}(\bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma, Y)$ such that

$$
\forall \gamma \in \Gamma \quad f \, \mathsf{i}^+_{X_\gamma, \bigsqcup_{\delta \in \Gamma} X_\delta} = f_\gamma \, .
$$

Observe that, conversely, if we are given $g \in \mathcal{L}(\bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma, Y)$, then we can define $g_\gamma = g\,\mathsf{i}^-_{X_\gamma,\bigsqcup_{\delta\in\Gamma} X_\delta}$ for each $\gamma \in \Gamma$. Then, assuming that $\gamma \le \gamma'$, we have

$$\begin{aligned} g_{\gamma'}\,\mathsf{i}^+_{X_\gamma,X_{\gamma'}} &= g\,\mathsf{i}^-_{Y,\bigsqcup\mathcal{D}}\,\mathsf{i}^+_{X,Y} \\ &= g\,\mathsf{i}^-_{X,\bigsqcup\mathcal{D}}\,\mathsf{i}^-_{X,Y}\,\mathsf{i}^+_{X,Y} \\ &= g_X\,. \end{aligned}$$

So our assumption means that there is a bijection between $\mathcal{L}(\bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma, Y)$ and the sets on all cocones to Y based on $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$.

Exercice 4.5.22 Let Γ_i be directed partially ordered sets for $i = 1, 2$. Prove that $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, equipped with the product order, is directed. Let $(X_{i,\gamma_i})_{\gamma_i\in\Gamma_i}$ be directed families of $\mathcal{L}_\sqsubseteq$ for $i = 1, 2$. Prove that $(X_{1,\gamma_1} \times X_{2,\gamma_2})_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2}$ is directed in $\mathcal{L}^2_\sqsubseteq$ and that

$$\bigsqcup_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2} (X_{1,\gamma_1} \times X_{2,\gamma_2}) = (\bigsqcup_{\gamma_1\in\Gamma_1} X_{\gamma_1}, \bigsqcup_{\gamma_2\in\Gamma_2} X_{\gamma_2})\,.$$

We assume next that all the operations of linear logic are Scott-continuous in the following sense. The next exercise is a useful preliminary observation.

Exercice 4.5.23 Let Γ_i be directed partially ordered sets for $i = 1, 2$. Prove that $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, equipped with the product order, is directed. Let $(X_{i,\gamma_i})_{\gamma_i\in\Gamma_i}$ be directed families of $\mathcal{L}_\sqsubseteq$ for $i = 1, 2$. Prove that $(X_{1,\gamma_1} \times X_{2,\gamma_2})_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2}$ is directed in $\mathcal{L}^2_\sqsubseteq$ and that

$$\bigsqcup_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2} (X_{1,\gamma_1} \times X_{2,\gamma_2}) = (\bigsqcup_{\gamma_1\in\Gamma_1} X_{\gamma_1}, \bigsqcup_{\gamma_2\in\Gamma_2} X_{\gamma_2})\,.$$

We make the following additional hypotheses on $\mathcal{L}$.

— If $X_i \sqsubseteq Y_i$ for $i = 1, 2$ then $X_1 \otimes X_2 \sqsubseteq Y_1 \otimes Y_2$, $\mathsf{i}^+_{X_1\otimes X_2,Y_1\otimes Y_2} = \mathsf{i}^+_{X_1,Y_1} \otimes \mathsf{i}^+_{X_2,Y_2}$ and $\mathsf{i}^-_{X_1\otimes X_2,Y_1\otimes Y_2} = \mathsf{i}^-_{X_1,Y_1} \otimes \mathsf{i}^-_{X_2,Y_2}$.
Moreover, given directed families $(X_{i,\gamma_i})_{\gamma_i\in\Gamma_i}$ of $\mathcal{L}_\sqsubseteq$ for $i = 1, 2$, one has

$$\bigsqcup_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2} X_{\gamma_1} \otimes X_{\gamma_2} = \bigsqcup_{\gamma_1\in\Gamma_1} X_{\gamma_1} \otimes \bigsqcup_{\gamma_2\in\Gamma_1} X_{\gamma_2}$$

— If $X_i \sqsubseteq Y_i$ for $i = 1, 2$ then $X_1 \oplus X_2 \sqsubseteq Y_1 \oplus Y_2$, $\mathsf{i}^+_{X_1\otimes X_2,Y_1\oplus Y_2} = \mathsf{i}^+_{X_1,Y_1} \oplus \mathsf{i}^+_{X_2,Y_2}$ and $\mathsf{i}^-_{X_1\otimes X_2,Y_1\oplus Y_2} = \mathsf{i}^-_{X_1,Y_1} \oplus \mathsf{i}^-_{X_2,Y_2}$.
Moreover, given directed families $(X_{i,\gamma_i})_{\gamma_i\in\Gamma_i}$ of $\mathcal{L}_\sqsubseteq$ for $i = 1, 2$, one has

$$\bigsqcup_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2} X_{\gamma_1} \oplus X_{\gamma_2} = \bigsqcup_{\gamma_1\in\Gamma_1} X_{\gamma_1} \oplus \bigsqcup_{\gamma_2\in\Gamma_1} X_{\gamma_2}$$

— If $X \sqsubseteq Y$ then $X^\perp \sqsubseteq Y^\perp$ (warning : linear negation is covariant), $\mathsf{i}^+_{X^\perp,Y^\perp} = (\mathsf{i}^-_{X,Y})^\perp$ and $\mathsf{i}^-_{X^\perp,Y^\perp} = (\mathsf{i}^+_{X,Y})^\perp$. Moreover, given a directed family $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, we have $\bigsqcup({X_\gamma}^\perp) = (\bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)^\perp$.

— If $X \sqsubseteq Y$ then $!X \sqsubseteq\, !Y$, $\mathsf{i}^+_{!X,!Y} = !(\mathsf{i}^+_{X,Y})$ and $\mathsf{i}^-_{!X,!Y} = !(\mathsf{i}^-_{X,Y})$. Moreover, given a directed family $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, we have $\bigsqcup(!X_\gamma) = !(\bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)$.

It follows If $X_i \sqsubseteq Y_i$ for $i = 1, 2$ then $X_1 \multimap X_2 \sqsubseteq Y_1 \multimap Y_2$, $\mathsf{i}^+_{X_1\multimap X_2,Y_1\multimap Y_2} = \mathsf{i}^-_{X_1,Y_1} \multimap \mathsf{i}^+_{X_2,Y_2}$ and $\mathsf{i}^-_{X_1\multimap X_2,Y_1\multimap Y_2} = \mathsf{i}^+_{X_1,Y_1} \multimap \mathsf{i}^-_{X_2,Y_2}$.

Moreover, given directed families $(X_{i,\gamma_i})_{\gamma_i\in\Gamma_i}$ of $\mathcal{L}_\sqsubseteq$ for $i = 1, 2$, one has

$$\bigsqcup_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2} (X_{\gamma_1} \multimap X_{\gamma_2}) = \bigsqcup_{\gamma_1\in\Gamma_1} X_{\gamma_1} \multimap \bigsqcup_{\gamma_2\in\Gamma_1} X_{\gamma_2}$$

We need to extend this notion of embedding-retraction pair to !-coalgebras because we want to define fix-points of positive types. Let ${\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq}$ be the partially ordered class whose elements are those of $\mathcal{L}^!$ and where $P \sqsubseteq Q$ if $\underline{P} \sqsubseteq \underline{Q}$ (in $\mathcal{L}_{\sqsubseteq}$ of course) and $\mathsf{i}^+_{\underline{P},\underline{Q}} \in \mathcal{L}^!(P, Q)$. In this definition, it is important *not to require* $\mathsf{i}^-_{\underline{P},\underline{Q}}$ to be a coalgebra morphism. We still use U for the obvious forgetful functor ${\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq} \to \mathcal{L}_{\sqsubseteq}$. Observe that $\otimes$ and $\oplus$ define functors $({\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq})^2 \to {\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq}$ and that $!\_$ defines a functor $\mathcal{L}_{\sqsubseteq} \to {\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq}$.

Let $(P_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ be a directed family in ${\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq}$. Let $X = \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} \underline{P_\gamma}$. We want to equip X with a structure of !-coalgebra, so we need to define a morphism $h \in \mathcal{L}(X, !X)$. For this, it suffices to define, for each $\gamma \in \Gamma$, a morphism $h(\gamma) \in \mathcal{L}(\underline{P_\gamma}, !X)$ in such a way that

$$\gamma \leq \gamma' \Rightarrow h(\gamma')\, \mathsf{i}^+_{\underline{P_\gamma},\underline{P_{\gamma'}}} = h(\gamma)\,. \tag{4.1}$$

For $\gamma \in \Gamma$, we set $h(\gamma) = !\mathsf{i}^+_{\underline{P_\gamma},X}\, \mathsf{h}_{P_\gamma}$. Condition (4.1) holds thanks to to the fact that if $P \sqsubseteq Q$ in ${\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq}$ then $\mathsf{i}^+_{\underline{P},\underline{Q}}$ is a coalgebra morphism. We know that there is exactly one morphism $h \in \mathcal{L}(X, !X)$ such that $\forall\gamma \in \Gamma\ h\, \mathsf{i}^+_{\underline{P_\gamma},X} = !(\mathsf{i}^+_{\underline{P_\gamma},)}\, \mathsf{h}_{P_\gamma}$.

To prove that $\mathsf{der}_X\ h = \mathsf{Id}_X$, it suffices to prove that $\forall\gamma \in \Gamma\ \ \mathsf{der}_X\ h\, \mathsf{i}^+_{\underline{P_\gamma},X} = \mathsf{i}^+_{\underline{P_\gamma},X}$. We have $\forall\gamma \in \Gamma\ \ \mathsf{der}_X\ h\, \mathsf{i}^+_{\underline{P_\gamma},X} = \mathsf{der}_X\ !(\mathsf{i}^+_{\underline{P_\gamma},X})\, \mathsf{h}_{P_\gamma} = \mathsf{i}^+_{\underline{P_\gamma},X}\ \mathsf{der}_{\underline{P_\gamma}}\ \mathsf{h}_{P_\gamma} = \mathsf{i}^+_{\underline{P_\gamma},X}$.

Exercice 4.5.24 Prove similarly that $\mathsf{dig}_X\ h = !h\, h$.

So (X, h) is a !-coalgebra, that we denote as $\bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} P_\gamma$. Therefore ${\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq}$ is a cpoc, with least element 0.

Given cpoc's $\mathcal{M}$ and $\mathcal{M}'$, a functional (this means "function", but acting on a class rather than on a set) is *continuous* if its is monotone and commute with countable directed lubs.

Proposition 4.5.5 *$\otimes$ and $\oplus$ are continuous functionals from $({\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq})^2$ to ${\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq}$. "!" is a continuous functional $!\_ : \mathcal{L}_{\sqsubseteq} \to {\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq}$. The functional $\multimap : (\mathcal{L}_{\sqsubseteq})^2 \to \mathcal{L}_{\sqsubseteq}$ is continuous.*

Exercice 4.5.25 Prove this proposition.

Théorème 4.5.6 *Let $\Phi : ({\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq})^{n+1} \to {\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq}$ be a continuous functional. There is a continuous functional $\overline{\mathsf{Fix}}(\Phi) : ({\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq})^n \to {\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq}$ which is equal to the functional $\Psi : ({\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq})^n \to {\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq}$ defined by $\Psi(P_1, \dots, P_n) = \Phi(P_1, \dots, P_n, \overline{\mathsf{Fix}}(\Phi)(P_1, \dots, P_n))$.*

Démonstration. Let $\vec{P} = (P_1, \dots, P_n)$ be a tuple of objects of $\mathcal{L}^!$. Consider the funciolan $\Phi_{\vec{P}} : {\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq} \to {\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq}$ defined by $\Phi_{\vec{P}}(P) = \Phi(\vec{P}, P)$. Consider the set of natural numbers equipped with the usual order relation as a directed set. We define a directed family $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in ${\mathcal{L}^!}_{\sqsubseteq}$ as follows. First, we set $P_i = \Phi^i_{\vec{P}}(0)$. Since Φ is monotone, we have $P_i \sqsubseteq P_{i+1}$ for all $i \in \mathbb{N}$. We set $\overline{\mathsf{Fix}}(\Phi)(\vec{P}) = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} P_i$. Then the announced equality of objects holds by continuity of Φ. □

Exercice 4.5.26 Complete the proof above by showing that the functional $\overline{\mathsf{Fix}}(\Phi)$ is monotone and continuous.

4.5.12 Fixpoints. Let X be an object of $\mathcal{L}$. We want to define a morphism $\overline{\mathsf{fix}} \in \mathcal{L}_!(X \to X, X) = \mathcal{L}(!(!X \multimap X), X)$ which will be used for interpreting the fixpoint operator of PCF. This means that, given $f \in \mathcal{L}_!(Y, X \to X)$, the following diagram should commute in $\mathcal{L}_!$:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\langle f, \overline{\mathsf{fix}} \circ f\rangle"'] & X \to X \arrow[d, "\overline{\mathsf{fix}}"] \\
(X \to X)\ \&\ X \arrow[r, "\mathsf{Ev}"] & X
\end{tikzcd}$$

For this purpose, we define an operator

$$\mathcal{Y} : \mathcal{L}_!(X \to X, X) \to \mathcal{L}_!(X \to X, X)$$

as follows : given $F \in \mathcal{L}(X \to X, X)$ we define $\mathcal{Y}(F) \in \mathcal{L}(X \to X, X)$ as the following composition in $\mathcal{L}_!$ (not in $\mathcal{L}$, take care !) :

$$X \to X \xrightarrow{\langle \mathsf{Id}, F\rangle} (X \to X) \mathbin{\&} X \xrightarrow{\mathsf{Ev}} X$$

In $\mathcal{L}$ now, this morphism $\mathcal{Y}$ can be written equivalently as the following composition of morphisms

$$!(!X \multimap X) \xrightarrow{\mathsf{c}_{!X\multimap X}} !(!X \multimap X) \otimes !(!X \multimap X) \xrightarrow{\mathsf{der}_{!X\multimap X} \otimes F^!} (!X \multimap X) \otimes !X \xrightarrow{\mathsf{ev}} X$$

Then $\overline{\mathsf{fix}}$ will be chosen as a morphism such that $\mathcal{Y}(\overline{\mathsf{fix}}) = \overline{\mathsf{fix}}$, if available (often, there is an order relation around and $\overline{\mathsf{fix}}$ can be defined as least fixpoint). Indeed, if this equation hold, we have

$$\begin{aligned}
\overline{\mathsf{fix}} \circ f &= \mathcal{Y}(\overline{\mathsf{fix}}) \circ f \\
&= \mathsf{Ev} \circ \langle \mathsf{Id}, \overline{\mathsf{fix}}\rangle \circ f \\
&= \mathsf{Ev} \circ \langle f, \overline{\mathsf{fix}} \circ f\rangle
\end{aligned}$$

which is exactly the expected commutation.

The trick is to define $\overline{\mathsf{fix}}$ as a fixpoint of a higher type operator : this garantees that $\overline{\mathsf{fix}}$ is a morphism in the category $\mathcal{L}_!$.

This ends the presentation of the categorical material needed to interpret the CBPV language of Chapter 3.

4.6 Semantics of CBPV in a model of LL

We explain now how types and programs of the programming language presented in Chapter 3 can be interpreted in any model of LL.

4.6.1 Interpreting types. First, we interpret types. With any positive type φ and any list $\vec{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ of type variables containing all the free variables of φ, we associate a continuous functional $[\varphi]^!_{\vec{\zeta}} : {\mathcal{L}^!}^k_{\sqsubseteq} \to \mathcal{L}^!_{\sqsubseteq}$. Simultaneously, with any general type σ and any list $\vec{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ of type variables containing all the free variables of σ, we associate a continuous functional $[\sigma]_{\vec{\zeta}} : {\mathcal{L}^!}^k_{\sqsubseteq} \to \mathcal{L}_{\sqsubseteq}$.

We set

$$\begin{aligned}
[\zeta_i]^!_{\vec{\zeta}}(\vec{P}) &= P_i \\
[!\sigma]^!_{\vec{\zeta}}(\vec{P}) &= !([\sigma]_{\vec{\zeta}}(\vec{P})) \\
[\varphi_1 \otimes \varphi_2]^!_{\vec{\zeta}}(\vec{P}) &= [\varphi_1]^!_{\vec{\zeta}}(\vec{P}) \otimes [\varphi_2]^!_{\vec{\zeta}}(\vec{P}) \\
[\varphi_1 \oplus \varphi_2]^!_{\vec{\zeta}}(\vec{P}) &= [\varphi_1]^!_{\vec{\zeta}}(\vec{P}) \oplus [\varphi_2]^!_{\vec{\zeta}}(\vec{P})
\end{aligned}$$

Let φ be a positive type and ζ not occurring in $\vec{\zeta}$, then $[\varphi]^!_{\vec{\zeta},\zeta}$ is a continuous functional ${\mathcal{L}^!}^k_{\sqsubseteq} \times \mathcal{L}^!_{\sqsubseteq} \to \mathcal{L}^!_{\sqsubseteq}$. So by Theorem 4.5.6 we have a continuous functional $\overline{\mathsf{Fix}}([\varphi]^!_{\vec{\zeta},\zeta}) : {\mathcal{L}^!}^k_{\sqsubseteq} \to \mathcal{L}^!_{\sqsubseteq}$ and we set $[\mathsf{Fix}\,\zeta \cdot \varphi]^!_{\vec{\zeta}} = \overline{\mathsf{Fix}}([\varphi]^!_{\vec{\zeta},\zeta})$.

We define now the interpretation of general types :

$$\begin{aligned}
[\varphi]_{\vec{\zeta}}(\vec{P}) &= \underline{[\varphi]^!_{\vec{\zeta}}(\vec{P})} \\
[\psi \multimap \tau]_{\vec{\zeta}}(\vec{P}) &= \underline{[\varphi]^!_{\vec{\zeta}}(\vec{P})} \multimap [\tau]_{\vec{\zeta}}(\vec{P})
\end{aligned}$$

Lemme 4.6.1 *With the notations above,* $[\mathsf{Fix}\,\zeta\cdot\varphi]^!_{\vec{\zeta}} = [\varphi\,[\mathsf{Fix}\,\zeta\cdot\varphi/\zeta]]^!_{\vec{\zeta}}$.

Démonstration. One applies Theorem 4.5.6, showing that if φ and ψ are positive types and $\vec{\zeta}$ is repetition-free and contains all the free variables of ψ, and if ζ is not in $\vec{\zeta}$ and is such that $\vec{\zeta},\zeta$ contains all the free variables of φ, then one has $[\varphi\,[\psi/\zeta]]^!(\vec{P}) = [\varphi]^!_{\vec{\zeta},\zeta}(\vec{P},[\psi]^!_{\vec{\zeta}}(\vec{P}))$. This is obtained by a simple induction on φ. □

If φ is closed, then $[\varphi]^!$ is an object of $\mathcal{L}^!$ and if σ is closed then $[\sigma]$ is an object of $\mathcal{L}$. Notice that $[\varphi] = \underline{[\varphi]^!}$.

Let $\mathcal{P} = (x_1 : \varphi_1, \dots, x_k : \varphi_k)$ be a typing context. Then we set $[\mathcal{P}]^! = [\varphi_1]^! \otimes \cdots \otimes [\varphi_k]^!$, which is an object of $\mathcal{L}^!$.

4.6.2 Interpreting terms. Given a term M and a typing context $\mathcal{P}$ such that there is a type σ with $\mathcal{P} \vdash M : \sigma$, observe that there is only one such type σ and that the typinge derivation of $\mathcal{P} \vdash M : \sigma$ is uniquely determined : on says that typing is *syntax-driven*.

If $\mathcal{P} \vdash M : \sigma$, we define $[M]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}],[\sigma])$. The definition is by induction on the typing derivation, that is, by induction on M.

If $M = x_i$ then $\sigma = \varphi_i$ and $[M]_{\mathcal{P}}$ is defined as the following composition of morphisms in $\mathcal{L}$:

$$\begin{array}{ccc} [\varphi_1]\otimes\cdots\otimes[\varphi_{i-1}]\otimes[\varphi_i]\otimes[\varphi_{i+1}]\otimes\cdots\otimes[\varphi_k] & \longrightarrow & 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes[\varphi_i]\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1 \\ & & \downarrow \\ & & [\varphi_i] \end{array}$$

where the first morphism is obtained by tensoring weakening morphisms w_{P_j} for $j \neq i$ with the identity at $[\varphi_i]$ and a the second one is a monoidal isomorphism. So $[M]_{\mathcal{P}}$ is the i-th projection in the cartesian category $\mathcal{L}^!$ (whose cartesian product is $\otimes$). Observe that $[M]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}^!([\mathcal{P}]^!,[\varphi_i]^!)$.

We denote this projection $\mathsf{pr}_i^{\otimes}$.

If $M = N^!$ with $\mathcal{P} \vdash N : \tau$ and $\sigma = !\tau$ then we know by inductive hypothesis that $[N]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}],[\tau])$ and therefore ${[N]_{\mathcal{P}}}^! \in \mathcal{L}^!([\mathcal{P}]^!, ![\tau])$ (we use the fact that $[\mathcal{P}] = \underline{[\mathcal{P}]^!}$ and the generalized promotion operation defined in Section 4.5.10). So we set $[M]_{\mathcal{P}} = {[N]_{\mathcal{P}}}^! \in \mathcal{L}^!([\mathcal{P}]^!, [!\tau]^!)$.

If $M = \langle M_1, M_2\rangle$ with $\mathcal{P} \vdash M_i : \varphi_i$ for $i = 1,2$ and $\sigma = \varphi_1 \otimes \varphi_2$, then we have $[M_i]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}],[\varphi_i])$. Then we define $[M]_{\mathcal{P}}$ as the following composition of morphisms :

$$[\mathcal{P}] \xrightarrow{\mathsf{c}_{[\mathcal{P}]^!}} [\mathcal{P}]\otimes[\mathcal{P}] \xrightarrow{[M_1]_{\mathcal{P}}\otimes[M_2]_{\mathcal{P}}} [\varphi_1]\otimes[\varphi_2]$$

So that $[M]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}],[\sigma])$. Observe that if $[M_i]_{\mathcal{P}}$ are !-coalgebra morphisms, that is, if $[M_i]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}^!([\mathcal{P}]^!,[\varphi_i]^!)$ for $i = 1,2$, then that $[M]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}^!([\mathcal{P}]^!,[\varphi_1]^!\otimes[\varphi_2]^!)$.

If $M = \mathsf{in}_i N$ with $\mathcal{P} \vdash N : \varphi_i$ for $i = 1$ or $i = 2$, and $\sigma = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ then by inductive hypothesis we have $[M]_{\mathcal{P}} = \mathsf{in}_i\,[N]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}],[\varphi_1]\oplus[\varphi_2])$. Observe that, if $[N]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}^!([\mathcal{P}]^!,[\varphi_i]^!)$, then $[M]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}^!([\mathcal{P}]^!,[\varphi_1]^!\oplus[\varphi_2]^!)$.

If $M = \lambda x^{\psi}\,N$ with $\mathcal{P}, x : \psi \vdash N : \tau$ and $\sigma = \varphi \multimap \tau$ so that, we have $[N]_{\mathcal{P},x:\psi} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}]\otimes[\psi],[\tau])$ and we set $[M]_{\mathcal{P}} = \mathsf{cur}\,([N]_{\mathcal{P},x:\psi}) \in \mathcal{L}([\mathcal{P}],[\psi]\multimap[\tau])$.

If $M = \langle N\rangle R$ with $\mathcal{P} \vdash N : \psi \multimap \sigma$ and $\mathcal{P} \vdash R : \psi$ then we have $[N]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}],[\psi]\multimap[\tau])$ and $[R]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}],[\psi])$ then we set $[M]_{\mathcal{P}} = \mathsf{ev}\,([N]_{\mathcal{P}}\otimes[R]_{\mathcal{P}})\;\mathsf{c}_{[\mathcal{P}]^!} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}],[\sigma])$.

If $M = \mathsf{der}(N)$ with $\mathcal{P} \vdash N : !\sigma$ then we have $[N]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}],![\sigma])$ and we set $[M]_{\mathcal{P}} = \mathsf{der}_{[\sigma]}\,[N]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}],[\sigma])$.

If $M = \mathsf{pr}_i N$ with $i = 1$ or $i = 2$, $\mathcal{P} \vdash N : \varphi_1 \otimes \varphi_2$ and $\sigma = \varphi_i$ so that $[N]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}],[\varphi_1]\otimes[\varphi_2])$ and we set $[M]_{\mathcal{P}} = \mathsf{pr}_i^{\otimes}\,[N]_{\mathcal{P}}$ (remember that $\mathsf{pr}_i^{\otimes}$ is the i-th projection of the cartesian product $\otimes$ of $\mathcal{L}^!$, the definition is recorded above).

If $M = \mathsf{case}(N, x_1\cdot R_1, x_2\cdot R_2)$ with $\mathcal{P} \vdash N : \varphi_1 \oplus \varphi_2$ and $\mathcal{P}, x_i : \varphi_i \vdash R_i : \sigma$ for $i = 1,2$, then we have $[N]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}],[\varphi_1]\oplus[\varphi_2])$ and $[R_i]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}]\otimes[\varphi_i],[\sigma])$ for $i = 1,2$. By Proposition 4.5.3, we have a canonical and natural iso

$$\chi \in \mathcal{L}^!([\mathcal{P}]\otimes([\varphi_1]\oplus[\varphi_2]), ([\mathcal{P}]\otimes[\varphi_1])\oplus([\mathcal{P}]\otimes[\varphi_2]))\,.$$

We set $[M]_{\mathcal{P}} = [[R_1]_{\mathcal{P}}, [R_2]_{\mathcal{P}}]\, \chi(\mathcal{P} \otimes [N]_{\mathcal{P}})\ \mathsf{c}_{[\mathcal{P}]^!}$ (remember that $[[R_1]_{\mathcal{P}}, [R_2]_{\mathcal{P}}]$ is the "cotupling" of $[R_1]_{\mathcal{P}}$ and $[R_2]_{\mathcal{P}}$, see Section 4.5.9).

Last, if $M = \mathsf{fix}\, x^{!\sigma}\, N$ with $\mathcal{P}, x : !\sigma \vdash N : \sigma$ then we have $[N]_{\mathcal{P},x:!\sigma} \in \mathcal{L}([\mathcal{P}] \otimes ![\sigma], [\sigma])$ so that $\mathsf{cur}\,([N]_{\mathcal{P},x:!\sigma}) \in \mathcal{L}([\mathcal{P}], ![\sigma] \multimap [\sigma])$ and hence

$$\left(\mathsf{cur}\,([N]_{\mathcal{P},x:!\sigma})\right)^! \in \mathcal{L}([\mathcal{P}], !(![\sigma] \multimap [\sigma]))$$

using that fact that $[\mathcal{P}] = \underline{[\mathcal{P}]^!}$. We set $[M]_{\mathcal{P}} = \overline{\mathsf{fix}}\left(\mathsf{cur}\,([N]_{\mathcal{P},x:!\sigma})\right)^!$.

This ends the definition of the interpretation of types and terms.

The first crucial observation is the following.

Proposition 4.6.2 *If $\mathcal{P} \vdash V : \varphi$ and V is a value, then $[V]_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}^!([\mathcal{P}]^!, [\varphi]^!)$.*

The proof is by simple inspection of the definition of the interpretation of terms above, four first cases which corresponds to the value constructors.

Proposition 4.6.3 (Substitution Lemma) *If $\mathcal{P}, x : \varphi \vdash M : \sigma$ and $\mathcal{P} \vdash V : \varphi$, then*

$$[M\,[V/x]]_{\mathcal{P}} = [M]_{\mathcal{P},x:\varphi}\,(\mathcal{P} \otimes [V]_{\mathcal{P}})\ \mathsf{c}_{[\mathcal{P}]^!}\ .$$

Exercice 4.6.1 Prove this proposition, by induction on M. The proof uses in an essential way Proposition 4.6.2 which allow $[V]_{\mathcal{P}}$ to commute with the structural rules and promotion boxes which appear in the interpretation of M.

An easy consequence of this lemma is the invariance of this interpretation under reduction.

Théorème 4.6.4 *If $\mathcal{P} \vdash M : \sigma$ and $M \to_{\mathsf{w}} M'$ the $[M]_{\mathcal{P}} = [M']_{\mathcal{P}}$.*

Exercice 4.6.2 Prove the theorem, by induction on the derivation of the reduction $M \to_{\mathsf{w}} M'$ in the definition of weak reduction in Section 3.2.

Chapitre 5

Un peu de théorie des domaines

Ce chapitre n'est pas essentiel pour la suite ; il est surtout là pour la culture générale. Il présente des notions plus générales que celles sur lesquelles nous concentrerons notre attention à partir de la section 5.3, à laquelle on peut sauter directement. On trouvera plus de détails sur ce sujet dans [AC98].

5.1 Domaines de Scott

Si X est un ensemble partiellement ordonné (la relation d'ordre sera toujours notée $\leq$), un sous-ensemble D de X est dit *filtrant* s'il est filtrant pour l'ordre de X restreint à D. Autrement dit : D est non vide, et $\forall x, y \in D \, \exists z \in D \; x \leq z$ et $y \leq z$.

Si une partie C de X a un sup, ce sup sera toujours noté $\bigvee C$. Le sup de deux éléments $x, y \in X$, s'il existe, sera noté $x \vee y$.

Un *cpo* (*ordre partiel complet*) est un ordre partiel dans lequel toutes les parties filtrantes ont un sup. Autrement dit, toute famille filtrante $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ croissante d'éléments de X doit avoir un sup $\bigvee_{\gamma\in G} x_\gamma \in X$.

Un élément x_0 d'un cpo X est dit *isolé* (on dit souvent *compact* mais ce n'est pas une très bonne terminologie) si, pour toute partie filtrante D de X, on a

$$x_0 \leq \bigvee D \Rightarrow \exists x \in D \; x_0 \leq x$$

(la réciproque étant toujours vraie). L'intuition est qu'un élément isolé est «fini». Par exemple, si $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ordonné par l'inclusion, les isolés de D sont les parties finies de $\mathbb{N}$.

Lemme 5.1.1 *Soit X un cpo et $B \subseteq X$ un ensemble fini d'éléments isolés de X. Si B a un sup, alors $\bigvee B$ est isolé.*

Démonstration. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les éléments de B. Soit $D \subseteq X$ une partie filtrante telle que $\bigvee B \leq \bigvee D$, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \leq \bigvee D$. Comme x_i est isolé et D est filtrant, il existe $y_i \in D$ tel que $x_i \leq y_i$. Comme D est filtrant, il existe $y \in D$ tel que $y_i \leq y$ pour tout i. On a $\bigvee B \leq y$. □

Un *domaine de Scott* est un cpo X tel que

1. toute partie bornée de X a un sup (en particulier la partie vide a un sup, donc X a un élément minimal, qu'on note $\perp$) ;
2. l'ensemble des éléments isolés de X est dénombrable ;
3. tout élément de x est le sup de l'ensemble de ses minorants isolés (on dit que X est *algébrique*).

La condition correspondant à la conjonction des deux dernières conditions est souvent appelée *ω-algébricité*. Observer que, par la condition (1), et par le lemme 5.1.1, l'ensemble des minorants isolés d'un élément est filtrant.

Lemme 5.1.2 *Soit X un domaine de Scott et soient $x, y \in X$. On a $x \leq y$ si et seulement si, pour tout élément isolé x_0 de X, si $x_0 \leq x$, alors $x_0 \leq y$.*

Exercice 5.1.1 Prouver ce lemme.

Exercice 5.1.2 Soit X l'ensemble des fonctions partielles de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, ordonnées par l'inclusion des graphes (autrement dit, $f \leq g$ si le domaine de f est contenu dans celui de g et f et g coïncident sur le domaine de f). Montrer que X est un domaine de Scott.

Soient X et Y deux ensembles partiellement ordonnés. Soit $f : X \to Y$ une fonction croissante. Si $D \subseteq X$ est filtrant dans X, alors $f(X)$ est filtrant dans Y. Supposons que X et Y sont des cpo. Alors $f : X \to Y$ est *continue* si

— f est croissante (et donc l'image par f de toute partie filtrante de X est filtrante dans Y)

— et pour tout $D \subseteq X$ filtrant, on a $f(\bigvee D) = \bigvee f(D)$.

Observer que, dès que f est croissante, on a $\bigvee f(D) \leq f(\bigvee D)$. Donc, pour montrer qu'une fonction croissante f est continue, il suffit de montrer que, pour toute partie filtrante D, on a $f(\bigvee D) \leq \bigvee f(D)$.

L'exercice suivant est essentiel pour comprendre l'intuition derrière cette définition, dans le cas des domaines de Scott : une fonction est continue si, pour obtenir une information finie sur le résultat, il suffit d'une information finie sur l'argument.

Exercice 5.1.3 Soient X et Y des domaines de Scott et soit $f : X \to Y$ une fonction. Alors f est continue si et seulement si

— f est croissante

— et, pour tout $x \in X$ et tout élément isolé y_0 de Y, si $y_0 \leq f(x)$, il existe un élément isolé x_0 de X tel que $x_0 \leq x$ et $y_0 \leq f(x_0)$.

Exercice 5.1.4 Soient X et Y des domaines de Scott et soit $f : X \to Y$ une fonction croissante. Montrer que f est continue si et seulement si, pour toute suite croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X, on a $f(\bigvee_{n=0}^{\infty} x_n) = \bigvee_{n=0}^{\infty} f(x_n)$. [*Indication:* utiliser le fait que X a un nombre au plus dénombrable d'élements isolés.]

Soit $\mathbb{O}$ le domaine de Scott $\mathbb{O} = \{\bot < \top\}$. Soit X un domaine de Scott. On dit que $U \subseteq X$ est un *ouvert de Scott* si la «fonction caractéristique» de U, de X vers $\mathbb{O}$, qui envoie x sur $\top$ si $x \in U$ et sur $\bot$ sinon, est continue. Autrement dit, $U \subseteq X$ est un ouvert de Scott si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

— si $x \in U$ et $x \leq y$, alors $y \in U$;

— pour toute partie filtrante D de X, si $\bigvee D \in U$, alors $U \cap D \neq \emptyset$.

Exercice 5.1.5 Soit X un domaine de Scott. Montrer que les ouverts de Scott définissent une topologie sur X, et que cette topologie est *séparée au sens T_0* : si $x, y \in X$ sont distincts, alors il existe un ouvert U tel que $x \in U$ et $y \notin U$, ou un ouvert U tel que $y \in U$ et $x \notin U$. C'est la notion la plus faible de séparation on topologie.

Exercice 5.1.6 Soient X et Y des domaines de Scott. Montrer qu'une fonction $f : X \to Y$ est continue (au sens ci-dessus) si et seulement si f est continue au sens de la *topologie de Scott* qu'on vient de définir sur X et sur Y.

5.2 La catégorie des domaines de Scott.

Soit **Scott** la catégorie dont les objets sont les domaines de Scott et les morphismes sont les fonctions continues (il est clair que l'identité est continue et que la composée de deux fonctions continues et continue, donc il s'agit bien d'une catégorie).

Proposition 5.2.1 *La catégorie* **Scott** *est cartésienne.*

Démonstration. L'objet terminal est $\{\bot\}$. Le produit cartésien de deux domaines de Scott X_1 et X_2 est l'ensemble $X_1 \times X_2$, avec l'ordre produit ($(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ si $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$). On notera aussi ce produit $X_1 \,\&\, X_2$. Les projections sont définies de façon standard.

Exercice 5.2.1 Vérifier que $X_1 \,\&\, X_2$ est bien un domaine de Scott. Il faudra vérifier en particulier que (x, y) est isolé si et seulement si x et y le sont.

$\square$

La remarque suivante nous sera utile dans la suite.

Lemme 5.2.2 *Soient X, Y et Z des domaines de Scott et soit $f : X \,\&\, Y \to Z$ une fonction croissante. Alors f est continue si et seulement si, pour toutes $D \subseteq X$ et $E \subseteq Y$ filtrantes, on a*

$$f(\bigvee D, \bigvee E) = \bigvee f(D \times E)\,.$$

Démonstration. On suppose d'abord f continue est on prend D et E comme dans l'énoncé du lemme. Alors $D \times E$ est une partie filtrante de $X \,\&\, Y$, dont le sup est clairement $(\bigvee D, \bigvee E)$. Donc on a bien l'égalité voulue.

Pour la réciproque, soit $F \subseteq X \,\&\, Y$ une partie filtrante. Soit $D = \mathsf{pr}_1(F)$ et $E = \mathsf{pr}_2(F)$, ce sont des parties filtrantes de X et Y respectivement. On a $\bigvee F = (\bigvee D, \bigvee E)$, car les projections sont continues. On doit montrer que $f(\bigvee F) \leq \bigvee f(F)$. Or, par hypothèse,

$$f(\bigvee F) = f(\bigvee D, \bigvee E) = \bigvee f(D \times E)$$

et il s'agit donc de vérifier que $\bigvee f(D \times E) \leq f(F)$. Pour cela, il suffit de montrer que tout élément de $D \times E$ est majoré par un élément de F dans $X \,\&\, Y$. Si $(x, y) \in D \times E$, on peut trouver $x' \in X$ et $y' \in Y$ tels que $(x, y'), (x', y) \in F$, et comme F est filtrant, on peut trouver $(x'', y'') \in F$ tel que $(x'', y'') \geq (x, y'), (x', y)$, et donc $(x'', y'') \geq (x, y)$. $\square$

Exercice 5.2.2 Déduire de ce lemme qu'une fonction $f : X \,\&\, Y \to Z$ est continue si et seulement si elle est séparément continue (*i.e.* pour chaque $x \in X$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ et continue, et pour tout $y \in Y$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue). Cette propriété est-elle vraie des fonctions $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Exercice 5.2.3 Soient X et Y deux domaines de Scott et $f, g : X \to Y$ deux fonctions continues. L'ensemble $Z = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$, muni de la relation d'ordre induite par celle de X, est-il un domaine de Scott ?

Théorème 5.2.3 *La catégorie* **Scott** *est cartésienne fermée.*

Démonstration. Soient X et Y des domaines de Scott. Soit $X \Rightarrow Y$ l'ensemble des fonctions continues de X vers Y, muni de la relation d'ordre dite *ordre extensionnel* :

$$f \leq g \quad \text{si} \quad \forall x \in X \;\, f(x) \leq g(x)\,.$$

On va vérifier que $X \Rightarrow Y$, avec cette relation d'ordre, est un domaine de Scott.

Soit $\mathcal{D} \subseteq X \Rightarrow Y$ un ensemble filtrant. Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x) \mid f \in \mathcal{D}\} \subseteq Y$ est filtrant. Soit $h : X \to Y$ définie par $h(x) = \bigvee_{f \in \mathcal{D}} f(x)$. Alors h est croissante (le vérifier). Soit D une partie filtrante de X. On doit montrer que $h(\bigvee D) \leq \bigvee_{x \in D} h(x)$.

Comme chaque $f \in \mathcal{D}$ est continue, on a

$$h(\bigvee D) = \bigvee_{f \in \mathcal{D}} \bigvee_{x \in D} f(x)\,.$$

Il suffit donc de voir que, pour tout $f \in \mathcal{D}$, on a $\bigvee_{x \in D} f(x) \leq \bigvee_{x \in D} h(x)$, ce qui est clair car $\forall x \in X \; f(x) \leq h(x)$. Par suite, h est continue. D'autre part, soit $g \in X \Rightarrow Y$ tel que $g \geq f$ pour tout $f \in D$. Soit $x \in X$. On a $g(x) \geq f(x)$ pour tout $f \in D$, et donc $g(x) \geq h(x)$. Donc $g \geq h$. Par suite h est le sup de D dans $X \Rightarrow Y$.

Donc $X \Rightarrow Y$ est un cpo.

Exercice 5.2.4 Montrer que $X \Rightarrow Y$ est *borné-complet* (toute partie bornée a un sup) et que le sup d'une partie bornée $\mathcal{B}$ de $X \Rightarrow Y$ est donné par

$$(\bigvee \mathcal{B})(x) = \bigvee_{f \in \mathcal{B}} f(x)\,.$$

Le raisonnement est similaire à celui qu'on vient de faire.

Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ isolés. Soit $[x_0, y_0]$ la *fonction de seuil* $[x_0, y_0] : X \to Y$ définie par

$$[x_0, y_0](x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } x \geq x_0 \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme x_0 est isolé, cette fonction est continue. Soit $f \in X \Rightarrow Y$. On a

$$[x_0, y_0] \leq f \Leftrightarrow y_0 \leq f(x_0)\,.$$

Soit $\mathcal{D} \subseteq X \Rightarrow Y$ un ensemble filtrant, et supposons que $[x_0, y_0] \leq \bigvee \mathcal{D}$. Cela signifie que

$$y_0 \leq \bigvee_{f \in \mathcal{D}} f(x_0)$$

et donc, comme y_0 est isolé, il existe $f \in \mathcal{D}$ tel que $y_0 \leq f(x_0)$, c'est-à-dire $[x_0, y_0] \leq f$. Donc les fonctions de seuil sont isolées dans $X \Rightarrow Y$.

Si $f \in X \Rightarrow Y$, soit $s(f)$ l'ensemble des fonctions de seuil majorées par f, autrement dit

$$s(f) = \{[x_0, y_0] \mid x_0 \in \mathsf{i}(X),\ y_0 \in \mathsf{i}(Y) \text{ et } y_0 \leq f(x_0)\}\,,$$

où $\mathsf{i}(X)$ est l'ensemble des éléments isolés de X.

On montre que $f = \bigvee s(f)$ (ce sup existe, puisque $X \Rightarrow Y$ est borné-complet). Il suffit de montrer que $f \leq \bigvee s(f)$, l'autre inégalité étant évidente. Soit $x \in X$, on montre que $f(x) \leq \bigvee_{f_0 \in s(f)} f_0(x)$. Soit y_1 un élément isolé de Y ; par le lemme 5.1.2, il suffit de montrer que, si $y_1 \leq f(x)$, alors $y_1 \leq \bigvee_{f_0 \in s(f)} f_0(x)$. On suppose donc que $y_1 \leq f(x)$. Comme f est continue, il existe x_1, isolé dans X, tel que $x_1 \leq x$ et $y_1 \leq f(x_1)$. Donc $f_1 = [x_1, y_1] \in s(f)$ et comme $f_1(x) = y_1$, on en déduit que $y_1 \leq \bigvee_{f_0 \in s(f)} f_0(x)$.

Soit alors $f \in X \Rightarrow Y$ et soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des minorants de f qui sont isolés dans $X \Rightarrow Y$. On a bien sûr $\bigvee \mathcal{B} \leq f$. Mais $s(f) \subseteq \mathcal{B}$ (toute fonction de seuil est isolée) et on vient de voir que $\bigvee s(f) = f$, donc $\bigvee \mathcal{B} = f$. On a ainsi montré que $X \Rightarrow Y$ est algébrique. Pour conclure que c'est un domaine de Scott, il suffit de montrer qu'il n'a qu'un nombre dénombrable d'éléments isolés.

Soit donc $f_0 \in X \Rightarrow Y$ isolé. Pour toute partie finie $\mathcal{B}$ de $s(f)$, $\bigvee \mathcal{B}$ est un élément isolé de $X \Rightarrow Y$ qui est majoré par f_0. De plus, si $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(s(f))$, on a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \Rightarrow \bigvee \mathcal{B} \leq \bigvee \mathcal{B}'$. Donc l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{\bigvee \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(s(f_0))\}$$

est une partie filtrante de $X \Rightarrow Y$, bornée par f_0 et contenant $s(f)$, ces deux dernières propriétés impliquant que $f_0 = \bigvee \mathcal{D}$. Donc comme f_0 est isolé, il existe une partie finie $\mathcal{B}$ de $s(f_0)$ telle que $f_0 = \bigvee \mathcal{B}$.

On a ainsi montré que tout élément isolé de $X \Rightarrow Y$ est le sup d'une famille finie de fonctions de seuil. Or, comme X et Y sont ω-algébriques, l'ensemble des fonctions de seuil est au plus dénombrable, et par conséquent, l'ensemble des fonctions isolées est au plus dénombrable (l'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable est dénombrable).

Soit $\mathsf{Ev} : (X \Rightarrow Y)\ \&\ X \to Y$ définie par $\mathsf{Ev}(f, x) = f(x)$. Cette fonction est clairement croissante. Pour montrer qu'elle est continue, on applique le lemme 5.2.2. Soient $\mathcal{D} \subseteq X \Rightarrow Y$ et $D \subseteq X$ filtrantes. On a

$$\begin{aligned} (\bigvee \mathcal{D})(\bigvee D) &= \bigvee_{f \in \mathcal{D}} f(\bigvee D) \\ &= \bigvee_{f \in \mathcal{D}} \bigvee_{x \in D} f(x) \\ &= \bigvee \mathsf{Ev}(\mathcal{D} \times D) \end{aligned}$$

et on conclut.

Soient X, Y et Z des domaines de Scott et soit $f : Z \,\&\, X \to Y$ une fonction continue. Pour chaque $z \in Z$, la fonction $f_z : X \to Y$ définie par $f_z(x) = f(z, x)$ est continue, et on définit $\mathsf{Cur}(f) : Z \to (X \Rightarrow Y)$ par $\mathsf{Cur}(f)(z) = f_z$.

Exercice 5.2.5 Vérifier que $\mathsf{Cur}(f)$ est continue. Vérifier que les trois équations de clôture cartésienne sont satisfaites.

On a ainsi prouvé que **Scott** est une catégorie cartésienne fermée. □

5.3 Treillis complets premier-algébriques

On va travailler avec des domaines de Scott très particuliers, qui sont les treillis complets premier-algébriques. Ils ont d'excellentes propriétés de symétrie (un peu comme les espaces de cohérence), que les domaines de Scott généraux ne possèdent pas.

Un *treillis complet* est un ensemble partiellement ordonné dont tout sous-ensemble a un sup. Soit E un treillis complet. Si $A \subseteq E$, on note $\bigvee A$ le sup de A dans E. On note $\bot_E$ le plus petit élément de E (qui existe, c'est $\bigvee \emptyset$) et $\top_E$ le plus grand, qui est $\bigvee E$.

Un élément p de E est *premier* si, pour tout $A \subseteq E$, si $p \leq \bigvee A$, alors il existe $x \in A$ tel que $p \leq x$. On dit que E est *premier-algébrique* si tout élément de E est le sup de ses minorants premiers. On dénote par $\mathsf{Pr}\, E$ l'ensemble des éléménts premiers de E, considéré comme ordre partiel (avec la restriction de l'ordre de E).

5.3.1 Représentation des treillis complets premier-algébriques. Soit $S = (|S|, \leq_S)$ un ensemble préordonné ($|S|$ est la trame de S et $\leq_S$ est une relation binaire, transitive et réflexive sur $|S|$). La relation sur $|S|$ définie par $a \sim_S b$ si $a \leq_S b$ et $b \leq_S a$ est alors une relation d'équivalence, sur les classes d'équivalence de laquelle $\leq_S$ induit une relation d'ordre.

On note $\mathcal{I}(S)$ l'ensemble des *segments initiaux* de $|S|$, c'est-à-dire, des sous-ensembles u de $|S|$ tels que $\forall a \in u, \forall b \in |S|\ b \leq a \Rightarrow b \in u$. Noter que si $a \in u \in \mathcal{I}(S)$ et si $b \sim_S a$ ($\sim_S$ étant la relation d'équivalence définie ci-dessus), alors $b \in u$: les éléments de $\mathcal{I}(S)$ sont clos pour la relation d'équivalence associée au préordre de S.

Muni de l'inclusion comme relation d'ordre, $\mathcal{I}(S)$ est un treillis complet : une réunion quelconque d'éléments de $\mathcal{I}(S)$ est un élément de $\mathcal{I}(S)$. Si $u \subseteq |S|$, on note $\downarrow u$ le plus petit élément de $\mathcal{I}(S)$ contenant u, on a donc

$$\downarrow u = \{b \in |S| \mid \exists a \in u\ b \leq a\} .$$

Si $a \in |S|$, on note $\downarrow a = \downarrow \{a\}$.

Lemme 5.3.1 *$(\mathcal{I}(S), \subseteq)$ est un treillis complet premier-algébrique dont les éléments premiers sont les $\downarrow a$, pour $a \in |S|$.*

Exercice 5.3.1 Prouver ce lemme.

Proposition 5.3.2 *Soit E un treillis complet premier-algébrique. La fonction φ qui envoie $x \in E$ sur $\{p \in \mathsf{Pr}\, E \mid p \leq x\}$ est un isomorphisme entre E et $\mathcal{I}(\mathsf{Pr}\, E)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que φ est une bijection croissante dont la récipoque est aussi croissante. La fonction φ est croissante car si $p \leq x \leq y$, alors $p \leq y$ et donc $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$.

Soit $\psi : \mathcal{I}(\mathsf{Pr}\, E) \to E$ définie par $\psi(u) = \bigvee u$. Si $x \in E$, alors $\psi(\varphi(x)) = \bigvee\{p \in \mathsf{Pr}\, E \mid p \leq x\} = x$ car E est premier-algébrique. Soit $u \in \mathcal{I}(\mathsf{Pr}\, E)$. Si $p \in u$, on a $p \leq \bigvee u = \psi(u)$, donc $p \in \varphi(\psi(u))$, et donc $u \subseteq \varphi(\psi(u))$. Réciproquement, soit $p \in \mathsf{Pr}\, E$ tel que $p \in \varphi(\psi(u))$, c'est-à-dire $p \leq \bigvee u$. Comme p est premier, il existe $q \in u$ tel que $p \leq q$, et comme $u \in \mathcal{I}(\mathsf{Pr}\, E)$ (u est un segment initial), on a $p \in u$.

Donc ψ est l'inverse de φ, ce qui montre que φ est une bijection, et comme ψ est clairement croissante, φ est un isomorphisme d'ordres partiels entre E et $\mathcal{I}(\mathsf{Pr}\, E)$. $\square$

Donc tout treillis complet premier-algébrique E est de la forme $\mathcal{I}(S)$, pour un préordre S. La proposition ci-dessus montre qu'on peut prendre pour S un ordre partiel (l'ordre induit sur les premiers de E). Mais la construction des exponentielles qu'on va voir en section 6.4 montre qu'il est plus commode de considérer des préordres quelconques.

Exercice 5.3.2 Décrire $\mathcal{I}(S)$ dans les cas suivants :

1. $|S| = \mathbb{N}$ avec l'ordre discret ($n \leq_S m$ si $n = m$)
2. $|S| = \mathbb{N}$ avec l'ordre usuel sur les entiers ($n \leq_S m$ si $n \leq m$)
3. $|S| = \mathbb{N}$ avec l'opposé de l'ordre usuel sur les entiers ($n \leq_S m$ si $m \leq n$.)

5.3.2 Morphismes linéaires. Soient E et F deux treillis complets. Une fonction $f : E \to F$ est linéaire si, pour toute partie A de E, on a $f(\bigvee A) = \bigvee f(A)$ (où, comme d'habitude, $f(A)$ est l'image directe de A par f, c'est-à-dire l'ensemble $\{f(x) \mid x \in A\}$). Il est clair que la composée de deux fonctions linéaires est linéaire et que l'identité est une fonction linéaire, donc les treillis complets et les fonctions linéaires forment une catégorie.

Remarquer que si $f : E \to F$ est linéaire, alors $f(\perp_E) = \perp_F$, mais par contre on n'a pas forcément $f(\top_E) = \top_F$. Remarquer aussi que f est croissante, car si $x \leq y$ dans E, on a $y = x \vee y$ et donc $f(y) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.

Chapitre 6

Modèle de Scott et modèle relationnel

Dans ce chapitre, on présente deux modèles fondamentaux de la logique linéaire : le modèle de Scott et le modèle relationnel. On les décrit dans un cadre commun : la catégorie des ordres partiels **PoLR**. La catégorie des ensembles et des relations est juste la sous-catégorie de **PoLR** formée des préordres "discrets" (la relation de préordre est juste la diagonale). Si on n'est intéressé que par cette catégorie, on peut sauter directement à a Section 6.6.

Un *ensemble préordonné* (ou préordre) est une structure $S = (|S|, \leq_S)$ où $|S|$ est un ensemble (qu'il est raisonnable de supposer au plus dénombrable, même si ce n'est pas techniquement indispensable) et $\leq_S$ est une relation binaire, réflexive et transitive sur $|S|$. On définit alors

$$\mathcal{I}(S) = \{u \subseteq |S| \mid \forall a \in u \, \forall a' \in |S| \; a' \leq_S a \Rightarrow a' \in u\} \, .$$

Autrement dit, $\mathcal{I}(S)$ est l'ensemble des sous-ensembles de $|S|$ qui sont "clos vers le bas" pour la relation $\leq_S$. Ces sous-ensembles de $|S|$ sont parfois appelés *segments initiaux*.

Si $u \subseteq |S|$, on définit

$$\downarrow u = \{a \in |S| \mid \exists a' \in u \; a \leq_S a'\}$$

et on a bien sûr $\downarrow u \in \mathcal{I}(S)$ (c'est le plus petit élément de $\mathcal{I}(S)$ qui contient u). Si $a \in |S|$, on écrire souvent $\downarrow a$ au lieu de $\downarrow \{a\}$. Donc $\downarrow a = \{a' \in |S| \mid a' \leq_S a\}$.

Muni de l'inclusion, $\mathcal{I}(S)$ est un treillis complet, ce qui signifie simplement que si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{I}(S)$, on a $\bigcup_{i \in I} u_i \in \mathcal{I}(S)$. En particulier, il y a un plus petit éléments qui est $\emptyset$ et un plus grand élément qui est $|S|$.

Soient S et T des ensembles préordonnés. Une fonction $f : \mathcal{I}(S) \to \mathcal{I}(T)$ est *linéaire* si elle commute à toutes les unions, autrement dit, pour toute famille $(u_i)_{i \in I}$ déléments de $\mathcal{I}(S)$, on a

$$f(\bigcup_{i \in I} u_i) = \bigcup_{i \in I} f(u_i) \, .$$

Une telle fonction est forcément croissante par rapport à $\subseteq$. En effet, si $u_1, u_2 \in \mathcal{I}(S)$ vérifient $u_1 \subseteq u_2$, on a $u_1 \cup u_2 = u_2$ et donc $f(u_2) = f(u_1 \cup u_2) = f(u_1) \cup f(u_2)$ et donc $f(u_1) \subseteq f(u_2)$. Observe also that $f(\emptyset) = \emptyset$, but of course it is not true that necessarily $f(|S|) = |T|$!

6.1 La catégorie PoL

C'est la catégorie dont les objets sont les ensembles préordonnés, et les morphismes sont les fonctions linéaires entre treillis complets associés. Plus précisément, un objet de **PoL** est un ensemble préordonné S et un morphisme $f \in \mathbf{PoL}(S, T)$ est une fonction linéaire $\mathcal{I}(S) \to \mathcal{I}(T)$.

Si S et T sont des préordres, S^{op} désigne le préordre opposé (autrement dit $|S^{\mathsf{op}}| = |S|$, $a \leq_{S^{\mathrm{op}}} a'$ si $a' \leq_S a$) et $S \times T$ désigne le préordre produit, avec $|S \times T| = |S| \times |T|$, avec $(a, b) \leq_{S \times T} (a', b')$ si $a \leq_S a'$ et $b \leq_T b'$.

6.1.1 Trace linéaire associée à une fonction linéaire. Soient S et T des péordres et soit $f \in \mathbf{PoL}(S, T)$. On définit la *trace linéaire* de f

$$\mathsf{tr}(f) = \{(a, b) \in |S| \times |T| \mid b \in f(\downarrow a)\}\,.$$

On vérifie que $\mathsf{tr}(f) \in \mathcal{I}(S^{\mathrm{op}} \times T)$. Soit $(a, b) \in \mathsf{tr}(f)$ et soit $(a', b') \in S \times T$ tel que $(a', b') \leq_{S^{\mathrm{op}} \times T} (a, b)$, c'est-à-dire $a \leq_S a'$ et $b' \leq_T b$. On a $\downarrow a \subseteq \downarrow a'$ donc $f(\downarrow a) \subseteq f(\downarrow a')$ et par suite $b \in f(\downarrow a')$, donc $(a', b') \in \mathsf{tr}(f)$ puisque $f(\downarrow a')$ est un segment initial.

On a en particulier $\mathsf{tr}(\mathsf{Id}_S) = \{(a, a') \in |S| \times |S| \mid a' \leq_S a\}$.

Let $s \subseteq E \times F$ and $t \subseteq F \times G$ be relations. Their composition $t\,s \subseteq E \times G$ is defined as

$$t\,s = \{(a, c) \in E \times G \mid \exists b \in F\ (a, b) \in s \text{ and } (b, c) \in t\}\,.$$

Lemme 6.1.1 *Soient $f \in \mathbf{PoL}(S, T)$ et $g \in \mathbf{PoL}(T, U)$. On a $\mathsf{tr}(g \circ f) = \mathsf{tr}(g)\,\mathsf{tr}(f)$.*

Démonstration. Soit $(a, c) \in \mathsf{tr}(g \circ f)$, c'est-à-dire $c \in g(y)$ où $y = f(\downarrow a)$. Comme g est linéaire et comme $y = \bigcup_{b \in y} \downarrow b$, on a $g(y) = \bigcup_{b \in y} g(\downarrow b)$, donc il existe $b \in y$ tel que $c \in g(\downarrow b)$, c'est-à-dire $(b, c) \in \mathsf{tr}(g)$. Comme $b \in f(\downarrow a)$, on a $(a, b) \in \mathsf{tr}(f)$. Donc $(a, c) \in \mathsf{tr}(g)\,\mathsf{tr}(f)$. Réciproquement, soit $(a, c) \in \mathsf{tr}(g)\,\mathsf{tr}(f)$. Soit $b \in |T|$ tel que $(a, b) \in \mathsf{tr}(f)$ et $(b, c) \in \mathsf{tr}(g)$. On a $b \in f(\downarrow a)$, donc $\downarrow b \subseteq f(\downarrow a)$ et donc $g(\downarrow b) \subseteq g(f(\downarrow a))$ par croissance de g. Or $c \in g(\downarrow b)$, ce qui montre que $c \in g(f(\downarrow a))$, c'est-à-dire $c \in \mathsf{tr}(g \circ f)$. □

6.1.2 Fonction linéaire associée à une relation. Soit $t \in \mathcal{I}(S^{\mathrm{op}} \times T)$. On définit la fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{fun}(t) : \mathcal{I}(S) & \to & \mathcal{P}(T) \\ u & \mapsto & \{b \mid \exists a \in u\ (a, b) \in t\}\,. \end{array}$$

Soit $b \in \mathsf{fun}(t)(x)$ et soit $b' \in |T|$ tel que $b' \leq b$. Soit $a \in |S|$ tel que $(a, b) \in t$. On a $(a, b') \leq_{S^{\mathrm{op}} \times T} (a, b)$, donc $(a, b') \in t$. Par suite $b' \in \mathsf{fun}(t)(x)$, et donc $\mathsf{fun}(t)$ prend ses valeurs dans $\mathcal{I}(T)$. De plus, cette fonction est linéaire, car si $A \subseteq \mathcal{I}(S)$ et si $b \in |T|$, on a $b \in \mathsf{fun}(t)(\bigcup A)$ si et seulement s'il existe $a \in \bigcup A$ tel que $(a, b) \in t$, ce qui est équivalent à dire qu'il existe $u \in A$ tel que $a \in u$ et $(a, b) \in t$, et cette dernière propriété est équivalente à dire que $b \in \bigcup\{\mathsf{fun}(t)(u) \mid u \in A\}$.

6.1.3 Un isomorphisme d'ordre. Donc $\mathsf{fun}(t) \in \mathbf{PoL}(S, T)$. On considère $\mathbf{PoL}(S, T)$ comme un ensemble partiellement ordonné, par l'ordre ponctuel (dit parfois aussi ordre extensionnel) : $f \leq g$ si $\forall u \in \mathcal{I}(S)\ f(u) \subseteq g(u)$.

Proposition 6.1.2 *Les fonctions* tr *et* fun *sont inverses l'une de l'autre et définissent un isomorphisme d'ordre entre $\mathbf{PoL}(S, T)$ et $\mathcal{I}(S^{\mathrm{op}} \times T)$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathbf{PoL}(S, T)$. On montre que $\mathsf{fun}(\mathsf{tr}(f)) = f$. Soit donc $u \in \mathcal{I}(S)$. Soit $b \in f(u)$. Comme $u = \bigcup_{a \in u} \downarrow a$ et comme f est linéaire, on a $f(u) = \bigcup_{a \in x} f(\downarrow a)$. Donc, il existe $a \in u$ tel que $b \in f(\downarrow a)$, c'est-à-dire $(a, b) \in \mathsf{tr}(f)$. Par suite $b \in \mathsf{fun}(\mathsf{tr}(f))(u)$. Réciproquement, soit $b \in \mathsf{fun}(\mathsf{tr}(f))(u)$. Soit donc $a \in u$ tel que $(a, b) \in \mathsf{tr}(f)$. Cela signifie que $b \in f(\downarrow a)$, et comme $\downarrow a \subseteq u$ et comme f est croissante, on a $b \in f(u)$.

Soit maintenant $t \in \mathcal{I}(S^{\mathrm{op}} \times T)$, montrons que $\mathsf{tr}(\mathsf{fun}(t)) = t$. Soit donc $(a, b) \in |S| \times |T|$. Supposons que $(a, b) \in t$ et montrons que $(a, b) \in \mathsf{tr}(\mathsf{fun}(t))$. Comme $a \in \downarrow a$, on a $b \in \mathsf{fun}(t)(\downarrow a)$ et donc $(a, b) \in \mathsf{tr}(\mathsf{fun}(t))$. Réciproquement, supposons $(a, b) \in \mathsf{tr}(\mathsf{fun}(t))$. Cela signifie que $b \in \mathsf{fun}(t)(\downarrow a)$, c'est-à-dire qu'il existe $a' \in \downarrow a$ tel que $(a', b) \in t$. On a $a' \leq a$ et donc $(a, b) \leq_{S^{\mathrm{op}} \times T} (a', b)$ et comme $t \in \mathcal{I}(S^{\mathrm{op}} \times T)$, on a $(a, b) \in t$.

Les fonctions fun et tr sont donc inverses l'une de l'autre. Montrons que fun est croissante. Soient donc $s, t \in \mathcal{I}(S^{\mathrm{op}} \times T)$ tels que $s \subseteq t$, on montre que $\mathsf{fun}(s) \leq \mathsf{fun}(t)$. Soit donc $u \in \mathcal{I}(S)$ et soit $b \in \mathsf{fun}(s)(u)$. Cela signifie qu'il existe $a \in u$ tel que $(a, b) \in s$ tel que $a \in u$. Comme $s \subseteq t$, on a $(a, b) \in t$ et par suite $b \in \mathsf{fun}(t)(u)$, ce qui montre que $\mathsf{fun}(s) \leq \mathsf{fun}(t)$. Réciproquement, soient $f, g \in \mathbf{PoL}(S, T)$ tels que

$f \leq g$ et montrons que $\mathsf{tr}(f) \subseteq \mathsf{tr}(g)$. Soit $(a,b) \in \mathsf{tr}(f)$. Cela signifie que $b \in f(\downarrow a)$. Comme $f \leq g$, on a $f(\downarrow a) \subseteq g(\downarrow a)$ et donc $b \in g(\downarrow a)$, c'est-à-dire que $(a,b) \in \mathsf{tr}(g)$. Donc $\mathsf{tr}(f) \subseteq \mathsf{tr}(g)$.

On a montré que fun et tr définissent un isomorphisme entre ensembles partiellement ordonnés. □

Il découle de ce qui précède que $\mathbf{PoL}(S,T)$ est un treillis complet.

Exercice 6.1.1 Montrer que, si $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{PoL}(S,T)$, alors $f = \bigvee \mathcal{F}$ (le sup dans ce treillis complet) est donné par $f(u) = \bigcup_{g \in \mathcal{F}} g(u)$.

Remarque 6.1.3 On peut donc, au choix, considérer un morphisme de S vers T dans $\mathbf{PoL}$ soit comme une fonction linéaire de $\mathcal{I}(S)$ vers $\mathcal{I}(T)$, soit comme un élément de $\mathcal{I}(S^{\mathrm{op}} \times T)$. On passera d'un point de vue à l'autre selon le contexte. On pose $S \multimap T = S^{\mathrm{op}} \times T$.

6.1.4 Isomorphismes forts. Par définition, un isomorphisme de S vers T est une fonction linéaire $f : \mathcal{I}(S) \to \mathcal{I}(T)$ qui est bijective, croissante, et dont la réciproque est aussi croissante. Deux ensembles préordonnés peuvent être isomorphes tout en étant très différents. Par exemple, si S a un seul élément, et si $|T| = \mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers naturels), avec le préordre tel que $n \leq m$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{I}(S)$ et $\mathcal{I}(T)$ sont isomorphes (et isomorphes à l'ordre partiel $\{\bot, \top\}$ avec $\bot < \top$). Toutefois, dans la suite, on aura souvent affaire à des isomorphismes beaucoup plus restrictifs.

On appelle *isomorphisme fort* de S vers T une application $\theta : |S| \to |T|$ qui est une bijection telle que, pour tous $a, a' \in |S|$, on ait $a \leq a'$ si et seulement si $\theta(a) \leq \theta(a')$. Autrement dit, un isomorphisme fort est un isomorphisme de préordres. On écrit $S \simeq T$ s'il existe un isomorphisme fort de S vers T.

Un tel isomorphisme fort $\theta : S \to T$ induit un isomorphisme de S vers T dans la catégorie $\mathbf{PoL}$, à savoir la fonction $\widehat{\theta} : \mathcal{I}(S) \to \mathcal{I}(T)$ défine par $\widehat{\theta}(x) = \{\theta(a) \mid a \in x\}$.

Exercice 6.1.2 Vérifier que, si $\theta : S \to T$ est un isomorphisme fort, alors $\widehat{\theta}$ est bien à valeur dans $\mathcal{I}(T)$, que c'est un isomorphisme d'ordres partiels et que $\widehat{\theta^{-1}} = \widehat{\theta}^{-1}$. Vérifier également que $\mathsf{tr}(\widehat{\theta}) = \downarrow_{S^{\mathrm{op}} \times T} \mathsf{Gr}(\theta)$ (où $\mathsf{Gr}(\theta) \subseteq |S| \times |T|$ est le graphe de la fonction θ), c'est-à-dire, $\mathsf{tr}(\widehat{\theta}) = \{(a,b) \in |S| \times |T| \mid b \leq \theta(a)\}$.

6.2 Structure monoïdale

A partir de maintenant, nous verrons les morphismes de S vers T comme les éléments de $\mathcal{I}(S \multimap T)$. Pour éviter les confusions, nous noterons $\mathbf{PoLR}$ la catégorie dont les objets sont les préordres et telle que $\mathbf{PoLR}(S,T) = \mathcal{I}(S \multimap T)$, l'identité Id_S sur S étant donné par $\mathsf{Id}_S = \{(a,a') \in S \multimap S \mid a' \leq a\}$ et la composition étant définie de façon relationnelle : si $s \in \mathcal{I}(S \multimap T)$ et $t \in \mathcal{I}(T \multimap U)$, la composition de s et t est

$$t\, s = \{(a,c) \in S \multimap U \mid \exists b \in |T|\ (a,b) \in s \text{ et } (b,c) \in t\}\,.$$

Si $s \in \mathbf{PoLR}(S,T)$ et $u \in \mathcal{I}(S)$, l'application de s (vue comme fonction linéaire) à x est notée $s\, u$. On a donc

$$s\, u = \mathsf{fun}(s)(u) = \{b \in |T| \mid \exists a \in u\ (a,b) \in |S|\}\,.$$

Exercice 6.2.1 Vérifier directement que Id ainsi défini est bien l'élément neutre de la composition, à gauche et à droite. Vérifier aussi que $(t\, s)\, u = t\,(s\, u)$.

On a montré à la section 6.1 que les catégories $\mathbf{PoL}$ et $\mathbf{PoLR}$ sont isomorphes.

6.2.1 Le foncteur produit tensoriel. On note 1 le préordre qui n'a qu'un élément (que l'on notera $*$). Si S_1 et S_2 sont des préordres, on définit $S_1 \otimes S_2 = S_1 \times S_2$, muni du préordre produit. Si $u_i \in \mathcal{I}(S_i)$, on pose $u_1 \otimes u_2 = u_1 \times u_2$, et il est clair que $u_1 \otimes u_2 \in S_1 \otimes S_2$.

Soient $s_i \in \mathbf{PoLR}(S_i, T_i)$ pour $i = 1, 2$. On définit

$$s_1 \otimes s_2 = \{((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \mid (a_i,b_i) \in s_i \text{ pour } i = 1,2\} \subseteq (S_1 \otimes S_2) \multimap (T_1 \otimes T_2)\,.$$

Exercice 6.2.2 Montrer que $s_1 \otimes s_2 \in \mathbf{PoLR}(S_1 \otimes S_2, T_1 \otimes T_2)$.

Proposition 6.2.1 *Soient $s_i \in \mathbf{PoLR}(S_i, T_i)$ et $t_i \in \mathbf{PoLR}(T_i, U_i)$ pour $i = 1, 2$. On a*

$$(t_1 \otimes t_2)\,(s_1 \otimes s_2) = (t_1\, s_1) \otimes (t_2\, s_2)\,.$$

On a aussi $\mathsf{Id}_{S_1} \otimes \mathsf{Id}_{S_2} = \mathsf{Id}_{S_1 \otimes S_2}$. Si $u_i \in \mathcal{I}(S_i)$ (pour $i = 1, 2$), on a $(s_1 \otimes s_2)\,(u_1 \otimes u_2) = (s_1\, u_1) \otimes (s_2\, u_2)$.

Démonstration. On montre la dernière équation, les deux autres sont laissées au lecteur. Soit $(b_1, b_2) \in (s_1 \otimes s_2)\,(u_1 \otimes u_2)$. Il existe $(a_1, a_2) \in u_1 \otimes u_2$ tel que $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in s_1 \otimes s_2$. Cela signifie que $a_i \in u_i$ et $(a_i, b_i) \in s_i$ pour $i = 1, 2$. On a donc $b_i \in s_i\, u_i$ pour $i = 1, 2$, et donc $(b_1, b_2) \in (s_1\, u_1) \otimes (s_2\, u_2)$.

Réciproquement, si $(b_1, b_2) \in (s_1\, u_1) \otimes (s_2\, u_2)$, il existe $a_i \in u_i$ tel que $(a_i, b_i) \in s_i$ pour $i = 1, 2$. On a $(a_1, a_2) \in u_1 \otimes u_2$ et $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in s_1 \otimes s_2$. Donc $(b_1, b_2) \in (s_1 \otimes s_2)\,(u_1 \otimes u_2)$. □

Donc $\otimes$ est un foncteur $\mathbf{PoLR}^2 \to \mathbf{PoLR}$. On définit facilement des isomorphismes forts $\lambda : 1 \otimes S \to S$, $\rho : S \otimes 1 \to S$, $\alpha : (S_1 \otimes S_2) \otimes S_3 \to S_1 \otimes (S_2 \otimes S_3)$ et $\sigma : S_1 \otimes S_2 \to S_2 \otimes S_1$, et on vérifie facilement que ces isomorphismes forts satisfont les commutations de diagrammes voulues pour faire de $(\mathbf{PoLR}, \otimes, 1, \lambda, \rho, \alpha, \sigma)$ une catégorie monoïdale symétrique.

Comme tout foncteur, $\otimes$ envoie les isomorphismes sur des isomorphismes. On a mieux.

Lemme 6.2.2 *Si $S \simeq S'$ et $T \simeq T'$, alors $S \otimes T \simeq S' \otimes T'$.*

La vérification est immédiate. En toute rigueur, si $\eta : S \to S'$ et $\theta : T \to T'$ sont des isomorphismes fort, il faut vérifier que l'isomorphisme fort $S \otimes T \to S' \otimes T'$ associés (notons-le $\eta \otimes \theta$) vérifie $\widehat{\eta \otimes \theta} = \widehat{\eta} \otimes \widehat{\theta}$. Là aussi, la vérification est immédiate.

6.2.2 Propriété universelle du produit tensoriel. Soit S, T et U des préordres. Une fonction $f : \mathcal{I}(S) \times \mathcal{I}(T) \to \mathcal{I}(U)$ est dite *bilinéaire* si elle est croissante et vérifie

$$\forall A \subseteq \mathcal{I}(X)\, \forall v \in \mathcal{I}(Y) \quad f(\bigcup A, v) = \bigcup_{u \in A} f(u, v)$$

et

$$\forall u \in \mathcal{I}(X)\, \forall B \subseteq \mathcal{I}(Y) \quad f(u, \bigcup B) = \bigcup_{v \in B} f(u, v)\,.$$

Comme d'habitude, à cause de la croissance de f, ces égalités sont équivalentes à des inclusions, à savoir $f(\bigcup A, v) \subseteq \bigcup_{u \in A} f(u, v)$ et $f(u, \bigcup B) \subseteq \bigcup_{v \in B} f(u, v)$.

Soit $\tau : \mathcal{I}(S) \times \mathcal{I}(T) \to \mathcal{I}(S \otimes T)$ la fonction définie par $\tau(u, v) = u \times v = u \otimes v$.

Lemme 6.2.3 *La fonction τ est bilinéaire.*

Démonstration. On a $(a, b) \in (\bigcup A) \times v$ si et seulement s'il existe $u \in A$ tel que $(a, b) \in u \times v$. □

On peut maintenant exprimer la propriété universelle du produit tensoriel.

Proposition 6.2.4 *Soit $f : \mathcal{I}(S) \times \mathcal{I}(T) \to \mathcal{I}(U)$ une fonction bilinéaire. Il existe une et une seule fonction linéaire $g : \mathcal{I}(S \otimes T) \to \mathcal{I}(U)$ telle que $f = g \circ \tau$.*

Démonstration. On définit une notion de *trace* pour une fonction bilinéaire :

$$\mathsf{tr_b}(f) = \{((a, b), c) \in (|S| \times |T|) \times |U| \mid c \in f(\mathop{\downarrow}_S a, \mathop{\downarrow}_T b)\}\,.$$

Par croissance de f, on a $\mathsf{tr_b}(f) \in \mathcal{I}((S^{\mathrm{op}} \times T^{\mathrm{op}}) \times U) = \mathcal{I}((S \otimes T) \multimap U)$. Soit $g = \mathsf{fun}(\mathsf{tr_b}(f)) : \mathcal{I}(S \otimes T) \to \mathcal{I}(U)$, c'est une fonction linéaire.

Pour toute fonction bilinéaire $h : \mathcal{I}(S) \times \mathcal{I}(T) \to \mathcal{I}(U)$, on a

$$h(u,v) = \bigcup_{(a,b)\in u\times v} h(\downarrow_S a, \downarrow_T b)$$

car $u = \bigcup_{a\in u} \downarrow_S a$ et $v = \bigcup_{b\in v} \downarrow_T b$ pour tous $u \in \mathcal{I}(S)$ et $v \in \mathcal{I}(T)$. Donc la fonction h est connue dès qu'on connaît ses valeurs sur les éléments $(\downarrow_S a, \downarrow_T b)$ de $\mathcal{I}(S) \times \mathcal{I}(T)$.

Or $g \circ \tau$ est bilinéaire car g est linéaire. On a

$$\begin{aligned}
(g\circ\tau)(\downarrow_S a, \downarrow_T b) &= g(\downarrow_S a \times \downarrow_T b) \\
&= g(\downarrow_{S\otimes T} (a,b)) \\
&= \{c \mid \exists (a',b') \leq_{S\times T} (a,b) \ \ ((a',b'),c) \in \mathsf{tr_b}(f)\} \\
&= \{c \mid \exists (a',b') \leq (a,b) \ \ c \in f(\downarrow_S a', \downarrow_T b')\} \\
&= f(\downarrow_S a, \downarrow_T b)
\end{aligned}$$

donc $g \circ \tau = f$. Il reste à voir que g est caractérisée de façon unique par cette propriété. Or g est linéaire sur $S \otimes T$ et est donc caractérisée par sa valeur sur les $\downarrow_{S\otimes T} (a,b)$, et on a $g(\downarrow_{S\otimes T} (a,b)) = f(\downarrow_S a, \downarrow_T b)$ comme on vient de le voir. □

Remarque 6.2.5 Même si on a caractérisé $\otimes$ par une propriété universelle, on n'a pas pour autant ramené son existence à une simple propriété de **PoL** (comme pour le produit cartésien). En effet, cette propriété universelle fait référence à la notion de fonction bilinéaire qui ne fait pas partie de la définition de **PoL**. On pourrait la prendre comme définition des morphismes de cette catégorie, mais il faudrait alors quitter le monde des catégories pour passer dans celui des multicatégories (où les morphismes ont plusieurs sources et un but) qui ont une axiomatique plus compliquée dans laquelle les isos de cohérence apparaissent sous une autre forme. Il n'y a pas de miracle !

Exercice 6.2.3 Une fonction bilinéaire $f : \mathcal{I}(S) \times \mathcal{I}(S) \to \mathcal{I}(T)$ est symétrique si $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathcal{I}(S)$. Trouver un préordre U et une fonction bilinéaire symétrique $\gamma : \mathcal{I}(S) \times \mathcal{I}(S) \to \mathcal{I}(U)$ avec la propriété universelle suivante : pour tout préordre T et toute fonction bilinéaire symétrique $f : \mathcal{I}(S) \times \mathcal{I}(S) \to \mathcal{I}(T)$, il existe exactement une fonction linéaire $h : \mathcal{I}(U) \to \mathcal{I}(T)$ telle que $f = h \circ \gamma$.

6.2.3 Clôture monoïdale. Soient S, T et U des préordres.

Soit $\mathsf{ev} \subseteq |((S \multimap T) \otimes S) \multimap T|$ défini par

$$\mathsf{ev} = \{(((a',b),a),b') \mid a' \leq_S a \text{ et } b' \leq_T b\}\,.$$

On vérifie que $\mathsf{ev} \in \mathbf{PoLR}((S \multimap T) \otimes S, T)$. Soit donc $(((a',b),a),b') \in \mathsf{ev}$ et soit $(((a_1',b_1),a_1),b_1') \in ((S \multimap T) \otimes S) \multimap T$ tel que

$$(((a_1',b_1),a_1),b_1') \leq_{((S\multimap T)\otimes S)\multimap T} (((a',b),a),b')\,.$$

Cela signifie que $b_1' \leq b'$, $a \leq a_1$, $b \leq b_1$ et $a_1' \leq a'$. Comme $a' \leq a$ et $b' \leq b$, on a $a_1' \leq a_1$ et $b_1' \leq b_1$. Par suite, $(((a_1',b_1),a_1),b_1') \in \mathsf{ev}$, et donc $\mathsf{ev} \in \mathcal{I}(((S \multimap T) \otimes S) \multimap T) = \mathbf{PoLR}((S \multimap T) \otimes S, T)$.

Lemme 6.2.6 *Soient $s \in \mathcal{I}(S \multimap T)$ et $u \in \mathcal{I}(S)$. On a $\mathsf{ev}\,(s \otimes u) = s\,u$.*

Démonstration. Soit $b' \in \mathsf{ev}\,(s \otimes u)$. On peut trouver $(a',b) \in s$ et $a \in u$ tels que $a' \leq a$ et $b' \leq b$. Comme $x \in \mathcal{I}(S)$, on a $a' \in x$ et comme $s \in \mathcal{I}(S \multimap T)$, on a $(a,b') \in s$, donc $b' \in s\,u$. Réciproquement, si $b \in s\,u$, on peut trouver $a \in u$ tel que $(a,b) \in s$. On a $(((a,b),a),b) \in \mathsf{ev}$ et $((a,b),a) \in s \otimes u$. Donc $b \in \mathsf{ev}\,(s \otimes u)$. □

Soit $s \in \mathbf{PoLR}(U \otimes S, T)$. Soit

$$\mathsf{cur}\,s = \{((c,(a,b)) \in U \multimap (S \multimap T) \mid ((c,a),b) \in s\}\,.$$

Exercice 6.2.4 Montrer que $\mathsf{cur}\, s \in \mathbf{PoLR}(U, S \multimap T)$, que $\mathsf{ev}\,(\mathsf{cur}\, s \otimes \mathsf{Id}_S) = s$ et que $\mathsf{cur}\, s$ est le seul élément de $\mathbf{PoLR}(U, S \multimap T)$ qui vérifie cette équation.

On a montré que **PoLR**, avec la structure monoïdale symétrique définie ci-dessus, est monoïdale fermée.

Soit $\perp = 1$ (on utilise deux noms différents pour le même objet car, en logique linéaire, il représente deux formules distinctes).

Soit S un préordre. La bijection $|S| \to |S \multimap \perp|$ qui envoie a sur $(a, *)$ définit un isomorphisme fort de S^{op} vers $S \multimap \perp$.

On a $\mathsf{ev} \in \mathbf{PoLR}((S \multimap \perp) \otimes S, \perp)$ et donc $\mathsf{ev}\, \sigma \in \mathbf{PoLR}(S \otimes (S \multimap \perp), \perp)$, et donc

$$\mathsf{cur}\,\mathsf{ev}\,\widehat{\sigma} \in \mathbf{PoLR}(S, (S \multimap \perp) \multimap \perp)\,.$$

On a $\mathsf{ev} = \{(((a', *), a), *) \mid a' \leq_S a\}$, et donc $\mathsf{cur}\,\mathsf{ev}\,\widehat{\sigma} = \{(a, ((a', *), *)) \mid a' \leq a\}$. Donc $\mathsf{cur}\,\mathsf{ev}\,\widehat{\sigma} = \widehat{\eta}$ où $\eta : S \to ((S \multimap \perp) \multimap \perp)$ est l'isomorphisme fort évident.

On a vu que la catégorie monoïdale **PoLR** est $\star$-*autonome*, avec $\perp$ comme objet dualisant. Le dual $S^\perp = S \multimap \perp$ sera assimilé à S^{op}. En particulier, on peut définir un cotenseur (appelé *par*), en posant $S \parr T = (S^\perp \otimes T^\perp)^\perp$; il se trouve qu'ici, on a $S \parr T = S \otimes T$ (mais on rappelle que ce n'est pas le cas dans la catégorie des espaces cohérents, par exemple).

Lemme 6.2.7 *Si $S \simeq S'$, alors $S^\perp \simeq (S')^\perp$.*

Vérification immédiate.

6.3 Structure additive

Soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille de préordres. On définit $S = \&_{i \in I} S_i$, le *avec* des S_i, de la façon suivante : $|S| = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times |S_i|$, avec la relation de préordre selon laquelle $(i, a) \leq (j, b)$ si $i = j$ et $a \leq_{S_i} b$. On définit également, pour chaque $i \in I$:

$$\mathsf{pr}_i = \{((i, a), a') \mid a' \leq_{S_i} a\}\,.$$

On voit facilement que $\mathsf{pr}_i \in \mathbf{PoLR}(S, S_i)$. Soit T un préordre et soient $s_i \in \mathbf{PoLR}(T, S_i)$. Soit

$$s = \{(b, (i, a)) \mid i \in I \text{ et } (b, a) \in s_i\}\,.$$

On vérifie que $s \in \mathbf{PoLR}(T, \&_{i \in I} S_i)$. Soit $i \in I$ et $(b, a) \in s_i$. Soit $(b', (j, a')) \in T \multimap \&_{k \in I} S_k$ tel que $(b', (j, a')) \leq_{T \multimap \&_{k \in I} S_k} (b, (i, a))$. Cela signifie que $b \leq_T b'$, $i = j$ et $a' \leq_{S_i} a$, et donc $(b', a') \in s_i$. Par suite, on a bien $(b', (j, a')) \in s$ et donc $s \in \mathbf{PoLR}(T, \&_{i \in I} S_i)$. De plus, on vérifie facilement que $\mathsf{pr}_i\, s = s_i$ pour tout $i \in I$. On note $s = \langle s_i \rangle_{i \in I}$.

Soit maintenant $s \in \mathbf{PoLR}(T, \&_{i \in I} S_i)$ tel qu'on ait $\mathsf{pr}_i\, s = s_i$ pour tout $i \in I$. Soit $(b, (i, a)) \in T \multimap \&_{k \in I} S_k$ tel que $(b, (i, a)) \in s$. Comme $((i, a), a) \in \mathsf{pr}_i$, on a $(a, b) \in \mathsf{pr}_i\, s = s_i$. Cela montre que $s \subseteq \langle s_i \rangle_{i \in I}$. Réciproquement, soit $i \in I$ et soit $(b, a) \in s_i$. Comme $s_i = \mathsf{pr}_i\, s$, il existe $a' \in |S|_i$ tel que $((i, a'), a) \in \mathsf{pr}_i$ et $(b, (i, a')) \in s$. On a donc $a \leq a'$, et par suite $(b, (i, a)) \in s$, ce qui montre que $\langle s_i \rangle_{i \in I} \subseteq s$.

On a donc montré que $\&_{i \in I} S_i$, avec les projections pr_i, est le produit cartésien de la famille $(S_i)_{i \in I}$. Dans le cas particulier où $I = \emptyset$, le produit cartésien est l'objet terminal de **PoLR**, qui est le préordre $\emptyset$, que l'on note $\top$.

Lemme 6.3.1 *Si $S_i \simeq S'_i$ pour tout $i \in I$, alors $\&_{i \in I} S_i \simeq \&_{i \in I} S'_i$*

Vérification immédiate.

Noter qu'on a un isomorphisme d'ordre entre $\prod_{i \in I} \mathcal{I}(S_i)$ (muni de l'ordre produit) et $\mathcal{I}(\&_{i \in I} S_i)$, qui envoie la famille $\langle u_i \rangle_{i \in I}$ sur $\cup_{i \in I} \{i\} \times u_i$. On peut voir cela comme le cas particulier de la construction ci-dessus où T est le préordre à un point.

6.3.1 Foncteur produit cartésien. Si S est un préordre, on note S^I le produit cartésien $\&_{i\in I} S_i$ dans lequel $S_i = S$ pour chaque $i \in I$. Autrement dit, $S^I = I \times S$, en mettant sur I le préordre *discret* ($i \leq j$ iff $i = j$). Cette opération est fonctorielle : si $s \in \mathbf{PoLR}(S,T)$, alors $s^I = \langle s\,\mathsf{pr}_i\rangle_{i\in I} \in \mathbf{PoLR}(S^I, T^I)$ est donné par

$$s^I = \{((i,a),(i,b)) \mid i \in I \text{ et } (a,b) \in |S|\}\,.$$

6.3.2 Coproduit On a aussi un coproduit, défini par $\bigoplus_{i\in I} S_i = \left(\&_{i\in I} {S_i}^\perp\right)^\perp$. On voit facilement que $\bigoplus_{i\in I} S_i = \&_{i\in I} S_i$.

6.4 Exponentielles de Scott

On définit $|!_\mathsf{s}S| = \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(|S|)$, l'ensemble des parties finies de $|S|$. On munit cet ensemble du préordre suivant : si $u^1, u^2 \in |!_\mathsf{s}S|$, on dira que $u^1 \leq u^2$ si, pour tout $a \in u^1$, il existe $a' \in u^2$ tel que $a \leq a'$. Observer que cette relation est transitive et réflexive (c'est un préordre), et qu'elle n'est pas antisymétrique en général, même quand $\leq_S$ l'est. Observer aussi que $u^1 \leq_{!_\mathsf{s}S} u^2$ si et seulement si $\downarrow u^1 \subseteq \downarrow u^2$.

Exercice 6.4.1 Trouver un ensemble partiellement ordonné S tel que $!_\mathsf{s}S$ ne soit pas un ordre partiel.

Le treillis complet $\mathcal{I}(S)$ est en particulier un cpo.

Lemme 6.4.1 *Un élément u de $\mathcal{I}(S)$ est isolé (voir Section 5.1) si et seulement si $u = \downarrow u^0$ où $u^0 \in !_\mathsf{s}S$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{I}(S)$ isolé. Soit $D = \{\downarrow u^0 \mid u^0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(u)\}$. L'ensemble D est filtrant et on a $u = \bigcup D$. Comme u est isolé, il existe $u^0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(u)$ tel que $u \subseteq \downarrow u^0$, et donc $u = \downarrow u^0$ (puisque $u^0 \subseteq u$).

Réciproquement, soit $u = \downarrow u^0$ avec $u^0 \in |!_\mathsf{s}S|$. Soit D une partie filtrante de $\mathcal{I}(S)$ et supposons que $u \subseteq \bigcup D$. Comme $u^0 \subseteq \bigcup D$ et comme D est filtrant, il existe $v \in D$ tel que $u^0 \subseteq v$. Mais comme $v \in \mathcal{I}(S)$, on a aussi $u \subseteq v$, ce qui prove que u est isolé. □

6.4.1 Trace d'une fonction continue. Soit $f : \mathcal{I}(S) \to \mathcal{I}(T)$ une fonction Scott-continue. Cela signifie que f est croissante et commute aux unions des familles filtrantes. Autrement dit, pour toute partie filtrante D de $\mathcal{I}(S)$, on a $f(\bigcup D) \subseteq \bigcup f(D)$ (l'autre inclusion résulte simplement du fait que f est croissante).

On définit

$$\mathsf{Tr}(f) = \{(u^0, b) \in |!_\mathsf{s}S| \times |T| \mid b \in f(\downarrow u^0)\}\,.$$

On voit facilement que $\mathsf{Tr}(f) \in \mathcal{I}(!_\mathsf{s}S \multimap T)$. Réciproquement, soit $t \in \mathcal{I}(!_\mathsf{s}S \multimap T)$. On définit une fonction

$$\begin{array}{rcl}\mathsf{Fun}(t) : \mathcal{I}(S) & \to & \mathcal{P}(T) \\ u & \mapsto & \{b \mid \exists u^0 \subseteq u\ (u^0, b) \in t\}\end{array}$$

On vérifie facilement que $\mathsf{Fun}(t)$ prend ses valeurs dans $\mathcal{I}(T)$ et est croissante. On montre que $f = \mathsf{Fun}(t)$ est continue. Soit donc $D \subseteq \mathcal{I}(S)$ un ensemble filtrant, il faut montrer que $f(\bigcup D) \subseteq \bigcup f(D)$. Soit $b \in f(\bigcup D)$, il existe $u^0 \in |!_\mathsf{s}S|$ tel que $u^0 \subseteq \bigcup D$ et $(u^0, b) \in t$. Comme u^0 est fini et D filtrant, il existe $u \in D$ tel que $u^0 \subseteq u$. Donc $b \in f(u) \subseteq \bigcup f(D)$ (vu que $u \in D$).

Soit $\mathbf{PoC}$ la catégorie dont les objets sont les préordres, et telle que $\mathbf{PoC}(S,T)$ soit l'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{I}(S)$ vers $\mathcal{I}(T)$. On munit cet ensemble de morphismes de l'ordre ponctuel déjà vu : $f \leq g$ si et seulement si $f(u) \subseteq g(u)$ pour tout $u \in \mathcal{I}(S)$.

Exercice 6.4.2 Montrer que $\mathbf{PoL}(S,T) \subseteq \mathbf{PoC}(S,T)$, et que cette inclusion est stricte en général (donner un contre-exemple).

Proposition 6.4.2 *Les fonctions* Tr *et* Fun *définissent un isomorphisme d'ordre entre* $\mathbf{PoC}(S,T)$ *et* $\mathcal{I}(!_\mathsf{s}S \multimap T)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathbf{PoC}(S,T)$ et montrons que $\mathsf{Fun}(\mathsf{Tr}(f)) = f$. Soit donc $u \in \mathcal{I}(S)$, on montre que $\mathsf{Fun}(\mathsf{Tr}(f))(u) = f(u)$. Soit $b \in |T|$. Supposons d'abord que $b \in f(u)$. Soit $D = \{\downarrow u^0 \mid u^0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(u)\}$. On a $\bigcup D = u$, et D est filtrant. Donc $f(u) = f(\bigcup D) \subseteq \bigcup f(D)$, et par suite il existe $u^0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(u)$ tel que $b \in f(\downarrow u^0)$, c'est-à-dire $(u^0, b) \in \mathsf{Tr}(f)$. Comme $u^0 \subseteq u$, on a $b \in \mathsf{Fun}(\mathsf{Tr}(f))(u)$. Supposons maintenant que $b \in \mathsf{Fun}(\mathsf{Tr}(f))(u)$. Soit donc $u^0 \in |!_{\mathsf{s}}S|$ tel que $(u^0, b) \in \mathsf{Tr}(f)$ et $u^0 \subseteq u$. On a $b \in f(\downarrow u^0)$, et comme $\downarrow u^0 \subseteq u$ et comme f est croissante, on a $b \in f(u)$.

Soit $t \in \mathcal{I}(!_{\mathsf{s}}S \multimap T)$. On montre que $t = \mathsf{Tr}(\mathsf{Fun}(t))$. Soient $u^0 \in |!_{\mathsf{s}}S|$ et $b \in |T|$. On suppose d'abord $(u^0, b) \in t$. On a $b \in \mathsf{Fun}(t)(\downarrow u^0)$, puisque $u^0 \subseteq \downarrow u^0$, et donc $(u^0, b) \in \mathsf{Tr}(\mathsf{Fun}(t))$. Réciproquement, supposons $(u^0, b) \in \mathsf{Tr}(\mathsf{Fun}(t))$. Cela signifie que $b \in \mathsf{Fun}(t)(\downarrow u^0)$, et donc il existe $u^1 \in |!_{\mathsf{s}}S|$ tel que $u^1 \subseteq \downarrow u^0$ et $(u^1, b) \in t$. On a $u^1 \leq_{!_{\mathsf{s}}S} u^0$ et donc $(u^0, b) \in t$ puisque $t \in \mathcal{I}(!_{\mathsf{s}}S \multimap T)$.

On montre ensuite que Tr est croissante. Soient donc $f, f' \in \mathbf{PoC}(S,T)$ telles que $f \leq f'$ et soit $(u^0, b) \in \mathsf{Tr}(f)$. C'est que $b \in f(\downarrow u^0)$, or $f(\downarrow u^0) \subseteq f'(\downarrow {}^0 u)$ et donc $(u^0, b) \in \mathsf{Tr}(f')$, ce qui montre que $\mathsf{Tr}(f) \subseteq \mathsf{Tr}(f')$.

Soient $t, t' \in \mathbf{PoC}(S,T)$ tels que $t \subseteq t'$ et soit $u \in \mathcal{I}(S)$. Soit $b \in \mathsf{Fun}(t)(u)$. Soit u^0 tel que $(u^0, b) \in t$ et $u^0 \subseteq u$. Comme $t \subseteq t'$, on a $(u^0, b) \in t'$ et donc $b \in \mathsf{Fun}(t')(u)$, ce qui montre que $\mathsf{Fun}(t) \leq \mathsf{Fun}(t')$. □

6.4.2 L'exponentielle comme foncteur. Si $u \in \mathcal{I}(S)$, on définit $u^{!_{\mathsf{s}}} \in \mathcal{I}(!_{\mathsf{s}}S)$ en posant

$$u^{!_{\mathsf{s}}} = \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(u)\,.$$

Il faut remarquer qu'on a bien $u^{!_{\mathsf{s}}} \in \mathcal{I}(!_{\mathsf{s}}S)$. Soit en effet $u^0 \in u^{!_{\mathsf{s}}}$ et $u^1 \in |!_{\mathsf{s}}S|$ tel que $u^1 \leq_{!_{\mathsf{s}}S} u^0$. Soit $a' \in u^1$, il existe $a \in u^0$ tel que $a' \leq_S a$, or $a \in u$ et donc $a' \in u$ puisque $u \in \mathcal{I}(S)$. Il en résulte que $u^1 \subseteq u$ et donc que $u^1 \in u^{!_{\mathsf{s}}}$.

Lemme 6.4.3 *Soit $t \in \mathbf{PoL}(!S,T)$. On a $\mathsf{Fun}(t)(u) = t\, u^{!_{\mathsf{s}}}$.*

Démonstration. Soit $b \in \mathsf{Fun}(t)(u)$. Soit $u^0 \in |!_{\mathsf{s}}S|$ tel que $u^0 \subseteq u$ et $(u^0, b) \in t$. On a $u^0 \in u^{!_{\mathsf{s}}}$ et donc $b \in t\, u^{!_{\mathsf{s}}}$. Réciproquement, soit $b \in t\, u^{!_{\mathsf{s}}}$. Soit $u^0 \in u^{!_{\mathsf{s}}}$ tel que $(u^0, b) \in t$. On a $u^0 \subseteq u$ et donc $b \in \mathsf{Fun}(t)(u)$. □

Ce lemme très simple est important car il a la conséquence suivante, qui donne un critère suffisant pour que deux éléments de $\mathbf{PoL}(!S,T)$ soient égaux.

Lemme 6.4.4 *Soient $t, t' \in \mathbf{PoL}(!S,T)$. Si on a $t\, u^{!_{\mathsf{s}}} = t'\, u^{!_{\mathsf{s}}}$ pour tout $u \in \mathcal{I}(S)$, alors $t = t'$.*

Démonstration. En effet, on a alors $\mathsf{Fun}(t) = \mathsf{Fun}(t')$, et donc $t = t'$ par la proposition 6.4.2. □

Soit $t \in \mathbf{PoL}(S,T)$. Soit

$$!_{\mathsf{s}}t = \{(u^0, v^0) \in |!S| \times |!T| \mid \forall b \in v^0\ \exists a \in u^0\ (a,b) \in t\}\,.$$

Lemme 6.4.5 *Si $t \in \mathbf{PoL}(S,T)$, alors $!_{\mathsf{s}}t \in \mathbf{PoL}(!_{\mathsf{s}}S, !_{\mathsf{s}}T)$.*

Démonstration. Soit $(u^0, v^0) \in !_{\mathsf{s}}t$ est soit $(u^1, v^1) \in !_{\mathsf{s}}S \times !_{\mathsf{s}}T$ tel que $(u^1, v^1) \leq_{!_{\mathsf{s}}S \multimap !_{\mathsf{s}}T} (u^0, v^0)$, il faut voir que $(u^1, v^1) \in !_{\mathsf{s}}t$. Soit $b' \in v^1$. Comme $v^1 \leq_{!_{\mathsf{s}}T} v^0$, il existe $b \in v^0$ tel que $b' \leq_T b$. Comme $(u^0, v^0) \in !_{\mathsf{s}}t$, il existe $a \in u^0$ tel que $(a,b) \in t$. Comme $u^0 \leq_{!_{\mathsf{s}}S} u^1$, il existe $a' \in u^1$ tel que $a \leq_S a'$. On a $(a', b') \leq_{S \multimap T} (a,b)$, et donc $(a', b') \in t$ puisque $t \in \mathcal{I}(S \multimap T)$. Puisque $a' \in u^1$, on a montré que $(u^1, v^1) \in !_{\mathsf{s}}t$, et donc $!_{\mathsf{s}}t \in \mathbf{PoL}(!_{\mathsf{s}}S, !_{\mathsf{s}}T)$. □

Lemme 6.4.6 *Si $t \in \mathbf{PoL}(S,T)$ et $u \in \mathcal{I}(S)$, alors $!_{\mathsf{s}}t\, u^{!_{\mathsf{s}}} = (t\, u)^{!_{\mathsf{s}}}$.*

Démonstration. Soit $v^0 \in !_{\mathsf{s}}t\, u^{!_{\mathsf{s}}}$, montrons que $v^0 \in (t\, u)^{!_{\mathsf{s}}}$. Il existe $u^0 \in u^{!_{\mathsf{s}}}$ tel que $(u^0, v^0) \in !_{\mathsf{s}}t$. Soit $b \in v^0$, il existe $a \in u^0$ tel que $(a,b) \in t$. Comme $u^0 \subseteq u$, on a $a \in u$ et donc $b \in t\, u$, et donc $v^0 \in (t\, u)^{!_{\mathsf{s}}}$.

Réciproquement, soit $v^0 \in (t\, u)^{!_{\mathsf{s}}}$, c'est-à-dire que $v^0 \in |!_{\mathsf{s}}S|$ et $v^0 \subseteq t\, u$. Pour chaque $b \in v^0$, on choisit $a_b \in u$ tel que $(a_b, b) \in t$. Soit $u^0 \in !_{\mathsf{s}}S$ qui contient tous les a_b (pour $b \in v^0$). On a $(u^0, v^0) \in !_{\mathsf{s}}t$ et $u^0 \in u^{!_{\mathsf{s}}}$ et donc $v^0 \in !_{\mathsf{s}}t\, u^{!_{\mathsf{s}}}$. □

Proposition 6.4.7 *L'opération $t \mapsto \,!_{\mathsf{s}}t$ est fonctorielle. Autrement dit, $!_{\mathsf{s}}\mathsf{Id}_S = \mathsf{Id}_{!_{\mathsf{s}}S}$ et, si $s \in \mathbf{PoL}(S,T)$ et $t \in \mathbf{PoL}(T,U)$, on a $!_{\mathsf{s}}(t\,s) = \,!_{\mathsf{s}}t\,!_{\mathsf{s}}s$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{I}(S)$. On a $!_{\mathsf{s}}\mathsf{Id}_S\,u^{!_{\mathsf{s}}} = u^{!_{\mathsf{s}}}$ par le lemme 6.4.6, donc $!_{\mathsf{s}}\mathsf{Id}_S = \mathsf{Id}_{!_{\mathsf{s}}S}$ par le lemme 6.4.4. Et on a $!_{\mathsf{s}}(t\,s)\,u^{!_{\mathsf{s}}} = ((t\,s)\,u)^{!_{\mathsf{s}}}$ par le lemme 6.4.6, donc $!_{\mathsf{s}}(t\,s)\,u^{!_{\mathsf{s}}} = (t\,(s\,u))^{!_{\mathsf{s}}} = \,!_{\mathsf{s}}t\,(s\,u)^{!_{\mathsf{s}}} = (!_{\mathsf{s}}t\,!_{\mathsf{s}}s)\,u^{!_{\mathsf{s}}}$ en appliquant deux fois le lemme 6.4.6, et on conclut grâce au lemme 6.4.4. □

Lemme 6.4.8 *Si $S \simeq S'$, alors $!_{\mathsf{s}}S \simeq \,!_{\mathsf{s}}S'$.*

La vérification est immédiate.

6.4.3 Structure de comonade de l'exponentielle. Soit $\mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S \subseteq |!S \multimap S|$ donné par

$$\mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S = \{(u^0, a) \mid \exists a' \in u^0 \;\; a \leq_S a'\}\,.$$

Lemme 6.4.9 *On a $\mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S \in \mathbf{PoL}(!S, S)$ et, pour tout $u \in \mathcal{I}(S)$, on a $\mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S\,u^{!_{\mathsf{s}}} = u$. De plus $\mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S$ est naturel en S ; autrement dit, si $s \in \mathbf{PoLR}(S,T)$, on a $\mathsf{der}^{\mathsf{s}}_T\,!_{\mathsf{s}}s = s\,\mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S$.*

Démonstration. Soit $(u^0, a) \in \mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S$ et soit $(u^1, a^1) \in |!_{\mathsf{s}}S \multimap S|$ tel que $(u^1, a^1) \leq_{!_{\mathsf{s}}S \multimap S} (u^0, a)$. Soit $a^2 \in u^0$ tel que $a \leq a^2$. Comme $u^0 \leq_{!_{\mathsf{s}}S} u^1$, il existe $a^3 \in u^1$ tel que $a^2 \leq a^3$. Comme $a^1 \leq a$, on a $a^1 \leq a^3 \in u^1$, ce qui montre que $(u^1, a^1) \in \mathsf{der}_S$, et donc $\mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S \in \mathbf{PoL}(!S, S)$.

Soit $u \in \mathcal{I}(S)$. Soit $a \in u$. On a $(\{a\}, a) \in \mathsf{der}_S$, donc $a \in \mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S\,u^{!_{\mathsf{s}}}$ puisque $\{a\} \in u^{!_{\mathsf{s}}}$. Si $a \in \mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S\,u^{!_{\mathsf{s}}}$, soit $u^0 \in u^{!_{\mathsf{s}}}$ tel que $(u^0, a) \in \mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S$. Soit $a^1 \in u^0$ tel que $a \leq a^1$. Comme $a^1 \in u^0 \subseteq u$ et comme $u \in \mathcal{I}(S)$, on a $a \in u$. Donc $\mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S\,u^{!_{\mathsf{s}}} = u$.

La naturalité en résulte : on a $(\mathsf{der}^{\mathsf{s}}_T\,!_{\mathsf{s}}s)\,u^{!_{\mathsf{s}}} = \mathsf{der}^{\mathsf{s}}_T\,(s\,u)^{!_{\mathsf{s}}} = s\,u = (s\,\mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S)\,u^{!_{\mathsf{s}}}$. On conclut par le lemme 6.4.4. □

On définit ensuite $\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S \subseteq |!_{\mathsf{s}}S \multimap \,!_{\mathsf{s}}!_{\mathsf{s}}S|$ par

$$\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S = \{(u^0, U^0) \mid \forall u^1 \in U^0 \quad u^1 \leq_{!_{\mathsf{s}}S} u^0\}\,.$$

Lemme 6.4.10 *On a $\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S \in \mathbf{PoL}(!_{\mathsf{s}}S, !_{\mathsf{s}}!_{\mathsf{s}}S)$ et, pour tout $u \in \mathcal{I}(S)$, on a $\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S\,u^{!_{\mathsf{s}}} = u^{!_{\mathsf{s}}!_{\mathsf{s}}}$. De plus, $\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S$ est naturel en S ; autrement dit, si $s \in \mathbf{PoL}(S,T)$, on a $\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_T\,!_{\mathsf{s}}s = \,!_{\mathsf{s}}!_{\mathsf{s}}s\,\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S$.*

Démonstration. Soit $(u^0, U^0) \in \mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S$ et soit

$$(u^1, U^1) \in |!_{\mathsf{s}}S \multimap \,!_{\mathsf{s}}!_{\mathsf{s}}S|$$

tel que $(u^1, U^1) \leq_{!_{\mathsf{s}}S \multimap !_{\mathsf{s}}!_{\mathsf{s}}S} (u^0, U^0)$, on montre que $(u^1, U^1) \in \mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S$. Soit $v^1 \in U^1$ on doit montrer que $v^1 \leq_{!_{\mathsf{s}}S} u^1$. Soit $a^1 \in v^1$. Comme $U^1 \leq_{!_{\mathsf{s}}!_{\mathsf{s}}S} U^0$, on peut trouver $v^0 \in U^0$ tel que $v^1 \leq_{!_{\mathsf{s}}S} v^0$. Comme $a^1 \in v^1$, il existe $a \in v^0$ tel que $a^1 \leq a$. Or $v^0 \leq_{!_{\mathsf{s}}S} u^0$ puisque $(u^0, U^0) \in \mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S$. Comme $u^0 \leq_{!_{\mathsf{s}}S} u^1$ on peut trouver $a^2 \in u^1$ tel que $a^1 \leq a^2$. On a montré que $v^1 \leq_{!_{\mathsf{s}}S} u^1$, ce qu'on voulait.

Soit $u \in \mathcal{I}(S)$. On montre que $\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S\,u^{!_{\mathsf{s}}} = u^{!_{\mathsf{s}}!_{\mathsf{s}}}$. Soit donc $U^0 \in \,!_{\mathsf{s}}!_{\mathsf{s}}S$. On suppose d'abord que $U^0 \in \mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S\,u^{!_{\mathsf{s}}}$, et donc qu'il existe $u^0 \in u^{!_{\mathsf{s}}}$ tel que $(u^0, U^0) \in \mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_X$. Soit $u^1 \in U^0$. Par definition de $\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S$, on a $u^1 \leq_{!_{\mathsf{s}}S} u^0$. Comme $u^0 \in u^{!_{\mathsf{s}}}$ et $u \in \mathcal{I}(S)$, on a $u^1 \in u^{!_{\mathsf{s}}}$ et donc $U^0 \in u^{!_{\mathsf{s}}!_{\mathsf{s}}}$. Supposons réciproquement que $U^0 \in u^{!_{\mathsf{s}}!_{\mathsf{s}}}$. Soit $u^0 \in U^0$, on a $u^0 \in u^{!_{\mathsf{s}}}$ et $(u^0, U^0) \in \mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S$ ce qui montre que $U^0 \in \mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S\,u^{!_{\mathsf{s}}}$. La naturalité découle de ce qui précède et du lemme 6.4.4. □

Proposition 6.4.11 *Le foncteur $!_{\mathsf{s}}\_$, équipé des transformations naturelles $\mathsf{der}^{\mathsf{s}}$ et $\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}$, est une comonade.*

Démonstration. Il s'agit de prouver les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathsf{der}^{\mathsf{s}}_{!_{\mathsf{s}}S}\,\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S &= \mathsf{Id}_{!_{\mathsf{s}}S}\\
!_{\mathsf{s}}\mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S\,\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S &= \mathsf{Id}_{!_{\mathsf{s}}S}\\
\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_{!_{\mathsf{s}}S}\,\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S &= \,!\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S\,\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S
\end{aligned}$$

La vérification de ces équations est immédiate, en utilisant les lemmes 6.4.9, 6.4.10 et 6.4.4. □

6.4.4 Isomorphisme fondamental (isomorphisme de Seely). Soient S et T des préordres. On observe qu'un élément u^0 de $|!_{\mathsf{s}}(S \,\&\, T)|$ est de la forme

$$u^0 = \{(1,a_1),\dots,(1,a_l),(2,b_1),\dots,(2,b_r)\}$$

avec $a_1,\dots,a_l \in |S|$ et $b_1,\dots,b_r \in |T|$. On peut donc associer à u^0 le couple $(u^1,u^2) \in |!_{\mathsf{s}}S \otimes !_{\mathsf{s}}T|$ où $u^1 = \{a_1,\dots,a_l\}$ et $u^2 = \{b_1,\dots,b_r\}$. Cela définit une bijection $\theta : |!_{\mathsf{s}}(S \,\&\, T)| \to |!_{\mathsf{s}}S \otimes !_{\mathsf{s}}T|$ par $\theta(u^0) = (u^1,u^2)$.

Exercice 6.4.3 Montrer que θ est un isomorphisme fort de $!_{\mathsf{s}}(S \,\&\, T)$ vers $!_{\mathsf{s}}S \otimes !_{\mathsf{s}}T$.

Bien sûr cet isomorphisme fort se généralise en arité quelconque : on a un isomorphisme fort θ de $!_{\mathsf{s}}(S_1 \,\&\, \cdots \,\&\, S_k)$ vers $!_{\mathsf{s}}S_1 \otimes \cdots \otimes !_{\mathsf{s}}S_k$ (voir 4.5.6 pour un traitement catégorique systématique de ces questions, qui s'applique bien sûr ici). Quand $k = 0$, c'est l'isomorphism entre deux préordres à 1 élément ($\emptyset$ et $*$ respectivement).

Si $s \in \mathbf{PoLR}(!_{\mathsf{s}}S,T)$, on rappelle que la promotion de s est $s^{!_{\mathsf{s}}} \in \mathbf{PoLR}(!_{\mathsf{s}}S, !_{\mathsf{s}}T)$ qui est défini par

$$s^{!_{\mathsf{s}}} = !_{\mathsf{s}}s\ \mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_S\ .$$

On vérifie facilement que

$$s^{!_{\mathsf{s}}} = \{(u^0,v^0) \in |!_{\mathsf{s}}S \multimap !_{\mathsf{s}}T|) \mid \forall b \in v^0\ (u^0,b) \in s\}\,.$$

Soit $s \in \mathbf{PoLR}(!_{\mathsf{s}}S_1 \otimes \cdots \otimes !_{\mathsf{s}}S_k, T)$. En utilisant l'isomorphisme de Seely et l'opération de promotion définie ci-dessus, on définit une version généralisée de la promotion $s^{!_{\mathsf{s}}} \in \mathbf{PoLR}(!_{\mathsf{s}}S_1 \otimes \cdots \otimes !_{\mathsf{s}}S_k, T)$ qui vérifie

$$s^{!_{\mathsf{s}}} = \{((u^1,\dots,u^k),v^0) \in |!_{\mathsf{s}}S_1 \otimes \cdots \otimes !_{\mathsf{s}}S_k \multimap !_{\mathsf{s}}T|) \mid \forall b \in v^0\ ((u^1,\dots,u^k),b) \in s\}\,.$$

Enfin, observer qu'un morphisme $s \in \mathbf{PoLR}(!_{\mathsf{s}}S_1 \otimes \cdots \otimes !_{\mathsf{s}}S_k, T)$ est complètement caractérisé par son comportement sur les arguments de la forme ${u_1}^{!_{\mathsf{s}}} \otimes \cdots \otimes {u_k}^{!_{\mathsf{s}}}$. Autrement dit, si s et s' sont deux tels morphismes et si

$$\forall u_1 \in \mathcal{I}(S_1) \dots \forall u_k \in \mathcal{I}(S_k) \quad s\,({u_1}^{!_{\mathsf{s}}} \otimes \cdots \otimes {u_k}^{!_{\mathsf{s}}}) = s'\,({u_1}^{!_{\mathsf{s}}} \otimes \cdots \otimes {u_k}^{!_{\mathsf{s}}})$$

alors $s = s'$. Cela résulte de cet isomorphisme fort et du lemme 6.4.4.

Par exemple, la promotion généralisée ci-dessus est complètement caractérisée par l'équation

$$s^{!_{\mathsf{s}}}\,({u_1}^{!_{\mathsf{s}}} \otimes \cdots \otimes {u_k}^{!_{\mathsf{s}}}) = \left(s\,({u_1}^{!_{\mathsf{s}}} \otimes \cdots \otimes {u_k}^{!_{\mathsf{s}}})\right)^{!_{\mathsf{s}}}\,.$$

6.4.5 Catégorie de Kleisli. C'est la “catégorie des coalgèbres libres” de la comonade $(!_{\mathsf{s}}\_, \mathsf{der}^{\mathsf{s}}, \mathsf{dig}^{\mathsf{s}})$. On la notera $\mathbf{PoLR}_{!_{\mathsf{s}}}$ et elle est définie comme suit.

Ses objets sont ceux de $\mathbf{PoLR}$, et $\mathbf{PoLR}_{!_{\mathsf{s}}}(S,T) = \mathbf{PoLR}(!_{\mathsf{s}}S,T)$. L'identité est $\mathrm{Id}^{\mathsf{K}} = \mathsf{der}^{\mathsf{s}}_S \in \mathbf{PoLR}(!_{\mathsf{s}}S,S)$. Etant donnés $s \in \mathbf{PoLR}(!_{\mathsf{s}}S,T)$ et $t \in \mathbf{PoLR}(!_{\mathsf{s}}T,U)$, la composition $t \circ s$ est définie par

$$t \circ s = t\,!_{\mathsf{s}}s\,\mathsf{dig}^{\mathsf{s}}_s\,.$$

Exercice 6.4.4 En utilsant les équations de comonade, montrer qu'on a bien défini ainsi une catégorie.

Exercice 6.4.5 Soient $s \in \mathbf{PoLR}_{!_{\mathsf{s}}}(S,T)$ et $\mathbf{PoLR}_{!_{\mathsf{s}}}(T,U)$. Montrer que

$$t \circ s = \{(u^0,c) \mid \exists b_1,\dots,b_k \in |T|\ (\{b_1,\dots,b_k\},c) \in t \text{ et } \forall i\ (u^0,b_i) \in s\}$$

Lemme 6.4.12 *On a* $\mathsf{Fun}\,(\mathrm{Id}^{\mathsf{K}}) = \mathit{Id}$ *et* $\mathsf{Fun}\,(t \circ s) = \mathsf{Fun}(t) \circ \mathsf{Fun}(s)$*, autrement dit, la correspondance qui envoie l'objet* S *de* $\mathbf{PoLR}_{!_{\mathsf{s}}}$ *sur le même objet* S *de* $\mathbf{PoC}$ *et le morphisme* $s \in \mathbf{PoLR}_{!_{\mathsf{s}}}(S,T)$ *sur le morphisme* $\mathsf{Fun}(s) \in \mathbf{PoC}(S,T)$ *est un foncteur de* $\mathbf{PoLR}_{!_{\mathsf{s}}}$ *vers* $\mathbf{PoC}$*, que l'on note encore* Fun*. Réciproquement, si* $f \in \mathbf{PoC}(S,T)$ *et* $g \in \mathbf{PoC}(T,U)$*, on a* $\mathsf{Tr}(g \circ f) = \mathsf{Tr}(g) \circ \mathsf{Tr}(f)$ *et* $\mathsf{Tr}(\mathit{Id}) = \mathrm{Id}^{\mathsf{K}}$*, c'est-à-dire que* Tr *définit un foncteur de la catégorie* $\mathbf{PoC}$ *vers la catégorie* $\mathbf{PoLR}_{!_{\mathsf{s}}}$ *(qui est l'identité sur les objets). Ces foncteurs sont inverses l'un de l'autre et définissent donc un isomorphisme entre les catégories* $\mathbf{PoLR}_{!_{\mathsf{s}}}$ *et* $\mathbf{PoC}$*.*

Exercice 6.4.6 Vérifier la fonctorialité des opérations Fun et Tr.

Lemme 6.4.13 *La catégorie* $\mathbf{PoLR}_{!_s}$ *est cartésienne. Le produit cartésien de la famille* $(S_i)_{i\in I}$ *est* $S = \&_{i\in I} S_i$. *La i-ème projection est* $\pi_i^{\mathsf{K}} = \mathsf{pr}_i\, \mathit{der}_S \in \mathbf{PoLR}_{!_s}(S, S_i)$.

Démonstration. Si $t_i \in \mathbf{PoLR}_!(T, S_i)$ pour $i \in I$, alors $t = \langle t_i\rangle_{i\in I} \in \mathbf{PoLR}_!(T, S)$ et vérifie $\pi_i^{\mathsf{K}} \circ t = t_i$, et est caractérisé par cette propriété, comme on le voit facilement. □

Remarque 6.4.14 On a déjà observé que $\mathcal{I}(\&_{i\in I} S_i) \simeq \prod_{i\in I} \mathcal{I}(S_i)$. Modulo cet isomorphisme d'ordre, on a $\pi_i^{\mathsf{K}}(u_j)_{j\in I} = u_i$, et si les $f_i : \mathcal{I}(T) \to \mathcal{I}(S_i)$ sont des fonctions continues, la fonction continue associée $f : \mathcal{I}(T) \to \prod_{i\in I} \mathcal{I}(S_i)$ est donnée par $f(u) = (f_i(u))_{i\in I}$.

Proposition 6.4.15 *La catégorie* $\mathbf{PoLR}_!$ *est cartésienne fermée. L'objet des morphismes de* S *vers* T *dans* $\mathbf{PoLR}_!$ *est* $S \Rightarrow T = {!S} \multimap T$. *Le morphisme d'évaluation* $\mathit{Ev} \in \mathbf{PoLR}_!((S \Rightarrow T) \mathbin{\&} S, T)$ *est*

$$\mathit{Ev} = \mathit{ev}\,(\mathit{der}_{S\Rightarrow T} \otimes \mathit{Id}_{!S})\,\widehat{\theta} \tag{6.1}$$

où $\theta : !((S \Rightarrow T) \mathbin{\&} S) \to !(S \Rightarrow T) \otimes !S$ *est l'isomorphisme fondamental*[1]. *De plus, modulo cet isomorphisme, on a*

$$\begin{aligned}\mathit{Ev} = \{((v^0, u^0), b) \in (!(S \Rightarrow T) \otimes !S) \multimap T \mid \\ \exists (u^1, b^1) \in v^0 \quad (u^0, b) \leq_{S\Rightarrow T} (v^1, b^1)\}\end{aligned} \tag{6.2}$$

C'est juste une instance de la Proposition 4.5.1. De plus, étant donné $s \in \mathbf{PoLR}_!(U \mathbin{\&} S, T)$, le curryfié $\mathsf{Cur}\, s \in \mathbf{PoLR}_!(U, S \Rightarrow T)$ est donné (toujours modulo l'isomorphisme fondamental) par

$$\mathsf{Cur}\, s = \{(w^0, (u^0, b)) \mid ((w^0, u^0), b) \in s\}\,.$$

6.4.6 Fixpoint operators. Let S be a preorder and let $s \in \mathbf{PoLR}_!(S, S)$. We know that $f = \mathsf{Fun}\, s$ is a Scott continuous function $\mathcal{I}(S) \to \mathcal{I}(S)$. Since f is monotonic, we have $\emptyset \subseteq f(\emptyset) \subseteq f^2(\emptyset) \subseteq \cdots$ (by induction). Let $u = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\emptyset)$, we have $u \in \mathcal{I}(S)$ and moreover $f(u) = u$ (by Scott continuity), that is u is a fixpoint of f (it is actually the least fixpoint of f).

Exercice 6.4.7 Prove that this set is the least set u such that for all $u^0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(u)$ and $a \in |S|$, if $(u^0, a) \in s$, then $a \in u$.

We want now to prove that the function which maps s to its least fixpoint is itself Scott continuous from $\mathcal{I}(S \Rightarrow S)$ to $\mathcal{I}(S)$. It would be rather easy to prove it directly, but we prefer to present a more elaborate approach which uses the cartesian closeness of $\mathbf{PoLR}_!$ (and the fact that, in that category, any morphism from an object to itself has a least fixpoint). The benefit is that this method can be applied in many other models where a direct proof that the operator mapping a morphism to its least fixpoint is a morphism would be much more painful (we think in particular of game models).

Exercice 6.4.8 Prove directly that the function $\mathcal{I}(S \Rightarrow S) \to \mathcal{I}(S)$ which maps s to $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathsf{Fun}\, s)^n(\emptyset)$ is Scott continuous.

Given a preorder S, we define a morphism

$$\mathcal{Z} \in \mathbf{PoLR}_!((S \Rightarrow S) \Rightarrow S, (S \Rightarrow S) \Rightarrow S)$$

using the cartesian closeness of $\mathbf{PoLR}_!$ (the same definition makes sense in any cartesian closed category). Setting $T = (S \Rightarrow S) \Rightarrow S$, we define $\mathcal{Z} = \mathsf{Cur}\, \mathcal{Z}_0$ where $\mathcal{Z}_0 \in \mathbf{PoLR}_!(T \mathbin{\&} (S \Rightarrow S), S)$ is given by the following composition of morphisms in $\mathbf{PoLR}_!$:

[1]. On rappelle que $\widehat{\theta} \in \mathbf{PoL}(!((S \Rightarrow T) \mathbin{\&} S), !(S \Rightarrow T) \otimes !S)$ est l'isomorphisme, dans $\mathbf{PoL}$, associé à l'isomorphisme fort θ, voir le paragraphe 6.1.4)

$$\begin{tikzcd}
T \mathbin{\&} (S \Rightarrow S) \arrow[r, "T \mathbin{\&} \langle \mathsf{Id}, \mathsf{Id} \rangle"] & T \mathbin{\&} (S \Rightarrow S) \mathbin{\&} (S \Rightarrow S) \arrow[r, "\mathsf{Ev} \mathbin{\&} \mathsf{Id}"] & S \mathbin{\&} (S \Rightarrow S) \arrow[d, "\langle \mathsf{pr}_2, \mathsf{pr}_1 \rangle"] \\
& S & (S \Rightarrow S) \mathbin{\&} S \arrow[l, "\mathsf{Ev}"']
\end{tikzcd}$$

The same morphism $\mathcal{Z}$ can also be defined as $\mathcal{Z} = \mathsf{cur}\, \mathcal{Z}_1$ (curryfication in the symmetric monoidal closed category **PoLR** now) where $\mathcal{Z}_1$ the following composition in **PoLR**

$$\begin{tikzcd}
!_{\mathsf{s}} T \otimes !_{\mathsf{s}}(!_{\mathsf{s}} S \multimap S) \arrow[r, "!_{\mathsf{s}} T \otimes \mathsf{c}"] & !T \otimes !_{\mathsf{s}}(!_{\mathsf{s}} S \multimap S) \otimes !_{\mathsf{s}}(!_{\mathsf{s}} S \multimap S) \arrow[d, "e_{!S \multimap S, S} \otimes \mathsf{der}"] \\
S \quad (!_{\mathsf{s}} S \multimap S) \otimes !_{\mathsf{s}} S \arrow[l, "\mathsf{ev}"'] & !_{\mathsf{s}} S \otimes (!_{\mathsf{s}} S \multimap S) \arrow[l, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

where, for any preorders U, V, we set $e_{U,V} = (\mathsf{ev}\,(\mathsf{der}_{!U \multimap V} \otimes !U))^! : !(!U \multimap V) \otimes !U \to !V$. This morphism is characterized by

$$e_{U,V}\,(w^{!_{\mathsf{s}}} \otimes u^{!_{\mathsf{s}}}) = (w\, u^{!_{\mathsf{s}}})^{!_{\mathsf{s}}}$$

for all $w \in \mathcal{I}(!U \multimap V)$ and $u \in \mathcal{I}(U)$. Therefore $\mathcal{Z}_1$ is characterized by

$$\mathcal{Z}_1\,(Y^{!_{\mathsf{s}}} \otimes t^{!_{\mathsf{s}}}) = t\,(Y\, t^{!_{\mathsf{s}}})^{!_{\mathsf{s}}}$$

for all $Y \in \mathcal{I}(T)$ (intuitively, Y is a candidate for being a fixpoint operator) and $t \in \mathcal{I}(!_{\mathsf{s}} S \multimap S)$. Setting $F = \mathsf{Fun}\, \mathcal{Z}$, the element $F(Y)$ of $\mathcal{I}(T)$ is characterized by

$$\forall t \in \mathcal{I}(!S \multimap S) \quad \mathsf{Fun}(F(Y))(t) = \mathsf{Fun}(t)(\mathsf{Fun}(Y)(t))$$

We define our fixpoint operator $\mathcal{Y}_S \in \mathcal{I}(T)$ as the least fixpoint of F : $\mathcal{Y}_S = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^n(\emptyset)$. Therefore, by the property above, it maps any $t \in \mathcal{I}(!S \multimap S)$ to a fixpoint of the Scott continuous function $\mathsf{Fun}(t) : \mathcal{I}(S) \to \mathcal{I}(S)$.

Exercice 6.4.9 With the notations above, prove that $\mathsf{Fun}(\mathcal{Y}_S)(t)$ is the least fixpoint of $f = \mathsf{Fun}(t)$, that is $\mathsf{Fun}(\mathcal{Y}_S)(t) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\emptyset)$.

Exercice 6.4.10 Prove that $\mathcal{Y}_S$ is the least element of $\mathcal{I}(T) = \mathcal{I}(!_{\mathsf{s}}(!_{\mathsf{s}} S \multimap S) \multimap S)$ such that, if $(U^0, a) \in \mathcal{Y}_S$, then there exists $(v^0, b) \in U^0$ such that $a \leq_S b$ and $\forall c \in v^0\ (U^0, c) \in \mathcal{Y}_S$. For instance $(\{(\emptyset, a)\}, a) \in \mathcal{Y}_S$ and $(\{(\{b\}, a), (\emptyset, b)\}, a) \in \mathcal{Y}_S$.

6.4.7 Variable types and type fixpoints Given two preorders S and T, we say that S is a *sub-preorder* of T and write $S \subseteq T$ if $|S| \subseteq |T|$ and

$$\forall a, a' \in |S| \quad a \leq_S a' \Leftrightarrow a \leq_T a' \,.$$

We denote as $\mathbf{PoLR}_{\subseteq}$ the partially ordered class[2] of all preorders equiped with the $\subseteq$ partial order relation (it is clear that this relation is an order relation).

Exercice 6.4.11 Prove that any directed subset $\mathcal{D}$ of $\mathbf{PoLR}_{\subseteq}$ has a least upper bound in $\mathbf{PoLR}_{\subseteq}$, for the $\subseteq$ order relation.

2. It is not a set in the sense of ZF set theory.

This least upper bound will be denoted as $\bigcup \mathcal{D}$, and it is characterized by

$$|\bigcup \mathcal{D}| = \bigcup_{S\in\mathcal{D}} |S|$$
$$\forall a, a' \in |\bigcup \mathcal{D}| \quad a \leq_{\bigcup \mathcal{D}} a' \Leftrightarrow \exists S \in \mathcal{D}\, a \leq_S a'\,.$$

A k-ary variable type is a function $\Phi : \mathbf{PoLR}_{\subseteq}^k \to \mathbf{PoLR}_{\subseteq}$ which is monotonic and Scott continuous (for the product order in $\mathbf{PoLR}_{\subseteq}^k$).

Lemme 6.4.16 *The functions $S \mapsto S^{\perp}$ and $S \mapsto \oc_{\mathsf{s}} S$ are variable types or arity 1. The functions $(S_1, S_2) \mapsto S_1 \otimes S_2$ and $(S_1, S_2) \mapsto S_1 \mathbin{\&} S_2$ are variable types of arity 2.*

Exercice 6.4.12 Prove this lemma.

Remember that all connectives of linear are definable in terms of the connectives mentioned in this lemma, for instance $S \multimap T = (S \otimes T^{\perp})^{\perp}$, and hence are variable types.

Then, given a $k+1$-ary variable type Φ, we define $\mathsf{Rec}\,\Phi : \mathbf{PoLR}_{\subseteq}^k \to \mathbf{PoLR}_{\subseteq}$ by

$$\mathsf{Rec}\,\Phi(S_1, \dots, S_k) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Psi^n(0)$$

where 0 is the preorder such that $|0| = \emptyset$ (it is the least element of $\mathbf{PoLR}_{\subseteq}$) and Ψ is the variable type of arity 1 defined by $\Psi(S) = \Phi(S_1, \dots, S_k, S)$. Observe indeed that we have

$$0 \subseteq \Psi(0) \subseteq \Psi^2(0) \subseteq \cdots$$

so that this preorder $\mathsf{Rec}\,\Phi(S_1, \dots, S_k)$ is well defined.

One proves easily that $\mathsf{Rec}\,\Phi$ is a variable type (of arity k). By Scott continuity of Φ, we have

$$\Phi(S_1, \dots, S_k, \mathsf{Rec}\,\Phi(S_1, \dots, S_k)) = \mathsf{Rec}\,\Phi(S_1, \dots, S_k)\,.$$

As an example, consider Φ, the variable type of arity 1 defined by $\Phi(S) = (\oc_{\mathsf{s}}(\mathsf{N} \multimap S))^{\perp}$ where N is the preorder such that $|\mathsf{N}| = \mathbb{N}$ and $\leq_{\mathsf{N}}$ is equality (that is $s \leq_{\mathsf{N}} m$ if $n = m$). Then, since $\mathsf{N} \simeq 1 \oplus \mathsf{N}$ (by the strong isomorphism which maps 0 to $(1, *)$ and $n+1$ to $(2, n)$) we have, setting $D_\infty = \mathsf{Rec}\,\Phi$:

$$\begin{aligned}
D_\infty &= \Phi(D_\infty) \\
&= (\oc_{\mathsf{s}}(\mathsf{N} \multimap D_\infty))^{\perp} \\
&\simeq (\oc_{\mathsf{s}}((1 \oplus \mathsf{N}) \multimap D_\infty))^{\perp} \\
&\simeq (\oc_{\mathsf{s}}(D_\infty \mathbin{\&} (\mathsf{N} \multimap D_\infty)))^{\perp} \\
&\simeq D_\infty \Rightarrow D_\infty \text{ by Seely iso and the definition of } D_\infty
\end{aligned}$$

which means that we have built a model of the pure λ-calculus (which is actually isomorphic to Dana Scott's D_∞, historically the first model of the pure λ-calculus).

A simpler example is obtained by taking $\Phi(S) = 1 \oplus \oc S$. Then $\mathsf{L} = \mathsf{Rec}\,\Phi$ will be the interpretation of the type of lazy integers of the language LPCF of Chapter 2. We have $|L| = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} |\Phi^n(0)|$ and hence for any $a \in |L|$ we can define $\mathsf{ht}(a)$, the height of a, as the least $n \in \mathbb{N}$ such that $a \in |\Phi^n(0)|$. Of course we have $\mathsf{ht}(a) \geq 1$ for each a.

Any $a \in |\mathsf{L}|$ is of shape either $(1, *)$ (where $*$ is the unique element of $|1|$) and then $\mathsf{ht}(a) = 1$, or of shape $(2, \{a_1, \dots, a_k\})$ where $a_i \in |L|$ and then $\mathsf{ht}(a) = 1 + \max_{i=1}^{k}(\mathsf{ht}(a_i))$.

We use the following more suggestive notations :

$$\zeta = (1, *) \text{ which represents } 0$$
$$\overline{\mathsf{suc}}\, u^0 = (2, u^0)$$

where u^0 is a finite subset of $|\mathsf{L}|$ whose all element's heights are $<$ than $\mathsf{ht}(a)$. This $\overline{\mathsf{suc}}\, u^0$ is a kind of "successor" of u^0, but observe that u^0 is not really an integer, but should rather be understood as a finite set of potential values for an integer.

Then the preorder relation of L is characterized by the following clauses :

$$\zeta \leq_{\mathsf{L}} a \text{ iff } a = \zeta$$
$$\overline{\mathsf{suc}}\, u^0 \leq_{\mathsf{L}} a \text{ iff } a = \overline{\mathsf{suc}}\, u^1 \text{ with } u^0 \leq_{!_{\mathsf{s}}\mathsf{L}} u^1 .$$

6.5 Scott semantics of LPCF as an intersection typing system.

We are now interested in investigating the properties of the Scott semantics of our language LPCF (see Chapter 2). Given a type A of this language, we define $[A]$ as an object of **PoLR** as follows :

$$[\iota] = \mathsf{L}$$
$$[A \to B] = [A] \Rightarrow [B] = !_{\mathsf{s}}[A] \multimap [B]$$

For any type A and any element a of $|A|$, we define $\mathsf{ht}_A(a) \in \mathbb{N}$ by induction on A as follows :

— if $A = \iota$ then $\mathsf{ht}_\iota(a) = \mathsf{ht}(a)$

— and if $A = (B \to C)$ and $a = (\{b_1, \dots, b_k\}, c)$ then $\mathsf{ht}_A(a) = 1 + \max(\mathsf{ht}(c), \mathsf{ht}(b_1), \dots, \mathsf{ht}(b_k))$.

Also, if $u^0 \in |!_{\mathsf{s}}[A]|$, we define $\mathsf{ht}_A(u^0)$ as the max of all $\mathsf{ht}_A(a)$ for $a \in u^0$ (so that $\mathsf{ht}_A(\emptyset) = 0$).

Given a typing context $\Gamma = (x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k)$, a type A and a term M such that $\Gamma \vdash M : A$, we define

$$[M]_\Gamma \in \mathbf{PoLR}(!_{\mathsf{s}}[A_1] \otimes \cdots \otimes !_{\mathsf{s}}[A_k], [A])$$

that is, equivalently, $[M]_\Gamma$ is an element of $\mathbf{PoLR}_!([A_1] \,\&\, \cdots \,\&\, [A_k], [A])$ or a Scott continuous function

$$\prod_{i=1}^{k} \mathcal{I}([A_i]) \to \mathcal{I}([A]) .$$

We do not give the details of this categorical interpretation which follows a standard pattern which can be found elsewhere in this document. We prefer to give directly a "type theoretic" presentation of this interpretation and take for granted that it coincides with this denotational semantics.

A *semantic context* is an expression $\Phi = (x_1 : u^1 : A_1, \dots, x_k : u^k, A_k)$ where the x_i's are pairwise distinct variables, the A_i's are types and $u^i \in |!_{\mathsf{s}}[A_i]|$ for $i = 1, \dots, k$. We use $\underline{\Phi}$ for the "underlying typing context" $(x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k)$.

Given a typing context $\Gamma = (x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k)$ and $u^i \in |!_{\mathsf{s}}[A_i]|$ for $i = 1, \dots, k$ and $a \in |A|$, we write

$$x_1 : u^1 : A_1, \dots, x_k : u^k : A_k \vdash M : a : A$$

instead of $(u^1, \dots, u^k, a) \in [M]_\Gamma$.

More precisely, we admit the following result (whose proof is a simple but boring verification).

Proposition 6.5.1 *One has $(u^1, \dots, u^k, a) \in [M]_\Gamma$ iff the judgment $x_1 : u^1 : A_1, \dots, x_k : u^k : A_k \vdash M : a : A$ is derivable in the following typing system.*

$$\frac{\exists a' \in u^0 \ a \leq_{[A]} a'}{\Phi, x : u^0 : A \vdash x : a : A} \qquad \frac{\Phi \vdash M : (\{a_1, \dots, a_n\}, b) : A \to B \qquad \Phi \vdash N : a_i : A \text{ for } i = 1, \dots, n}{\Phi \vdash (M)\, N : b : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : u^0 : A \vdash M : b : B}{\Phi \vdash \lambda x^A\, M : (u^0, b) : A \to B}$$

$$\frac{\Phi, x : \{a_1, \dots, a_n\} : A \vdash M : a : A \qquad \Phi \vdash \mathsf{fix}\, x^A \cdot M : a_i : A \text{ for } i = 1, \dots, n}{\Phi \vdash \mathsf{fix}\, x^A \cdot M : a : A}$$

$$\frac{}{\Phi \vdash \underline{0} : \zeta : \iota} \qquad \frac{\Phi \vdash M : a_i : \iota \text{ for } i = 1, \dots, n}{\Phi \vdash \underline{\mathsf{succ}}(M) : \overline{\mathsf{suc}}\, \{a_1, \dots, a_n\} : \iota}$$

$$\frac{\Phi \vdash M : \zeta : \iota \qquad \Phi \vdash P : a : A \qquad \underline{\Phi}, z : \iota \vdash Q : A}{\Phi \vdash \mathsf{if}(M, P, z \cdot Q) : a : A}$$

$$\frac{\Phi \vdash M : \overline{\mathsf{suc}}\, u^0 : \iota \qquad \underline{\Phi} \vdash P : A \qquad \Phi, z : u^0 : \iota \vdash Q : a : A}{\Phi \vdash \mathsf{if}(M, P, z \cdot Q) : a : A}$$

As a consequence of Proposition 6.5.1, this typing system enjoys the following properties.

Proposition 6.5.2 *Assume that $\Phi \vdash M : a : A$ where $\Phi = (x_1 : u^1 : A_1, \dots, x_k : u^k : A_k)$.*

- *If $\underline{\Phi} \vdash M' : A$ and $M' \sim_\beta M$ then $\Phi \vdash M' : a : A$.*
- *If $v^i \in |!_{\mathsf{s}}[A_i]|$ satisfy $u^i \leq_{!_{\mathsf{s}}[A_i]} v^i$ for $i = 1, \dots, k$, and if $b \in |[A]|$ satisfy $b \leq_{[A]} a$, then we have $x_1 : v^1 : A_1, \dots, x_k : v^k : A_k \vdash M : b : A$.*

Therefore, if $\vdash M : \iota$ (so M is a closed term) satisfy $M \sim_\beta \underline{0}$, we have $\vdash M : \zeta : \iota$. We want to prove something which is stronger than the converse property, namely : if $\vdash M : \zeta : \iota$ then $M \;{\beta_{\mathsf{wh}}}^* \;\underline{0}$.

For this purpose we introduce an auxiliary notion. Given any type A and any $a \in |[A]|$, we define a set $|a|^A$ of closed terms M such that $\vdash M : A$. And if $u^0 \in |![A]|$, we define a set $|u^0|_!^A$ of closed terms M such that $\vdash M : A$. The definition is by induction on $\mathsf{ht}_A(a)$:

- $|\zeta|^\iota = \{M \mid \vdash M : \iota \text{ and } M \;{\beta_{\mathsf{wh}}}^*\; \underline{0}\}$
- $|\overline{\mathsf{suc}}\, u^0|^\iota = \{M \mid \vdash M : \iota \text{ and } \exists N \in |u^0|_!^\iota \; M \;{\beta_{\mathsf{wh}}}^*\; \underline{\mathsf{succ}}(N)\}$.
- $|(u^0, b))|^{A \to B} = \{M \mid \vdash M : A \to B \text{ and } \forall N \in |u^0|_!^A \; (M)\, N \in |b|^B\}$.
- If $u^0 \in |!_{\mathsf{s}}[A]|$ then $|u^0|_!^A = \{M \mid \vdash M : A \text{ and } \forall a \in u^0 \; M \in |a|^A\}$.

Observe that $|\emptyset|_!^A$ is the set of all closed terms M such that $\vdash M : A$. So for instance $|\overline{\mathsf{suc}}\,\emptyset|^\iota$ is the set of all closed terms M such that $\vdash M : \iota$ and $M \;{\beta_{\mathsf{wh}}}^*\; \underline{\mathsf{succ}}(N)$ for some term N (with $\vdash N : \iota$). Typically $\underline{\mathsf{succ}}(\Omega^\iota) \in |\overline{\mathsf{suc}}\,\emptyset|^\iota$ where $\Omega^\iota = \mathsf{fix}\, x^\iota \cdot x$ is an everlooping term of type ι.

Lemme 6.5.3 *Let M and M' be closed terms such that $\vdash M : A$ for some type A and $M \;{\beta_{\mathsf{wh}}}^*\; M'$. Let $a \in |[A]|$ and $u^0 \in |!_{\mathsf{s}}[A]|$. If $M' \in |a|^A$ then $M \in |a|^A$ and if $M' \in |u^0|_!^A$ then $M \in |u^0|_!^A$.*

Démonstration. The proof is by induction on the height of a and u^0. We use the notations of the statement of the lemma.

Assume first that $A = \iota$ and $a = \zeta$. If $M' \in |\zeta|^\iota$, then we know that $M' \;{\beta_{\mathsf{wh}}}^*\; \underline{0}$, and hence $M \;{\beta_{\mathsf{wh}}}^*\; \underline{0}$ since $M \;{\beta_{\mathsf{wh}}}^*\; M'$.

Assume now that $A = \iota$ and $a = \overline{\mathsf{suc}}\, u^0$. If $M' \in |a|^\iota$, then we know that $M' \;{\beta_{\mathsf{wh}}}^*\; \underline{\mathsf{succ}}(N)$ for some $N \in |u^0|_!^\iota$, and hence $M \;{\beta_{\mathsf{wh}}}^*\; \underline{\mathsf{succ}}(N)$ since $M \;{\beta_{\mathsf{wh}}}^*\; M'$ so that $M \in |a|^\iota$.

Assume next that $A = (B \to C)$ and $a = (v^0, c) \in |A|$ and that $M' \in |a|^A$. We must prove that $M \in |a|^A$ so let $N \in |v^0|_!^B$, we have to prove that $(M)\, N \in |c|^C$. But we know that $(M')\, N \in |c|^C$ and since $M \;{\beta_{\mathsf{wh}}}^*\; M'$, we have $(M)\, N \;{\beta_{\mathsf{wh}}}^*\; (M')\, N$ by definition of β_{wh}. Therefore we have $(M)\, N \in |c|^C$ by the inductive hypothesis applied to c. ☐

Lemme 6.5.4 *Let $a, a' \in |[A]|$ with $a \leq_{[A]} a'$. Then $|a'|^A \subseteq |a|^A$. Let $u^0, u^1 \in |!_{\mathsf{s}}[A]|$ with $u^0 \leq_{!_{\mathsf{s}}[A]} u^1$. Then $|u^1|_!^A \subseteq |u^0|_!^A$.*

Démonstration. We use the notation of the statement of the lemma. The proof is by induction on $\mathsf{ht}_A(a) + \mathsf{ht}_A(a')$ (and $\mathsf{ht}_A(u^0) + \mathsf{ht}_A(u^1)$).

Assume first that $A = \iota$. The following cases can arise :

— $a = a' = \zeta$: there is nothing to prove.

— $a = \overline{\mathsf{suc}}\, u^0$ and $a' = \overline{\mathsf{suc}}\, u^1$ with $u^0 \leq_{!\mathsf{L}} u^1$. Let $M \in |a'|^\iota$, we must prove that $M \in |a|^\iota$. There exists N such that $\vdash N : \iota$, $N \in |u^1|^\iota_!$ and $M\ \beta_{\mathsf{wh}}{}^*\ \underline{\mathsf{succ}}(N)$. For each $b \in u^0$ there is an element $m(b) \in u^1$ such that $b \leq_{\mathsf{L}} m(b)$ so that, by inductive hpothesis, $|b|^\iota \supseteq |m(b)|^\iota$. It follows that $|u^0|^\iota_! \supseteq \bigcap_{b \in u^0} |m(b)|^\iota \supseteq |u^1|^\iota_!$. Therefore $N \in |u^0|^\iota_!$ and hence $M \in |a|^\iota$ as expected.

Assume now that $A = (B \to C)$. Then we have $a = (v^0, c)$ and $a' = (v^1, c')$ with $c \leq_{[C]} c'$ and $v^1 \leq_{!_{\mathsf{s}}[B]} v^0$. Let $M \in |a'|^A$ and let us prove that $M \in |a|^A$. So let $N \in |v^0|^B_!$, we must prove that $(M)\, N \in |c|^C$. By inductive hypothesis we have $N \in |v^1|^B_!$ and hence $(M)\, N \in |c'|^C$ by the assumption that $M \in |a'|^A$ and it follows that $(M)\, N \in |c|^C$ by inductive hypothesis again, applied to c and c'. □

Now we can prove the main property of this interpretation of the points of the model as sets of terms.

Proposition 6.5.5 (Interpretation Lemma) *Assume that* $\Phi \vdash M : b : B$ *where* $\Phi = (x_1 : u^1 : A_1, \dots, x_k : u^k : A_k)$ *is a semantic typing context. Then, for any terms* $N_1 \in |u^1|^{A_1}_!, \dots, N_k \in |u^k|^{A_k}_!$*, one has*

$$M\,[N_1/x_1, \dots N_k/x_k] \in |b|^B\,.$$

Démonstration. The proof is by induction on the height of the derivation of the judgment $\Phi \vdash M : b : B$ in our semantic typing sytem.

It is essential to notice that the statement that we prove by induction is the following universally quantified statement : for any terms $N_1 \in |u^1|^{A_1}_!, \dots, N_k \in |u^k|^{A_k}_!$, one has $M\,[N_1/x_1, \dots N_k/x_k] \in |b|^B$. This universal quantification will be used in a crucial way in the inductive hypothesis.

In the sequel, we set $P' = P\,[N_1/x_1, \dots N_k/x_k]$ for any term P such that $\underline{\Phi} \vdash P : C$ for a type C, so that we have $\vdash P' : C$.

The first two cases are the axioms of our deduction system, corresponding to the cases where M is a variable or the constant $\underline{0}$.

Assume that $M = x_i$ for some $i \in \{1, \dots, k\}$, so that $B = A_i$ and that there is $a \in u^i$ such that $b \leq_{[A_i]} a$. Then $M' = N_i$ (using the notational convention above) so that $M' \in |u^i|^{A_i}_! = \bigcap_{a' \in u^0} |[a']|^{A_i} \subseteq |[a]|^{A_i}$. By Lemma 6.5.5 (it is the only place of the proof where this lemma is used, but it is crucial) we have $|[a]|^{A_i} \subseteq |[b]|^{A_i}$ and hence $M' \in |[b]|^B$ as expected.

Assume that $M = \underline{0}$, so that $B = \iota$ and $b = \zeta$. Then $M' = \underline{0}$ so that $M'\ \beta_{\mathsf{wh}}{}^*\ \underline{0}$ (in 0 reduction steps actually) and hence $M' \in |\zeta|^\iota$ as required.

Assume that $M = \underline{\mathsf{succ}}(P)$, so that $B = \iota$ and there are $b_1, \dots, b_n \in |[\iota]|$ such that $b = \overline{\mathsf{suc}}\,\{b_1, \dots, b_n\}$ with $\Phi \vdash P : b_j : \iota$ for $j = 1, \dots, n$. By inductive hypothesis we have $P' \in |b_j|^\iota$ for $j = 1, \dots, n$, that is $P' \in |\{b_1, \dots, b_n\}|^\iota_!$. We have $M'\ \beta_{\mathsf{wh}}{}^*\ \underline{\mathsf{succ}}(P')$ (in 0 steps actually) and hence $M' \in |b|^\iota$ as expected, by definition of $|b|^\iota$ in that case.

Assume that $M = (P)\, Q$ and that, for some type C and some $w^0 = \{c_1, \dots, c_n\} \in !_{\mathsf{s}}|[C]|$ we have $\Phi \vdash P : (w^0, b) : C \to B$ and $\Phi \vdash Q : c^j : C$ for $j = 1, \dots, n$. By inductive hypothesis we have $P' \in |(w^0, b)|^{C \to B}$ and $Q' \in |w^0|^C_! = \bigcap_{j=1}^n |c_j|^C$. By definition of $|(w^0, b)|^{C \to B}$ we have $M' = (P')\, Q' \in |b|^B$.

Assume that $B = (A \to C)$, $M = \lambda x^A\, P$ and $b = (u^0, c)$ with $\Phi, x : u^0 : A \vdash P : c : C$. We must prove that $\lambda x^A\, P' \in |(u^0, c)|^{A \to C}$. So let $N \in |u^0|^A_!$, we must prove that $\left(\lambda x^A\, P'\right) N \in |c|^C$. By Lemma 6.5.4 and by the definition of β_{wh}, it suffices to prove that $P'\,[N/x] \in |c|^C$ which in turn results from the inductive hypothesis applied to the derivation of $\Phi, x : u^0, A \vdash P : c : C$, with substituted terms $N_1, \dots, N_k, N$ (since $P'\,[N/x] = P\,[N_1/x_1, \dots, N_k/x_k, N/x]$). Here we have used in a crucial way the fact that the inductive hypothesis is universally quantified.

Assume that $M = \mathsf{fix}\, x^B \cdot P$ so that, for some $v^0 = \{b_1, \dots, b_n\}$, we have $\Phi, x : v^0 : B \vdash P : b : B$ and $\Phi \vdash M : b_j : B$ for $j = 1, \dots, n$. We must prove that $M' = \mathsf{fix}\, x^B \cdot P' \in |b|^B$. Since $M'\ \beta_{\mathsf{wh}}{}^*\ P'\,[M'/x]$, it suffices to prove that $P'\,[M'/x] \in |b|^B$ (by Lemma 6.5.4). By inductive hypothesis we know that $M' \in |b_j|^B$ for $j = 1, \dots, n$, that is $M' \in |v^0|^B_!$. Therefore, by inductive hypothesis again (applied now to the semantic typing derivation of $\Phi, x : v^0 : B \vdash P : b : B$), we have $P\,[N_1/x_1, \dots, N_k/x_k, M'/x] \in |b|^B$, that is $P'\,[M'/x] \in |b|^B$

as expected. Again we have used in a crucial way the fact that the inductive hypothesis is universally quantified.

Last assume that $M = \mathsf{if}(P, Q, z \cdot R)$ and that we have a derivation of the semantic typing judgment $\Phi \vdash M : b : B$ in our semantic typing system. There are two possibilities as to the last deduction rule of this typing derivation.

In the first case, we know that we have a derivation of the judgments $\Phi \vdash P : \zeta : \iota$, $\Phi \vdash Q : b : B$ and $\underline{\Phi}, z : \iota \vdash R : B$. By inductive hypothesis we have $P' \in |\zeta|^\iota$, which means that $P' \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{0}$ and hence $M' = \mathsf{if}(P', Q', z \cdot R') \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \mathsf{if}(\underline{0}, Q', z \cdot R') \ \beta_{\mathsf{wh}} \ Q'$. By inductive hypothesis we have $Q' \in |b|^B$, and hence by Lemma 6.5.4 we have $M' \in |b|^B$.

In the second case we have derivations of the judgments $\Phi \vdash P : \overline{\mathsf{suc}}\, u^0 : \iota$, $\underline{\Phi} \vdash Q : B$ and $\Phi, z : u^0 : \iota \vdash R : b : B$. Then we know by inductive hypothesis that there is a term $N \in |u^0|^\iota_!$ such that $P' \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{\mathsf{succ}}(N)$. Therefore $M' \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \mathsf{if}(P', Q', z \cdot R') \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \mathsf{if}(\underline{\mathsf{succ}}(N), Q', z \cdot R') \ \beta_{\mathsf{wh}} \ R' \, [N/z]$. By inductive hypothesis applied to the typing derivation of R (using the fact that $N \in |u^0|^\iota_!$), we get $R' \, [N/z] \in |b|^B$. Therefore, by Lemma 6.5.4 we have $M' \in |b|^B$. Here agin we have used crucially the universal quantification in our inductive hypothesis.

This ends the proof of the proposition. □

6.5.1 Adequacy and observational equivalence for LPCF, definition of full abstraction.

Théorème 6.5.6 (Adequacy) *Let M be a term such that $\vdash M : \iota$. If $\zeta \in [M]$, that is $\vdash M : \zeta : \iota$ is derivable, then $M \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{0}$.*

Démonstration. By Proposition 6.5.5, if $\vdash M : \zeta : \iota$ is derivable we have $M \in |\zeta|^\iota$, which means exactly that $M \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{0}$. □

From this we can deduce a purely syntact result, sometimes called “standardisation”.

Théorème 6.5.7 (Completeness of β_{wh}) *Assume that $\vdash M : \iota$ and $M \sim_\beta \underline{0}$. Then $M \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{0}$.*

Démonstration. Since $M \sim_\beta \underline{0}$ we have $[M] = [\underline{0}] = \{\zeta\}$ by Proposition 6.5.2, and hence $\vdash M : \zeta : \iota$. Therefore $M \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{0}$ by Theorem 6.5.6. □

This means that the reduction strategy β_{wh} is sufficiently powerful for checking that a closed term of type ι is equal to $\underline{0}$.

However, notice that if $M \sim_\beta \underline{\mathsf{succ}}(\underline{0})$, it is not true that $M \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{\mathsf{succ}}(\underline{0})$. What is true in that case is that $M \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{\mathsf{succ}}(N)$ for some term N such that $N \sim_\beta \underline{0}$, and hence $N \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{0}$.

Let now M_1 and M_2 be two terms such that $\vdash M_i : A$ for $i = 1, 2$. We say that M_1 and M_2 are *observationally equivalent* and write $M_1 \simeq_{\mathrm{obs}} M_2$ if, for any term P such that $\vdash P : A \to \iota$, we have $(P)\, M_1 \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{0} \Leftrightarrow (P)\, M_2 \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{0}$.

Exercice 6.5.1 Given M_1 and M_2 two terms such that $\vdash M_i : A$ for $i = 1, 2$, prove that $M_1 \sim_\beta M_2 \Rightarrow M_1 \simeq_{\mathrm{obs}} M_2$.

Exercice 6.5.2 Let us say that a term M such that $\vdash M : \iota$ converges, and write $M{\downarrow_{\mathsf{wh}}}$, if $M \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{0}$ or $M \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{\mathsf{succ}}(N)$ for some term N. Given M_1 and M_2 two terms such that $\vdash M_i : A$ for $i = 1, 2$, prove that $M_1 \simeq_{\mathrm{obs}} M_2$ iff for any term P such that $\vdash P : A \to \iota$, we have $(P)\, M_1{\downarrow_{\mathsf{wh}}} \Leftrightarrow (P)\, M_2{\downarrow_{\mathsf{wh}}}$.

Théorème 6.5.8 *Let M_1 and M_2 be two terms such that $\vdash M_i : A$ for $i = 1, 2$. If $[M_1] = [M_2]$ then $M_1 \simeq_{\mathrm{obs}} M_2$.*

Démonstration. Let P be a term such that $\vdash P : A \to \iota$ and assume that $(P)\, M_1 \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{0}$. Then we have $\zeta \in [(P)\, M_1]$ by Lemma 6.5.2 and hence $\zeta \in [(P)\, M_2]$ by our assumption that $[M_1] = [M_2]$ which implies that $[(P)\, M_1] = [(P)\, M_2]$ [3]. Therefore by Theorem 6.5.6 we have $(P)\, M_2 \ \beta_{\mathsf{wh}}{}^* \ \underline{0}$. □

3. Actually, one crucial property of denotational semantics is that it is modular in the sense that the semantics of a term can be computed when one knows the semantics of its immediate subterms.

So the model provides a way for proving that two terms are observationally equivalent : it suffices to prove that they have the same interpretation in the model. This is usually easier than proving directly that they are observationally equivalent, this condition involving a painful universal quantification on the term P. This method is however not complete (there are terms which are observationally equivalent but have not the same semantics).

One says that a model is *fully abstract* if observational equivalence implies equality in the model, that is, if this semantical method for proving observational equivalence is complete.

6.5.2 Une autre présentation de la même exponentielle. On préfère utiliser une autre façon de décrire le même foncteur exponentiel. On pose $|!_{\mathsf{sm}}S| = \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|S|)$ muni du préordre suivant : $m \leq m'$ si, pour tout $a \in \mathsf{supp}(m)$ il existe $a' \in \mathsf{supp}(m')$ tel que $a \leq_S a'$. On rappelle que $\mathsf{supp}(m) = \{a \in |S| \mid m(a) \neq 0\}$. Si $s \in \mathbf{PoLR}(S,T)$, on pose

$$!_{\mathsf{sm}}s = \{(m,p) \in |!S| \times |!T| \mid \forall b \in \mathsf{supp}(p)\ \exists a \in \mathsf{supp}(m) \quad (a,b) \in s\}\,.$$

On vérifie facilement qu'il s'agit d'un foncteur $\mathbf{PoLR} \to \mathbf{PoLR}$. De plus, si $x \in \mathcal{I}(S)$ on pose $x^{!_{\mathsf{sm}}} = \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(x)$ et on voit facilement que $!_{\mathsf{sm}}s\, x^{!_{\mathsf{sm}}} = (s\, x)^{!_{\mathsf{sm}}}$.

On définit $\mathsf{e}_S \subseteq |!_{\mathsf{sm}}S| \times |!_{\mathsf{s}}S|$ par

$$\mathsf{e}_S = \{(m,u) \in |!_{\mathsf{sm}}S| \times |!_{\mathsf{s}}S| \mid u \leq_{!_{\mathsf{s}}S} \mathsf{supp}(m)\}.$$

Par définition, il est clair que $\mathsf{e} \in \mathbf{PoLR}(!_{\mathsf{sm}}S, !_{\mathsf{s}}S)$.

Proposition 6.5.9 e *est un isomorphisme naturel du foncteur* $!_{\mathsf{sm}}\_$ *vers le foncteur* $!_{\mathsf{s}}\_$*.*

Démonstration. On prouve d'abord la naturalité. Soit $s \in \mathbf{PoLR}(S,T)$, on doit montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
!_{\mathsf{sm}}S \arrow[r, "\mathsf{e}_S"] \arrow[d, "!_{\mathsf{sm}}s"'] & !_{\mathsf{s}}S \arrow[d, "!_{\mathsf{s}}s"] \\
!T \arrow[r, "\mathsf{e}_T"] & !_{\mathsf{s}}T
\end{tikzcd}$$

Soient $m \in |!_{\mathsf{sm}}S|$ et $v \in |!_{\mathsf{s}}T|$. Supposons d'abord que $(m,v) \in\ !_{\mathsf{s}}s\, \mathsf{e}_S$ et montrons que $(m,v) \in \mathsf{e}_T\, !_{\mathsf{sm}}s$. Il existe $u \in |!_{\mathsf{s}}S|$ tel que $u \leq_{!_{\mathsf{s}}S} \mathsf{supp}(m)$ et $(u,v) \in\ !_{\mathsf{s}}s$. Soit $p \in |!_{\mathsf{sm}}T|$ quelconque tel que $\mathsf{supp}(p) = v$. On a $(m,p) \in\ !_{\mathsf{sm}}s$ et $(p,v) \in \mathsf{e}_T$, donc $(m,v) \in \mathsf{e}_T\, !_{\mathsf{sm}}s$. Supposons réciproquement que $(m,v) \in \mathsf{e}_T\, !_{\mathsf{sm}}s$. Soit p tel que $(m,p) \in\ !_{\mathsf{sm}}s$ et $(p,v) \in \mathsf{e}_T$, c'est-à-dire $v \leq_{!_{\mathsf{s}}T} \mathsf{supp}(p)$. Soit $u = \mathsf{supp}(m)$, on a $(m,u) \in \mathsf{e}_S$ et $(u,v) \in\ !_{\mathsf{s}}s$ et donc $(m,v) \in\ !_{\mathsf{s}}s\, \mathsf{e}_S$.

Reste à voir que e_S est un isomorphisme. Soit

$$\mathsf{e}'_S = \{(u,m) \in |!_{\mathsf{s}}S| \times |!_{\mathsf{sm}}S| \mid \mathsf{supp}(m) \leq_{!_{\mathsf{s}}S} u\} \in \mathbf{PoLR}(!_{\mathsf{s}}S, !_{\mathsf{sm}}S)\,.$$

On vérifie facilement que e'_S est l'inverse de e_S dans $\mathbf{PoLR}$. □

C'est un très bon exemple d'isomorphisme entre préordres qui ne vient pas d'un isomorphisme fort. A cause de l'existence de cet isomorphisme, on considère à partir de maintenant la version multiensembliste du foncteur ($!_{\mathsf{sm}}\_$) plutôt que sa version ensembliste. On peut toujours revenir à la version ensembliste en remplaçant partout les opérations multiensemblistes par les opérations ensemblistes correspondantes. Comme ces deux foncteurs sont essentiellement les mêmes, on utilisera désormais la seule notations $!_{\mathsf{s}}\_$ pour la version multiensembliste (ainsi que $x^{!_{\mathsf{s}}}$ pour $\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(x)$ quand $x \in \mathcal{I}(S)$).

6.6 Sémantique relationnelle

Un préordre $S = (|S|, \leq_S)$ est *discret* si $a \leq_S a' \Leftrightarrow a = a'$. Un préodre discret est donc juste un ensemble. La sous-catégorie de $\mathbf{PoLR}$ dont les objets sont les préordres discrets coïncide avec la catégorie $\mathbf{Rel}$ des ensembles et des relations. Les opérations multiplicatives et additives préservent le caractère discret des préordres, autrement dit, ce sont des opérations (très simples) sur les ensembles. On les explicite ici.

L'identité et la composition sont définis de façon relationnelle.

$$\mathsf{Id}_X = \{(a,a) \mid a \in X\}$$

et, si $s \in \mathbf{Rel}(X,Y)$ et $t \in \mathbf{Rel}(Y,Z)$, alors

$$t\,s = \{(a,c) \in X \times Z \mid \exists b \in Y (a,b) \in s \text{ et } (b,c) \in t\}\,.$$

Si on voit s et t comme des matrices (d'incidence) à coefficients dans $\{0,1\}$ (avec $1+1 = 1 \times 1 = 1$), cette composition peut être vue comme un simple produit de matrices, généralement infinies.

6.6.1 Structure monoïdale. Le produit tensoriel de deux ensembles X et Y dans **Rel** est leur produit cartésien au sens ensembliste habituel : $X \otimes Y = X \times Y$. Le produit tensoriel des morphismes est défini comme dans la catégorie **PoLR**. Si $s_i \in \mathbf{Rel}(X_i, Y_i)$ pour $i = 1,2$, alors $s_1 \otimes s_2 \in \mathbf{Rel}(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2)$ est donné par

$$s_1 \otimes s_2 = \{((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \mid (a_i,b_i) \in s_i \text{ pour } i = 1,2\}\,.$$

On voit facilement que c'est une opération fonctorielle, et que les isomorphismes d'associativité et de symétrie (et d'élémément neutre) du produit cartésien sont des isomorphismes dans la catégorie **Rel** qui satisfont les axiomes de catégorie monoïdale symétrique. L'objet neutre du produit tensoriel est bien sûr le singleton $1 = \{*\}$.

Exercice 6.6.1 Montrer que les isomorphismes dans **Rel** sont les bijections.

On définit également $X \multimap Y = X \times Y$, et alors il est facile de voir que $(X \multimap Y, \mathsf{ev})$ est l'objet des morphismes de X vers Y, l'évaluation linéaire $\mathsf{ev} \in \mathbf{Rel}((X \multimap Y) \otimes X, Y)$ étant donnée par

$$\mathsf{ev} = \{(((a,b),a),b) \mid (a,b) \in X \times Y\}\,.$$

On vérifie facilement que **Rel**, muni de ce produit tensoriel est symétrique monoïdale fermée. C'est une catégorie *-autonome : on prend $\perp = 1$ comme objet dualisant. On vérifie que $\eta_X \in \mathbf{Rel}(X, (X \multimap \perp) \multimap \perp)$ est donné par $\eta_X = \{(a,((a,*),*)) \mid a \in X\}$ et est donc un isomorphisme dans **Rel**. Noter que X et $X^\perp = X \multimap \perp$ sont isomorphes, ce qui est très spécifique à l'absence de structure des objets du modèle. On identifie $X^\perp$ et X.

Si $s \in \mathbf{Rel}(X,Y)$, le morphisme *transposé* $s^\perp \in \mathbf{Rel}(Y^\perp, X^\perp) = \mathcal{P}(Y \times X)$ est

$$s^\perp = \{(b,a) \in Y \times X \mid (a,b) \in s\}\,.$$

6.6.2 Produits et coproduits. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. Soit $\&_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}(\{i\} \times X_i)$. Cet ensemble est le produit des X_i dans la catégorie **Rel**, avec les projections

$$\mathsf{pr}_i = \{((i,a),a) \mid a \in X_i\} \in \mathbf{Rel}\left(\mathop{\&}_{j\in I} X_j, X_i\right)$$

Si $s_i \in \mathbf{Rel}(Y, X_i)$ est une famille de morphismes dans **Rel**, le morphisme $\langle s_i\rangle_{i\in I} \in \mathbf{Rel}\left(Y, \&_{i\in I} X_i\right)$ est donné par

$$\langle s_i\rangle_{i\in I} = \{(b,(i,a)) \mid i \in I \text{ et } (b,a) \in s_i\}\,.$$

Puisque la négation linéaire $X \mapsto X^\perp$ est l'identité sur les objets, $\&_{i\in I} X_i$ est aussi le coproduit des X_i dans la catégorie **Rel**.

Exercice 6.6.2 Vérifier que la propriété universelle du produit cartésien est bien satisfaite. Autrment dit, $\langle s_i\rangle_{i\in I}$ est l'unique élément t de $\mathbf{Rel}\left(Y, \&_{i\in I} X_i\right)$ tel que $\mathsf{pr}_i\, t = s_i$ pour tout $i \in I$.

Expliquer pourquoi le produit de X et Y n'est pas $X \times Y$ (avec les projections habituelles).

6.6.3 Exponentielles. Soit X un ensemble. On pose $!X = \mathcal{M}_{\text{fin}}(X)$, l'ensemble des *multi-ensembles* finis d'éléments de X. Un élément de $\mathcal{M}_{\text{fin}}(X)$ est donc une fonction $m : X \to \mathbb{N}$ telle que $m(a) = 0$ pour tous les éléments de X sauf un nombre fini d'entre eux. On note 0 le multi-ensemble vide (tel que $0(a) = 0$ pour tout $a \in X$). On note $m+m'$ la somme des multi-ensembles m et m', définie par $(m+m')(a) = m(a)+m'(a)$. Enfin, $\mathsf{supp}(m)$ dénote l'ensemble des $a \in X$ tels que $m(a) \neq 0$, on appel cet ensemble le *support* de m, il est fini. On appelle *cardinal* de m le nombre d'éléments $\#m$ de m, en tenant compte des multiplicités. Autrement dit, $\#m = \sum_{a \in X} m(a) \in \mathbb{N}$.

Soit $x \subseteq X$. On note $x^!$ l'ensemble $\mathcal{M}_{\text{fin}}(x) \subseteq {!X}$; c'est le *promu* de x. Si $s \in \mathbf{Rel}(X, Y)$, on pose

$$!s = \{([a_1, \ldots, a_n], [b_1, \ldots, b_n]) \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } (a_i, b_i) \in s \text{ pour tout } i\}\,.$$

Autrement dit, un couple $(m, p) \in {!X} \times {!Y}$ appartient à $!s$ si les deux multi-ensembles m et p ont même cardinal n, et peuvent s'écrire $m = [a_1, \ldots, a_n]$ et $p = [b_1, \ldots, b_n]$ avec $(a_i, b_i) \in s$ pour tout i. *Attention :* on ne demande pas que $(a_i, b_j) \in s$ pour chaque couple d'indices (i, j).

Lemme 6.6.1 *L'opération $!\_$ est un foncteur. De plus, si $s \in \mathbf{Rel}(X, Y)$ et $x \subseteq X$, on a $!s\, x^! = (s\, x)^!$.*

Exercice 6.6.3 Rédiger la preuve.

La déréliction et le digging sont définis par

$$\begin{aligned}
\mathsf{der}_X &= \{([a], a) \mid a \in X\} \in \mathbf{Rel}(!X, X) \\
\mathsf{dig}_X &= \{(m_1 + \cdots + m_n, [m_1, \ldots, m_n]) \mid m_1, \ldots, m_n \in {!X}\} \in \mathbf{Rel}(!X, !!X)\,.
\end{aligned}$$

Lemme 6.6.2 *Ces deux morphismes sont des transformations naturelles, et font de $!\_$ une comonade. On rappelle que ça signifie que les trois équations suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{aligned}
\mathit{der}_{!X}\ \mathit{dig}_X &= \mathit{Id}_{!X} \\
!\mathit{der}_X\ \mathit{dig}_X &= \mathit{Id}_{!X} \\
\mathit{dig}_{!X}\ \mathit{dig}_X &= !\mathit{dig}_X\ \mathit{dig}_X\,.
\end{aligned}$$

Exercice 6.6.4 Prouver ces deux lemmes.

Soient X et Y deux ensembles. La fonction

$$\begin{aligned}
!X \otimes !Y &\to !(X \mathbin{\&} Y) \\
([a_1, \ldots, a_p], [b_1, \ldots, b_q]) &\mapsto [(1, a_1), \ldots, (1, a_p), (2, b_1), \ldots, (2, b_q)]
\end{aligned}$$

définit une bijection, et donc un isomorphisme $\mathsf{m}^2_{X,Y} \in \mathbf{Rel}(!X \otimes !Y, !(X \mathbin{\&} Y))$. On a également un isomorphisme (trivial) $\mathsf{m}^0 \in \mathbf{Rel}(1, !\top)$ donné par $\mathsf{m}^0 = \{(*, [])\}$. Ces deux isomorphismes vérifient les conditions des isomorphismes de Seely énoncées en section 4.5.5.

Exercice 6.6.5 Vérifier que les diagrammes des isomorphismes de Seely sont bien satisfaits (voir section 4.5.5).

Exercice 6.6.6 Expliciter les morphismes μ^0, $\mu^2_{X,Y}$ et leur généralisation μ^n. Pour $s \in \mathbf{Rel}(!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n, Y)$, expliciter la valeur de $s^! \in \mathbf{Rel}(!X_1 \otimes \cdots \otimes !X_n, !Y)$. Voir les définitions en Section 4.5.6.

6.6.4 Catégorie de Kleisli. Elle est défine de façon générale en section 4.5.7, on la note $\mathbf{Rel}_!$. Un objet de $\mathbf{Rel}_!$ est un ensemble, et $\mathbf{Rel}_!(X,Y) = \mathbf{Rel}(!X,Y)$. Il n'est pas possible de voir les éléments de $\mathbf{Rel}_!(X,Y)$ comme des fonctions (du moins, pas directement). On rappelle que l'identité en X est $\mathsf{der}_X \in \mathbf{Rel}_!(X,X)$ et que la composition de $s \in \mathbf{Rel}_!(X,Y)$ et de $t \in \mathbf{Rel}_!(Y,Z)$ est

$$t \circ s = t\,!s\,\mathsf{dig}_X\,.$$

Exercice 6.6.7 Soient $m \in\, !X$ et $c \in Z$. Montrer que $(m,c) \in t \circ s$ si et seulement si on peut trouver $(m_1,b_1),\dots,(m_n,b_n) \in s$ tels que $m_1 + \cdots + m_n = m$ et $([b_1,\dots,b_n],c) \in t$.

Exercice 6.6.8 Montrer que la fonction $\mathbf{Rel}_!(X,Y) \times \mathbf{Rel}_!(Y,Z) \to \mathbf{Rel}_!(X,Z)$ qui envoie (s,t) sur $t \circ s$ est croissante (par rapport à l'inclusion) et Scott-continue. On rappelle ce que cela signifie :

- *Monotonicité :* si $s, s' \in \mathbf{Rel}_!(X,Y)$ vérifient $s \subseteq s'$ et $t, t' \in \mathbf{Rel}_!(Y,Z)$ vérifient $t \subseteq t'$, alors on a $t \circ s \subseteq t' \circ s'$.
- *Continuité :* si $D \subseteq \mathbf{Rel}_!(X,Y)$ et $E \subseteq \mathbf{Rel}_!(Y,Z)$ sont filtrants pour l'inclusion (D filtrant signifie : $D \neq \emptyset$ et $\forall s_1, s_2 \in D\, \exists s \in D\ s_1 \subseteq s$ et $s_2 \subseteq s$) alors on a $(\cup E) \circ (\cup D) \subseteq \cup(D \circ E)$ où $D \circ E = \{t \circ s \mid s \in D$ et $t \in E\}$. L'autre inclusion $(\cup E) \circ (\cup D) \supseteq \cup(D \circ E)$ est conséquence de la monotonicité.

On a vu en 4.5.7, que $\mathbf{Rel}_!$ est cartésienne fermée. Le produit cartésien d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'ensembles est $X = \&_{i\in I} X_i$, avec les projections

$$\mathsf{pr}_i\, \mathsf{der}_X \in \mathbf{Rel}_!(\mathop{\&}_{i\in I} X_i, X_i)\,.$$

L'objet des morphismes de X vers Y est $X \Rightarrow Y = \,!X \multimap Y$, avec comme morphisme d'évaluation $\mathsf{Ev} \in \mathbf{Rel}(!(X \Rightarrow Y) \otimes !X, Y)$ (identifiant $!((X \Rightarrow Y) \mathbin{\&} X)$ et $!(X \Rightarrow Y) \otimes !X$) est donné par

$$\mathsf{Ev} = \{(([(m,b)],m),b) \mid m \in\, !X \text{ et } b \in Y\}\,.$$

Si $s \in \mathbf{Rel}_!(Z \mathbin{\&} X, Y)$, c'est-à-dire, $s \in \mathbf{Rel}(!Z \otimes !X, Y)$, alors $\mathsf{Cur}(s) = \{(p,(m,b)) \mid ((p,m),b) \in s\} \in \mathbf{Rel}_!(Z, X \Rightarrow Y)$ vérifie les conditions de clôture cartésienne.

Exercice 6.6.9 Vérifier les 3 équations correspondantes.

6.6.5 Fixpoint operators. We define a morphism

$$\mathcal{Z} \in \mathcal{L}_!((X \Rightarrow X) \Rightarrow X, (X \Rightarrow X) \Rightarrow X)$$

using the cartesian closeness of $\mathbf{Rel}_!$ (the same definition makes sense in any cartesian closed category), setting $Y = (X \Rightarrow X) \Rightarrow X$. We set $\mathcal{Z} = \mathsf{Cur}\,\mathcal{Z}_0$ where $\mathcal{Z}_0 \in \mathbf{Rel}_!(Y \mathbin{\&} (X \Rightarrow X), X)$ is defined as the following composition of morphisms in $\mathbf{Rel}_!$, where $Y = (X \Rightarrow X) \Rightarrow X$:

$$\begin{tikzcd}
Y \mathbin{\&} (X \Rightarrow X) \arrow[r, "Y \mathbin{\&} \langle \mathsf{Id}, \mathsf{Id}\rangle"] & Y \mathbin{\&} (X \Rightarrow X) \mathbin{\&} (X \Rightarrow X) \arrow[r, "\mathsf{Ev} \mathbin{\&} \mathsf{Id}"] & X \mathbin{\&} (X \Rightarrow X) \arrow[d, "\langle \mathsf{pr}_2, \mathsf{pr}_1\rangle"] \\
& X & (X \Rightarrow X) \mathbin{\&} X \arrow[l, "\mathsf{Ev}"']
\end{tikzcd}$$

The morphism $\mathcal{Z}$ can also be defined as $\mathcal{Z} = \mathsf{cur}\,\mathcal{Z}_1$ where $\mathcal{Z}_1$ the following composition in $\mathcal{L}$.

$$\begin{tikzcd}
!Y \otimes !(!X \multimap X) \arrow[r, "!Y \otimes \mathsf{c}"] & !Y \otimes !(!X \multimap X) \otimes !(!X \multimap X) \arrow[d, "e_{!X \multimap X, X} \otimes \mathsf{der}"] \\
X \quad (!X \multimap X) \otimes !X \arrow[l, "\mathsf{ev}"'] & !X \otimes (!X \multimap X) \arrow[l, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

where, for any object Z, T, we set $e_{Z,T} = (\mathsf{ev}\,(\mathsf{der}_{!Z \multimap T} \otimes !T))^! : !(!Z \multimap T) \otimes !Z \to !T$

Exercice 6.6.10 Prove first that

$$e_{Z,T} = \{(([(m_1, d_1), \dots, (m_k, d_k)], m_1 + \dots + m_k), [d_1, \dots, d_k]) \mid k \in \mathbb{N}, \\ m_1, \dots, m_k \in !Z \text{ and } d_1, \dots, d_k \in T\}\,.$$

Using this result, prove that

$$\mathcal{Z}_1 = \{(([(m_1, a_1), \dots, (m_k, a_k)], m_1 + \dots + m_k + [([a_1, \dots, a_k], a)]), a) \mid \\ k \in \mathbb{N},\ a, a_1, \dots, a_k \in X \text{ and } m_1, \dots, m_k \in !(!X \multimap X)\}$$

We know that any $f \in \mathbf{Rel}(!Z, T)$ induces a function $\tilde{f} : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(T)$ defined by $\tilde{f}(w) = \{d \in T \mid \exists m \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(Z)\ (m, d) \in f\}$ and that this function is Scott continuous.

Exercice 6.6.11 Defining $\mathcal{Y} \in \mathcal{P}(!(!X \multimap X) \multimap X)$ as the least fixpoint of $\tilde{\mathcal{Z}}$, prove that $\mathcal{Y}$ is the least set such that

$$\mathcal{Y} = \{(m_1 + \dots + m_k + [([a_1, \dots, a_k], a))], a) \mid k \in \mathbb{N} \text{ and } \forall i\,(m_i, a_i) \in \mathcal{Y}\}$$

6.6.6 The Eilenberg-Moore Category. We recall that the general category of coalgebras is defined in Section 4.5.8. An object is a pair $P = (\underline{P}, \mathsf{h}_P)$ where $\mathsf{h}_P \in \mathbf{Rel}(\underline{P}, !\underline{P})$ satisfies two commutations.

Exercice 6.6.12 Prove that (X, h) is a coalgebra iff $h \in \mathbf{Rel}(X, !X)$ satisfies :

- $\forall a, b \in X\ (a, [b]) \in h \Leftrightarrow a = b$
- For all $a \in X$ and $m_1, \dots, m_k \in !X$, one has $(a, m_1 + \dots + m_k) \in h$ iff there are $a_1, \dots, a_k \in X$ such that $(a, [a_1, \dots, a_k]) \in h$ and $(a_i, m_i) \in h$ for all $i = 1, \dots, k$.

Exercice 6.6.13 Let P and Q be coalgebras. Prove that $f \in \mathbf{Rel}(\underline{P}, \underline{Q})$ belongs to $\mathbf{Rel}^!(P, Q)$ iff forall $a \in X$ and $b_1, \dots, b_k \in Y$, there is $b \in Y$ such that $(a, b) \in f$ and $(b, [b_1, \dots, b_k]) \in \mathsf{h}_Q$ iff there are $a_1, \dots, a_k \in X$ such that $(a, [a_1, \dots, a_k]) \in \mathsf{h}_Q$ and $(a_i, b_i) \in f$ for each $i = 1, \dots, k$.

Exercice 6.6.14 Let X be a set and P be a coalgebra. Let $f \in \mathbf{Rel}(\underline{P}, X)$. Prove that $f^! = \{(b, [a_1, \dots, a_k]) \mid \exists b_1, \dots, b_k\ (b, [b_1, \dots, b_k]) \in \mathsf{h}_P \text{ and } \forall i\,(a_i, b_i) \in f\}$.

Exercice 6.6.15 Prove that $\mathsf{h}_1 = \{(*, k[*]) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Given two coalgebras P and Q, prove that

$$\begin{aligned} \mathsf{h}_{P \otimes Q} &= \{((a, b), [(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)]) \mid (a, [a_1, \dots, a_k]) \in \mathsf{h}_P \\ &\qquad \text{and } (b, [b_1, \dots, b_k]) \in \mathsf{h}_Q\} \\ \mathsf{h}_{P \oplus Q} &= \{((1, a), [(1, a_1), \dots, (1, a_k)]) \mid (a, [a_1, \dots, a_k]) \in \mathsf{h}_P\} \\ &\qquad \cup \{((2, b), [(2, b_1), \dots, (2, b_k)]) \mid (b, [b_1, \dots, b_k]) \in \mathsf{h}_Q\} \end{aligned}$$

6.6.7 Emebdding and retractions. The cpoc of sets $\mathbf{Rel}_{\sqsubseteq}$ is simply the class of all sets, equiped with the order relation $\subseteq$. It has $\emptyset$ as least element and has lubs of all countable directed families : if $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ is such a family, its lub is its union $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ (actually, all unions exist, but only countable directed ones are used here).

Let X, Y be such that $X \subseteq Y$, then we set

$$\begin{aligned} \mathsf{i}^+_{X,Y} &= \{(a, a) \in X \times Y \mid a \in X\} \in \mathbf{Rel}(X, Y) \\ \mathsf{i}^-_{X,Y} &= \{(a, a) \in Y \times X \mid a \in X\} \in \mathbf{Rel}(Y, X) \end{aligned}$$

Exercice 6.6.16 Prove that all the conditions of Section 4.5.11 are satisfied by these definition.

As explained in Section 4.5.11, it is important to extend this notion of subobject to the category $\mathbf{Rel}^!$. Remember that we define $P \sqsubseteq Q$ as meaning that $\underline{P} \subseteq \underline{Q}$ and $\mathsf{i}^+_{\underline{P},\underline{Q}} \in \mathbf{Rel}^!(P, Q)$, that is, iff $\mathsf{h}_Q\,\mathsf{i}^+_{\underline{P},\underline{Q}} = !(\mathsf{i}^+_{\underline{P},\underline{Q}})\,\mathsf{h}_P$.

Exercice 6.6.17 Prove that $P \sqsubseteq Q$ holds iff, for all $a \in \underline{P}$ and $b_1, \dots, b_k \in \underline{Q}$ one has $(a, [b_1, \dots, b_k]) \in \mathsf{h}_Q$ iff $b_1, \dots, b_k \in \underline{P}$ and $(a, [b_1, \dots, b_k]) \in \mathsf{h}_P$.

Chapitre 7

Sémantique relationnelle de CBPV et de PCF

7.1 Semantics of CBPV in Rel

We have seen in Section 4.6 how to interpret the language CBPV of Chapter 3. We want here to describe this interpretation in the particular case where the model of LL under consideration is **Rel**.

There is nothing to say about types : each closed type σ is interpreted as a set $[\sigma]$, and if σ is a positive type φ, this set $[\varphi]$ is equipped with a coalgebra structure simply denoted as $\mathsf{h}_\varphi \in \mathbf{Rel}([\varphi], ![\varphi])$. We have seen above how the various connectives of LL are interpreted in **Rel**. All the point of the use of continuous functionals for interpreting types is to make this interpretation compatible with the equation on types induced by the recursive types construction.

For instance, if this equation tells us that a closed positive type φ satisfies $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ (where φ_1 and φ_2 are positive types) then we know the $[\varphi] = [\varphi_1] \times [\varphi_2]$ and that $((a_1, a_2), [(a_{1,1}, a_{2,1}), \dots, (a_{1,k}, a_{2,k})]) \in \mathsf{h}_\varphi$ iff $(a_i, [a_{i,1}, \dots, a_{i,k}]) \in \mathsf{h}_{\varphi_i}$ for $i = 1, 2$.

Here are some examples of types.

— $[\top] = \emptyset$

— $1 = !\top$ so $[1] = \{[]\}$ with $\mathsf{h}_1 = \{([], k[[]]) \mid k \in \mathbb{N}\}$ (remember that if m is a multiset and $k \in \mathbb{N}$ then $km = m + \cdots + m$ (k times)).

— The type of flat of natural numbers $\iota = 1 \oplus \iota$ (that is $\iota = \mathsf{Fix}\, \zeta \cdot (1 \oplus \zeta)$). Then $[\iota] = \{(1, [])\} \cup \{(2, a) \mid a \in [\iota]\}$, this set being defined as a least fixpoint. In other words, an element of $[\iota]$ is a sequence $(2, \dots, 2, 1, [])$ that we denote as $\overline{n}$ (where n is the number of 2's in this sequence). Then we have $\mathsf{h}_\iota = \{(\overline{n}, k[\overline{n}]) \mid k, n \in \mathbb{N}\}$.

— The type of streams of natural numbers $\rho = \iota \otimes !\rho$. Then $[\rho] = \{(\overline{n}, [a_1, \dots, a_k]) \mid n, k \in \mathbb{N}$ and $a_1, \dots, a_k \in [\rho]\}$, again it is a definition as lest fixpoint. And we have

$$\mathsf{h}_\rho = ((\overline{n}, m_1 + \cdots + m_k), [(\overline{n}, m_1), \dots, (\overline{n}, m_k)]) \mid n, k \in \mathbb{N} \\ \text{and } m_1, \dots, m_k \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}([\rho])\} \,.$$

To describe simply the interpretation of terms, we introduce a non-idempotent intersection typing system.

A semantic typing judgment is an expression $\Phi = (x_1 : a_1 : \varphi_1, \dots, x_k : a_k : \varphi_k)$ where the variables x_i are pairwise distinct, the φ_i's are positive types and $a_i \in [\varphi_i]$. Given such a semantic judgment Φ, we define its underlying typing judgment $\underline{\Phi} = (x_1 : \varphi_1, \dots, x_k : \varphi_k)$ and the tuple of points $\widehat{\Phi} = (a_1, \dots, a_k) \in [\underline{\Phi}]$.

A semantic judgment is then an expression of shape $\Phi \vdash M : a : \sigma$ where Φ is a semantic judgment, M is a term, σ is a type and $a \in [\sigma]$. We give now the rules of the semantic typing system.

Warning : in each of the following rules, it is assumed that all the semantic contexts which appear have the same underlying typing context. Given a typing context $\mathcal{P}$, we use $\mathsf{h}_\mathcal{P}$ for $\mathsf{h}_{[\mathcal{P}]^!}$.

$$\frac{(\widehat{\Phi},[])\in\mathsf{h}_{\underline{\Phi}}}{\Phi,x:a:\varphi\vdash x:a:\varphi}$$

$$\frac{\Phi_i\vdash M:a_i:\sigma \text{ for } i=1,\dots,k \qquad (\widehat{\Phi},[\widehat{\Phi_1},\dots,\widehat{\Phi_k}])\in\mathsf{h}_{\underline{\Phi}}}{\Phi\vdash M^!:[a_1,\dots,a_k]:!\sigma}$$

Remember that we assume that $\underline{\Phi}=\underline{\Phi_i}$ for each i.

$$\frac{\Phi_1\vdash M_1:a_1:\varphi_1 \qquad \Phi_2\vdash M_2:a_2:\varphi_2 \qquad (\widehat{\Phi},[\widehat{\Phi_1},\widehat{\Phi_2}])\in\mathsf{h}_{\underline{\Phi}}}{\Phi\vdash\langle M_1,M_2\rangle:(a_1,a_2):\varphi_1\otimes\varphi_2}$$

$$\frac{\Phi\vdash M:a:\varphi_i}{\Phi\vdash\mathsf{in}_iM:(i,a):\varphi_1\oplus\varphi_2} \qquad \frac{\Phi,x:a:\varphi\vdash M:b:\sigma}{\Phi\vdash\lambda x^{\varphi}\,M:(a,b):\varphi\multimap\sigma}$$

$$\frac{\Phi_1\vdash M:(a,b):\varphi\multimap\sigma \qquad \Phi_2\vdash N:a:\varphi \qquad (\widehat{\Phi},[\widehat{\Phi_1},\widehat{\Phi_2}])\in\mathsf{h}_{\underline{\Phi}}}{\Phi\vdash\langle M\rangle N:b:\sigma}$$

$$\frac{\Phi\vdash M:[a]:!\sigma}{\Phi\vdash\mathsf{der}(M):a:\sigma} \qquad \frac{\Phi\vdash M:(a_1,a_2):\varphi_1\otimes\varphi_2 \qquad (a_2,[])\in\mathsf{h}_{\varphi_2}}{\Phi\vdash\mathsf{pr}_1M:a_1:\varphi_1}$$

$$\frac{\Phi\vdash M:(a_1,a_2):\varphi_1\otimes\varphi_2 \qquad (a_1,[])\in\mathsf{h}_{\varphi_1}}{\Phi\vdash\mathsf{pr}_2M:a_2:\varphi_2}$$

$$\frac{\Phi_0\vdash M:(1,a_1):\varphi_1\oplus\varphi_2 \quad \Phi_1,x:a_1;\varphi_1\vdash N_1:b:\sigma \qquad \underline{\Phi},x_2:\varphi_2\vdash N_2:\varphi_2 \qquad (\widehat{\Phi},[\widehat{\Phi_0},\widehat{\Phi_1}])\in\mathsf{h}_{\underline{\Phi}}}{\Phi\vdash\mathsf{case}(M,x_1\cdot N_1,x_2\cdot N_2):b:\sigma}$$

$$\frac{\Phi_0\vdash M:(2,a_2):\varphi_1\oplus\varphi_2 \quad \Phi_2,x:a_2;\varphi_2\vdash N_2:b:\sigma \qquad \underline{\Phi},x_1:\varphi_1\vdash N_1:\varphi_1 \qquad (\widehat{\Phi},[\widehat{\Phi_0},\widehat{\Phi_2}])\in\mathsf{h}_{\underline{\Phi}}}{\Phi\vdash\mathsf{case}(M,x_1\cdot N_1,x_2\cdot N_2):b:\sigma}$$

$$\frac{\Phi_0,x:[a_1,\dots,a_k]:!\sigma\vdash M:a:\sigma \qquad \forall i\ \Phi_i\vdash\mathsf{fix}\,x^{!\sigma}\,M:a_i:\sigma \qquad (\widehat{\Phi},[\widehat{\Phi_0},\dots,\widehat{\Phi_k}])\in\mathsf{h}_{\underline{\Phi}}}{\Phi\vdash\mathsf{fix}\,x^{!\sigma}\,M:a:\sigma}$$

This typing system is motivated by the following result.

Théorème 7.1.1 *Assume that $\mathcal{P}\vdash M:\sigma$. Let $\vec{a}\in[\mathcal{P}]$ and $b\in[\sigma]$. Let Φ be the semantic context characterized by $\underline{\Phi}=\mathcal{P}$ and $\widehat{\Phi}=\vec{a}$. Then $(\vec{a},b)\in[M]_{\mathcal{P}}$ holds iff the typing judgment $\Phi\vdash M:b:\sigma$ is derivable.*

Exercice 7.1.1 Prove this theorem. This not particularly interesting, it is a good way though to review the definition of the semantics.

7.1.1 Adequacy. Our goal is to prove that, if $\vdash M:\varphi$ and $[M]\neq\emptyset$, then the reduction $\to_{\mathsf{w}}$ terminates on M, that is : there is no infinite sequence $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ such that $M_0=M$ and $M_i\to_{\mathsf{w}}M_{i+1}$ for each $i\in\mathbb{N}$.

For this pupose, we use a realizability method. Given a type σ and a point $a\in[\sigma]$, we define a set $|a|^{\sigma}$ of closed terms M such that $\vdash M:\sigma$ and, if σ is a positive type φ, we define moreover a set $|a|^{\varphi}_{\mathsf{v}}$ of closed values V such that $\vdash V:\varphi$. The definition is by induction on the structure of a.

$$\begin{aligned}
|[a_1,\dots,a_k]|^{!\sigma}_{\mathsf{v}} &= \{!M \mid \vdash M:\sigma \text{ and } M\in\bigcap_{i=1}^{k}|a_i|^{\sigma}\}\\
|(a_1,a_2)|^{\varphi_1\otimes\varphi_2}_{\mathsf{v}} &= \{\langle V_1,V_2\rangle \mid V_i\in|a_i|^{\varphi_i}_{\mathsf{v}} \text{ for } i=1,2\}\\
|(i,a)|^{\varphi_1\oplus\varphi_2}_{\mathsf{v}} &= \{\mathsf{in}_iV \mid V\in|a|^{\varphi_i}_{\mathsf{v}}\}\\
|a|^{\varphi} &= \{M \mid \vdash M:\varphi \text{ and } \exists V\in|a|^{\varphi}_{\mathsf{v}}\ M\to^*_{\mathsf{w}}V\}\\
|(a,b)|^{\varphi\multimap\sigma} &= \{M \mid \vdash M:\varphi\multimap\sigma \text{ and } \forall V\in|a|^{\varphi}_{\mathsf{v}}\ \langle M\rangle V\in|b|^{\sigma}\}\,.
\end{aligned}$$

Lemme 7.1.2 *If* $\vdash M : \sigma$, $a \in [\sigma]$, $M \to_{\mathsf{w}} M'$ *and* $M' \in |a|^{\sigma}$, *then* $M \in |a|^{\sigma}$.

Démonstration. By induction on the structure of a. If σ is a positive type φ, the property results immediately from the definition. If $\sigma = \varphi \multimap \tau$ and $a = (b, c)$, then let $V \in |b|^{\varphi}$, we have to prove that $\langle M \rangle V \in |c|^{\sigma}$. This results from the inductive hypothesis and from the fact that, by definition of $\to_{\mathsf{w}}$, we have $\langle M \rangle V \to_{\mathsf{w}}^{*} \langle M' \rangle V$. □

Lemme 7.1.3 *Let* φ *be a positive type and let* $(a, [a_1, \dots, a_k]) \in \mathsf{h}_{\varphi}$. *Then for all* i *one has* $|a|_{\mathsf{v}}^{\varphi} \subseteq |a_i|_{\mathsf{v}}^{\varphi}$.

Démonstration. By induction on the structure of a. If $\varphi = !\sigma$ and $a = [b_1, \dots, b_n]$ then $a_1, \dots, a_k \in [!\sigma]$ are finite multisets such that $a = a_1 + \cdots + a_k$. So we have $|a|_{\mathsf{v}}^{!\sigma} = \bigcap_{i=1}^{k} |a_i|_{\mathsf{v}}^{!\sigma}$ and hence $|a|_{\mathsf{v}}^{!\sigma} \subseteq |a_i|_{\mathsf{v}}^{!\sigma}$ for each i. □

Exercice 7.1.2 Complete the proof.

Then we can state and prove the main result.

Théorème 7.1.4 *Assume that* $x_1 : a_1, \varphi_1, \dots, x_n : a_n, \varphi_n \vdash M : b : \sigma$ *and that* $V_i \in |a_i|_{\mathsf{v}}^{\varphi_i}$ *for* $i = 1, \dots, n$. *Then* $M\,[V_1/x_1, \dots, V_k/x_k] \in |b|^{\sigma}$.

Démonstration. By induction on the semantic typing derivation of $x_1 : a_1, \varphi_1, \dots, x_n : a_n, \varphi_n \vdash M : b : \sigma$. We denote as M' the term $M\,[V_1/x_1, \dots, V_k/x_k]$.

Assume that $M = x_i$ for somme $i \in \{1, \dots, n\}$ so that the derivation consists of the axiom $\Phi \vdash x : a_i : \varphi_i$ with $(\widehat{\Phi}, []) \in \mathsf{h}_{\underline{\Phi}}$ so that $b = a_i$ and $\sigma = \varphi_i$. Then $M' = V_i \in |a_i|_{\mathsf{v}}^{\varphi_i} \subseteq |a_i|^{\varphi_i}$ by definition of this latter set.

Assume that $M = N^!$, $\sigma = !\tau$, $a = [b_1, \dots, b_k]$ and that we have $\Phi_i \vdash N : b_i : \tau$ for $i = 1, \dots, k$ with $(\widehat{\Phi}, [\widehat{\Phi_1}, \dots, \widehat{\Phi_k}]) \in \mathsf{h}_{\underline{\Phi}}$. For each $i = 1, \dots, n$, we have assumed that $V_i \in |a_i|_{\mathsf{v}}^{\varphi_i}$ but if we write explicitely $\Phi_j = (x_1 : a_{j,1} : \varphi_1, \dots, x_1 : a_{j,n} : \varphi_n)$, we know for each $i = 1, \dots, n$ one has $(a_i, [a_{1,i}, \dots, a_{k,i}]) \in \mathsf{h}_{\varphi_i}$ from which we deduce by Lemma 7.1.3 that $V_i \in |a_{j,i}|_{\mathsf{v}}^{\varphi_i}$ for each $j = 1, \dots, k$. Therefore by inductive hypothesis we have that $N' \in |b_j|^{\sigma}$ for $j = 1, \dots, k$. Hence $M' = (N')^! \in |a|_{\mathsf{v}}^{!\sigma}$ by definition of this latter set. Therefore $M' \in |a|^{!\sigma}$ as contended.

Assume that $M = \langle M_1, M_2 \rangle$, $\sigma = \varphi_1 \otimes \varphi_2$, $a = (a_1, a_2)$ and that we have $\Phi_j \vdash M_j : a_j : \varphi_j$ for $j = 1, 2$ with $(\widehat{\Phi}, [\widehat{\Phi_1}, \widehat{\Phi_2}]) \in \mathsf{h}_{\underline{\Phi}}$. As above, applying Lemma 7.1.3 and using the fact that $(\widehat{\Phi}, [\widehat{\Phi_1}, \widehat{\Phi_2}]) \in \mathsf{h}_{\underline{\Phi}}$, we get by inductive hypothesis that $M_j' \in |a_j|_{\mathsf{v}}^{\varphi_j}$ for $j = 1, 2$ and hence $M' = \langle M_1', M_2' \rangle \in |a|_{\mathsf{v}}^{\sigma} \subseteq |a|^{\sigma}$.

The case $M = \mathsf{in}_j N$ is completely similar.

Assume that $M = \langle N \rangle R$ and that we have $\Phi_1 \vdash N : (b, a) : \varphi \multimap \sigma$ and $\Phi_2 \vdash R : b : \varphi$ with $(\widehat{\Phi}, [\widehat{\Phi_1}, \widehat{\Phi_2}]) \in \mathsf{h}_{\underline{\Phi}}$. Therefore, by inductive hypothesis (using Lemma 7.1.3 as usual), we get $N' \in |(b, a)|^{\varphi \multimap \sigma}$ and $R' \in |b|^{\varphi}$. This latter property means that $R' \to_{\mathsf{w}}^{*} V$ for some $V \in |b|_{\mathsf{v}}^{\varphi}$. By definition of $|(b, a)|^{\varphi \multimap \sigma}$ we have $\langle N' \rangle V \in |a|^{\sigma}$. By definition of $\to_{\mathsf{w}}$ for CBPV, we get $M' \to_{\mathsf{w}}^{*} \langle N' \rangle V$ and hence $M' \in |a|^{\sigma}$ by Lemma 7.1.2.

Assume that $M = \mathsf{der}(N)$ and that we have $\Phi \vdash N : [a] : !\sigma$. By inductive hypothesis we have $N' \in |[a]|^{!\sigma}$, which means that there is $V \in |[a]|_{\mathsf{v}}^{!\sigma}$ such that $N' \to_{\mathsf{w}}^{*} V$. By definition of $|[a]|_{\mathsf{v}}^{!\sigma}$ there exists $R \in |a|^{\sigma}$ such that $V = R^!$. By definition of $\to_{\mathsf{w}}$ we have $M' = \mathsf{der}(N') \to_{\mathsf{w}}^{*} \mathsf{der}(R^!) \to_{\mathsf{w}} R$ and hence $M' \in |a|^{\sigma}$ by Lemma 7.1.2.

Assume that $M = \lambda x^{\varphi}\, N$, $\sigma = \varphi \multimap \tau$, $a = (b, c)$ and that we have $\Phi, x : b : \varphi \vdash N : c : \tau$. Let $V \in |b|_{\mathsf{v}}^{\varphi}$, we have $\langle M' \rangle V \to_{\mathsf{w}} M'\,[V/x] = M\,[V_1/x_1, \dots, V_n/x_n, V/x]$ and we know that this latter term belongs to $|c|^{\tau}$ by inductive hypothesis. Therefore we have $\langle M' \rangle V \in |c|^{\tau}$ by Lemma 7.1.2. Hence $M' \in |(b, c)|^{\varphi \multimap \tau}$ as contended.

Assume that $M = \mathsf{pr}_j N$ for some $j \in \{1, 2\}$, $\sigma = \varphi_j$, $a = a_j$ and $\Phi \vdash N : (a_1, a_2) : \varphi_1 \otimes \varphi_2$ (and also $(a_{2-j}, []) \in \mathsf{h}_{\underline{\Phi}}$ though we do not use this fact here; this property is crucial in the proof of soundness of the semantics wrt. reduction). By inductive hypothesis we have $N' \in |(a_1, a_2)|^{\varphi_1 \otimes \varphi_2}$. So there are values $V_j \in |a_j|_{\mathsf{v}}^{\varphi_j}$ for $j = 1, 2$ such that $N' \to_{\mathsf{w}}^{*} \langle V_1, V_2 \rangle$. By definition of $\to_{\mathsf{w}}$ we have $\mathsf{pr}_j M' \to_{\mathsf{w}}^{*} \mathsf{pr}_j \langle V_1, V_2 \rangle \to_{\mathsf{w}} V_j$ from which we deduce that $M' = \mathsf{pr}_j N' \in |a_j|^{\varphi_j}$ by definition of $|a_j|^{\varphi_j}$.

Assume that $M = \mathsf{case}(N, x_1 \cdot R_1, x_2 \cdot R_2)$ with $\Phi_0 \vdash N : (j, b_j) : \varphi_1 \oplus \varphi_2$, $\Phi_1, x_j : b_j : \varphi_j \vdash R_j : a : \sigma$ and $\underline{\Phi}, x_{2-j} : \varphi_{2-j} \vdash R_{2-j} : \sigma$ for some $j \in \{1, 2\}$, with $(\widehat{\Phi}, [\widehat{\Phi_0}, \widehat{\Phi_j}]) \in \mathsf{h}_{\underline{\Phi}}$. Applying Lemma 7.1.3 we get, by inductive hypothesis, $N' \in |(j, b_j)|^{\varphi_1 \oplus \varphi_2}$, which means that there exists $V \in |a_j|_{\mathsf{v}}^{\varphi_j}$ such that $N' \to_{\mathsf{w}}^* \mathsf{in}_j V$, and hence, by definition of $\to_{\mathsf{w}}$, we have $M' \to_{\mathsf{w}}^* \mathsf{case}(\mathsf{in}_j V, x_1 \cdot R_1', x_2 \cdot R_2') \to_{\mathsf{w}} R_j' [V/x_j]$, and this latter term belongs to $|a|^\sigma$ by inductive hypothesis. So by Lemma 7.1.2 we have $M' \in |a|^\sigma$.

Assume last that $M = \mathsf{fix}\, x^{!\sigma} N$ with $\Phi_0, x : [a_1, \ldots, a_k] : !\sigma \vdash N : a : \sigma$ and $\Phi_j \vdash M : a_j : \sigma$ for $j = 1, \ldots, k$, and $(\widehat{\Phi}, [\widehat{\Phi_0}, \ldots, \widehat{\Phi_k}]) \in \mathsf{h}_{\underline{\Phi}}$. As usual, we get $M' \in |a_j|^\sigma$ for $j = 1, \ldots, k$ and hence $(M')^! \in |[a_1, \ldots, a_k]|_{\mathsf{v}}^{!\sigma}$. By inductive hypothesis again (applied now to N) we get therefore $N' \left[(M')^!/x\right] \in |a|^\sigma$. By definition of $\to_{\mathsf{w}}$ (and of substitution) we have $M' \to_{\mathsf{w}} N' \left[(M')^!/x\right]$ and hence $M' \in |a|^\sigma$ by Lemma 7.1.2. $\square$

7.1.2 Observational equivalence for CBPV. We can say that two closed terms M_1 and M_2 are observationally equivalent if, whenever plugged in any context, the resulting processes behave in the same way. This context can use the plugged term various times, and therefore a promotion will be applied before plugging the term in the context.

More precisely, assume that $\vdash M_i : \sigma$ for $i = 1, 2$. Then we say that M_1 and M_2 are observationally equivalent (written $M_1 \simeq_{\mathrm{obs}} M_2$) if, for any term C such that $\vdash C : !\sigma \multimap 1$, the term $\langle C \rangle M_1^!$ is $\to_{\mathsf{w}}$-normalizable iff $\langle C \rangle M_2^!$ is $\to_{\mathsf{w}}$-normalizable. Remember that $1 = !\top$.

The main drawback of this notion is that *a priori* it is not compositional. For instance, it is not clear from the definition, whether $M_1 \simeq_{\mathrm{obs}} M_2,\ N_1 \simeq_{\mathrm{obs}} N_2 \Rightarrow \langle M_1 \rangle N_1 \simeq_{\mathrm{obs}} \langle M_2 \rangle N_2$. This makes it difficult to prove that two terms are equivalent.

Fortunately, one can prove that two terms are observationally equivalent by proving that they are denotationally equivalent in some model of CBPV (that is, they have the same interpretation in this model) as soon as (an analogue of) Theorem 7.1.4 holds.

Lemme 7.1.5 *Assume that $\vdash M : !\sigma$. Then $[] \in [M]$ iff there is N such that $\vdash N : \sigma$ and $M \to_{\mathsf{w}} N^!$.*

Démonstration. If $M \to_{\mathsf{w}} N^!$ then $[M] = [N^!]$ by Theorem 4.6.4. We have $[] \in [N^!]$ by definition of the interpretation (see the semantic typing rule above for $N^!$ with $k = 0$). Conversely, if $[] \in [M]$ then $M \in |[]|^{!\sigma}$ by Theorem 7.1.4 which means that $M \to_{\mathsf{w}}^* N^!$ for some term N such that $\vdash N : \sigma$. $\square$

Théorème 7.1.6 *Assume that $\vdash M_i : \sigma$ for $i = 1, 2$. If $[M_1] = [M_2]$ then $M_1 \simeq_{\mathrm{obs}} M_2$.*

Démonstration. Assume that $\vdash M_i : \sigma$ for $i = 1, 2$ and that $[M_1] = [M_2]$. Let C be a term such that $\vdash C : !\sigma \multimap 1$. We have $[\langle C \rangle M_1^!] = [\langle C \rangle M_2^!]$ and therefore $\langle C \rangle M_1^!$ $\to_{\mathsf{w}}$-normalizes iff $\langle C \rangle M_2^!$ $\to_{\mathsf{w}}$-normalizes by Lemma 7.1.5. $\square$

The converse implication does not hold simply because there are other models of CBPV which equate more terms than **Rel** and satisfy an analogue of 7.1.4. Such a model can be defined using the Scott semantics of LL.

When the converse implication holds, one says that the model is *fully abstract*.

7.2 Sémantique de PCF dans $\mathbf{Rel}_!$

On va définir une interprétation de PCF dans la CCC $\mathbf{Rel}_!$. Pour cela on commence par repérer les ingrédients de base de l'interprétation.

7.2.1 Natural numbers. We know that the category **Rel** has arbitrary countable coproducts, and therefore, it has an object of natural numbers N in the sense of Section **??**. One has $\mathsf{N} = \mathbb{N}$ and for each

$n \in \mathbb{N}$, one has $\overline{n} = \{(*, n)\}$. Applying the general definition of $\overline{\mathsf{suc}}$ given in that section, on checks easily that $\overline{\mathsf{suc}} \in \mathbf{Rel}(\mathsf{N}, \mathsf{N})$ is given by

$$\overline{\mathsf{suc}} = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}\,.$$

The canonical coalgebra structure of 1 is the morphism $h_1 = \mu^0$ defined as the following composition of morphisms in $\mathbf{Rel}$:

$$1 \xrightarrow{\mathsf{m}^0} !\top \xrightarrow{\mathsf{dig}_\top} !!\top \xrightarrow{!(\mathsf{m}^0)^{-1}} !1$$

It results from this definition that

$$h_1 = \{(*, k[*]) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

which is an infinite set. It follows that the canonical coalgebra structure of N is given by the following morphism $h_\mathsf{N} \in \mathbf{Rel}(\mathsf{N}, !\mathsf{N})$:

$$h_\mathsf{N} = \{(n, k[n]) \mid n, k \in \mathbb{N}\}$$

since $h_\mathsf{N} = [!\overline{n}\, h_1]_{n\in\mathbb{N}}$.

Let X be an object of $\mathbf{Rel}$, that is, a set. Using the notations of Section **??**, we see that $\overline{\mathsf{if}}_0 \in \mathbf{Rel}(1 \otimes !X \otimes !(!\mathsf{N} \multimap X), X)$ is given by

$$\overline{\mathsf{if}}_0 = \{(*, [a], [], a) \mid a \in X\}$$

and that $\overline{\mathsf{if}}_+ \in \mathcal{L}(\mathsf{N} \otimes !X \otimes !(!\mathsf{N} \multimap X), X)$ is given by

$$\overline{\mathsf{if}}_+ = \{(n, [], [(k[n], a)], a) \mid k, n \in \mathbb{N} \text{ and } a \in X\}\,.$$

It follows that $\overline{\mathsf{if}} \in \mathcal{L}(\mathsf{N} \otimes !X \otimes !(!\mathsf{N} \multimap X), X)$ is given by

$$\overline{\mathsf{if}} = \{(0, [a], [], a) \mid a \in X\} \cup \{(n+1, [], [(k[n], a)], a) \mid k, n \in \mathbb{N} \text{ and } a \in X\}\,.$$

7.2.2 Fixpoints. Consider the operator $\mathcal{Y} : \mathbf{Rel}_!(X \to X, X) \to \mathbf{Rel}_!(X \to X, X)$ as defined in section 4.5.12. Considered as a function $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(X \to X) \times X) \to \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(X \to X) \times X)$, this function is Scott continuous. Therefore, it has a least fixpoint

$$\overline{\mathsf{fix}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{Y}^n(\emptyset)$$

that is $\overline{\mathsf{fix}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{\mathsf{fix}}_n$ where $\overline{\mathsf{fix}}_0 = \emptyset$ and

$$\begin{aligned}\overline{\mathsf{fix}}_{n+1} &= \mathcal{Y}(\overline{\mathsf{fix}}_n)\\ &= \mathsf{Ev} \circ \langle \mathsf{Id}_{X\to X}, \overline{\mathsf{fix}}_n\rangle\\ &= \mathsf{ev}\,(\mathsf{der}_{!X\multimap X} \otimes \overline{\mathsf{fix}}_n^{\,!})\ \mathsf{c}_{!X\multimap X}\end{aligned}$$

and this sequence of morphisms is monotone with respect to inclusion.

Applying the last equation, we get that an element (m, a) of $(X \to X) \to X$ belongs to $\overline{\mathsf{fix}}_{n+1}$ iff m can be written

$$m = [([a_1, \ldots, a_k], a)] + m_1 + \cdots + m_k$$

with $(m_i, a_i) \in \overline{\mathsf{fix}}_n$ for $i = 1, \ldots, k$. So $\overline{\mathsf{fix}}_0 = \emptyset$, $\overline{\mathsf{fix}}_1 = \{([([], a)], a) \mid a \in X\}$ etc.

In other words, $\overline{\mathsf{fix}}$ is inductively defined as

$$\overline{\mathsf{fix}} = \{([([a_1, \ldots, a_k], a)] + m_1 + \cdots + m_k, a) \mid k \in \mathbb{N},\ a \in X \text{ and } \forall i\ (m_i, a_i) \in \overline{\mathsf{fix}}\}\,.$$

7.2.3 Definition and invariance of the interpretation. With any type A, we associate an object $[A]$ of $\mathbf{Rel}_!$, by the obvious inductive definition :

$$[\iota] = \mathsf{N} \quad \text{and} \quad [A \to B] = [A] \Rightarrow [B] = ![A] \multimap [B]$$

Given a typing context $\Gamma = (x_1 : A_1, \ldots, x_l : A_l)$, we set

$$[\Gamma] = [A_1] \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} [A_l]$$

Given a typing context $\Gamma = (x_1 : A_1, \ldots, x_l : A_l)$, a type A and a term M such that $\Gamma \vdash M : A$, we define a morphism $[M]_\Gamma \in \mathbf{Rel}_!([\Gamma], [A])$ by induction on M. This definition makes sense actually in any Kleisli category $\mathcal{L}_!$ with the required structure ; we present it first in the most abstract and general way, using purely categorical notations.

If $M = x_i$ for some $i \in \{1, \ldots, l\}$, then $[M]_\Gamma = \mathsf{pr}_i$.

If $M = \underline{n}$ for $n \in \mathbb{N}$ then $[M]_\Gamma = \overline{n} \circ \mathsf{t}_{[\Gamma]}$, considering $\overline{n}$ as an element of $\mathcal{L}_!(\top, \mathsf{N})$ by identifying $!\top$ with 1.

If $M = \underline{\mathsf{succ}}(P)$ with $\Gamma \vdash P : \iota$, then we have $[P]_\Gamma \in \mathcal{L}_!([\Gamma], \mathsf{N})$ and we set

$$[M]_\Gamma = \overline{\mathsf{suc}}\,[P]_\Gamma \in \mathcal{L}_!([\Gamma], \mathsf{N})$$

If $M = \mathsf{if}(P, Q, z \cdot R)$ with $\Gamma \vdash P : \iota$, $\Gamma \vdash Q : A$ and $\Gamma, z : \iota \vdash R : A$ then we have $[P]_\Gamma \in \mathcal{L}_!([\Gamma], \mathsf{N})$, $[Q]_\Gamma \in \mathcal{L}_!([\Gamma], [A])$ and $[R]_{\Gamma, z:\iota} \in \mathcal{L}_!([\Gamma] \mathbin{\&} \mathsf{N}, [A])$ so that $\mathsf{Cur}\left([R]_{\Gamma, z:\iota}\right) \in \mathcal{L}_!([\Gamma], !\mathsf{N} \multimap [A])$. Therefore we have ${[Q]_\Gamma}^! \in \mathcal{L}_!(![\Gamma], ![A])$ and $\mathsf{Cur}\left([R]_{\Gamma, z:\iota}\right)^! \in \mathcal{L}(![\Gamma], !(!\mathsf{N} \multimap [A]))$. So we set

$$[M]_\Gamma = \overline{\mathsf{if}}\left([P]_\Gamma \otimes {[Q]_\Gamma}^! \otimes \mathsf{Cur}\left([R]_{\Gamma, z:\iota}\right)^!\right) \mathsf{c} \in \mathcal{L}(![\Gamma], [A])$$

where $\mathsf{c} \in \mathcal{L}(![\Gamma], ![\Gamma] \otimes ![\Gamma] \otimes ![\Gamma])$ is a ternary version of contraction (uniquely defined up to α isos, for instance $\mathsf{c} = (![\Gamma] \otimes \mathsf{c}_{[\Gamma]})\, \mathsf{c}_{[\Gamma]}$).

If $M = \lambda x^B\, P$ with $\Gamma, x : B \vdash P : C$ (and $A = B \to C$) then we have $[P]_{\Gamma, x:B} \in \mathcal{L}_!([\Gamma] \mathbin{\&} [B], [C])$ and we set $[M]_\Gamma = \mathsf{Cur}\left([P]_{\Gamma, x:B}\right) \in \mathcal{L}_!([\Gamma], [B] \Rightarrow [C])$.

If $M = (P)\, Q$ with $\Gamma \vdash P : B \to A$ and $\Gamma \vdash Q : B$ then we have $[P]_\Gamma \in \mathcal{L}_!([\Gamma], [B] \Rightarrow [A])$ and $[Q]_\Gamma \in \mathcal{L}_!([\Gamma], [B])$ and we set

$$\begin{aligned}[M]_\Gamma &= \mathsf{Ev} \circ \langle [P]_\Gamma, [Q]_\Gamma \rangle \\ &= \mathsf{ev}\left([P]_\Gamma \otimes {[Q]_\Gamma}^!\right) \mathsf{c}_{[\Gamma]}\end{aligned}$$

If $M = \mathsf{fix}(P)$ with $\Gamma \vdash P : A \to A$, then we have $[P]_\Gamma \in \mathcal{L}([\Gamma], [A] \Rightarrow [A])$ and we set

$$\begin{aligned}[M]_\Gamma &= \overline{\mathsf{fix}} \circ [P]_\Gamma \\ &= \overline{\mathsf{fix}}\,{[P]_\Gamma}^!\end{aligned}$$

The following result is a tool for proving that the semantics is invariant under term reduction. It is also interesting *per se* as it means that the semantics is modular : the interepretation of a term is known as soon as one knows the interpretation of its subterms. This is an essential feature of denotational semantics.

Théorème 7.2.1 (Substitution Lemma) *Assume that* $\Gamma, x : A \vdash M : B$ *and that* $\Gamma \vdash P : A$. *Then*

$$\begin{aligned}[M\,[P/x]]_\Gamma &= [P]_{\Gamma, x:A} \circ \langle \mathsf{Id}_{[\Gamma]}, [Q]_\Gamma \rangle \\ &= [P]_{\Gamma, x:A}\left(![\Gamma] \otimes {[P]_\Gamma}^!\right) \mathsf{c}_{[\Gamma]}\end{aligned}$$

The proof is a simple induction on M (or, equivalently, on the derivation that $\Gamma, x : A \vdash M : B$).

Théorème 7.2.2 *Assume that* $\Gamma, x : A \vdash M : B$ *and that* $M\ \beta\ M'$. *Then* $[M']_\Gamma = [M]_\Gamma$.

The proof is a straightforward induction on the derivation of the fact that $M\ \beta\ M'$ in the deduction system presented in Section 1.3. We deal here with three cases.

Assume first that $M = \left(\lambda x^B\, P\right) Q$ with $\Gamma, x : B \vdash P : A$ and $\Gamma \vdash Q : B$, and that $M' = P\,[Q/x]$. We have

$$\begin{aligned}
[M]_\Gamma &= \mathsf{Ev} \circ \langle \mathsf{Cur}\,[P]_{\Gamma,x:B}, [Q]_\Gamma \rangle \\
&= [P]_{\Gamma,x:B} \circ \langle \mathsf{Id}_{[\Gamma]}, [Q]_\Gamma \rangle \quad \text{by cartesian closedness of } \mathcal{L}_! \\
&= [M']_\Gamma \quad \text{by Theorem 7.2.1.}
\end{aligned}$$

Assume now that $M = \mathsf{if}(\underline{n+1}, P, z \cdot Q)$ with $\Gamma \vdash P : A$ and $\Gamma, z : \iota \vdash Q : A$, and that $M' = Q\,[\underline{n}/z]$. Then we have $[P]_\Gamma{}^! \in \mathcal{L}(![\Gamma], ![A])$ and $\mathsf{Cur}\,[Q]_{\Gamma,z:\iota}{}^! \in \mathcal{L}(![\Gamma], !(!\mathsf{N} \multimap [A]))$. Remember also that $[\underline{n+1}]_\Gamma = \overline{n+1}\ \mathsf{w}_{[\Gamma]}$. We have

$$\begin{aligned}
[M]_\Gamma &= \overline{\mathsf{if}}\,([\underline{n+1}]_\Gamma \otimes [P]_\Gamma{}^! \otimes \mathsf{Cur}\,[Q]_{\Gamma,z:\iota}{}^!)\ \mathsf{c} \\
&= \overline{\mathsf{if}}\,(\overline{n+1} \otimes ![\Gamma] \otimes !(!\mathsf{N} \multimap [A]))\,(\mathsf{w}_{[\Gamma]} \otimes [P]_\Gamma{}^! \otimes \mathsf{Cur}\,[Q]_{\Gamma,z:\iota}{}^!)\ \mathsf{c} \\
&= \mathsf{ev}\ \psi\,(\overline{n}^! \otimes \mathsf{w}_{[\Gamma]} \otimes \mathsf{der}_{!\mathsf{N}\multimap[A]})\,(\mathsf{w}_{[\Gamma]} \otimes [P]_\Gamma{}^! \otimes \mathsf{Cur}\,[Q]_{\Gamma,z:\iota}{}^!)\ \mathsf{c}
\end{aligned}$$

by Diagram (**??**), using the notations of that diagram. Therefore we have

$$\begin{aligned}
[M]_\Gamma &= \mathsf{ev}\,(\mathsf{Cur}\,[Q]_{\Gamma,z:\iota} \otimes [\underline{n}]_\Gamma{}^!)\ \mathsf{c}_{[\Gamma]} \\
&= [Q]_{\Gamma,z:\iota}\,(![\Gamma] \otimes [\underline{n}]_\Gamma{}^!)\ \mathsf{c}_{[\Gamma]} \quad \text{by cartesian closedness of } \mathcal{L}_! \\
&= [Q\,[\underline{n}/z]]_\Gamma = [M']_\Gamma \quad \text{by Theorem 7.2.1}
\end{aligned}$$

Assume last that $M = \mathsf{fix}(P)$ with $\Gamma \vdash P : A \to A$ and that $M' = (P)\,M$. Then we have $[P]_\Gamma \in \mathcal{L}_!([\Gamma], [A] \Rightarrow [A])$ and

$$\begin{aligned}
[M]_\Gamma &= \overline{\mathsf{fix}} \circ [P]_\Gamma \\
&= \mathsf{Ev} \circ \langle [P]_\Gamma, \overline{\mathsf{fix}} \circ [P]_\Gamma \rangle \quad \text{as seen in Section 4.5.12} \\
&= [(P)\,M]_\Gamma
\end{aligned}$$

7.2.4 Relational interpretation as a typing system. We provide now a more concrete presentation of that interpretation, in the relational model.

A *semantic context* is a sequence $\Phi = (x_1 : m_1 : A_1, \dots, x_l : m_l : A_l)$ where the x_is are pairwise distinct variable and $m_i \in ![A_i]$ for $i = 1, \dots, l$. We use $\underline{\Gamma}$ for the underlying typing context $\underline{\Gamma} = (x_1 : A_1, \dots, x_l : A_l)$. Given a typing context $\Gamma = (x_1 : A_1, \dots, x_l : A_l)$, we use 0_Γ for the semantic context $0_\Gamma = (x_1 : [] : A_1, \dots, x_l : [] : A_l)$. Observe that $\underline{0_\Gamma} = \Gamma$. More generally, given a finite family $(\Phi_i)_{i\in I}$ of semantic contexts such that $\forall i\ \underline{\Phi_i} = \Gamma$ for some given typing context $\Gamma = (x_1 : A_1, \dots, x_l : A_l)$ (so that $\Phi_i = (x_1 : m_1^i :, A_1, \dots, x_l : m_l^i : A_l)$), we define $\Phi = \sum_{i\in I} \Phi_i = (x_1 : \sum_{i\in I} m_1^i : A_1, \dots, x_l : \sum_{i\in I} m_l^i : A_l)$.

A *semantic judgment* is a statement of shape $\Phi \vdash M : a : A$ where Φ is a semantic context, M is a term, A is a type and $a \in [A]$.

We give now a deduction system for these judgments.

$$\frac{}{0_\Gamma, x : [a] : A \vdash x : a : A} \qquad \frac{}{0_\Gamma \vdash \underline{n} : n : \iota} \qquad \frac{\Phi \vdash M : n : \iota}{\Phi \vdash \mathsf{succ}(M) : n+1 : \iota}$$

$$\frac{\Phi_0 \vdash M : 0 : \iota \qquad \Phi_1 \vdash P : a : A \qquad \Gamma, z : \iota \vdash Q : A \text{ where } \Gamma = \underline{\Phi_0} = \underline{\Phi_1}}{\Phi_0 + \Phi_1 \vdash \mathsf{if}(M, P, z \cdot Q) : a : A}$$

$$\frac{\Phi_0 \vdash M : n+1 : \iota \qquad \Phi_2, z : k[n] : \iota \vdash Q : a : A \qquad \Gamma \vdash P : A \text{ where } \Gamma = \underline{\Phi_0} = \underline{\Phi_2}}{\Phi_0 + \Phi_2 \vdash \mathsf{if}(M, P, z \cdot Q) : a : A}$$

In that rule, k and n are arbitrary elements of $\mathbb{N}$.

$$\frac{\Phi, x : m : A \vdash M : b : B}{\Phi \vdash \lambda x^A\, M : (m, b) : A \to B}$$

$$\frac{\Phi_0 \vdash M : ([a_1, \dots, a_n], b) : A \to B \qquad \Phi_i \vdash P : a_i : A \text{ and } \underline{\Phi_i} = \underline{\Phi_0} \text{ for } i = 1, \dots, n}{\sum_{i=0}^{n} \Phi_i \vdash (M)\, P : b : B}$$

$$\frac{\Phi_0 \vdash M : ([a_1, \dots, a_n], a) : A \to A \qquad \Phi_i \vdash \mathsf{fix}(M) : a_i : A \text{ and } \underline{\Phi_i} = \underline{\Phi_0} \text{ for } i = 1, \dots, n}{\sum_{i=0}^{n} \Phi_i \vdash \mathsf{fix}(M) : a : A}$$

The proofs of the two next statements are simple inductions of semantic derivations.

Proposition 7.2.3 *If $\Phi \vdash M : a : A$ then $\underline{\Phi} \vdash M : A$.*

Théorème 7.2.4 *Assume that $\Gamma \vdash M : A$ with $\Gamma = (x_1 : A_1, \dots, x_l : A_l)$. Let $a \in [A]$ and let $m_i \in {!}[A_i]$ for $i = 1, \dots, l$. The two following statements are equivalent :*
- *— $(m_1, \dots, m_l, a) \in [M]_\Gamma$*
- *— the judgment $(x_1 : m_1 : A_1, \dots, x_l : m_l : A_l) \vdash M : a : A$ is derivable.*

7.2.5 The adequacy Theorem. Let M be a term such that $\vdash M : \iota$, that is, M is closed and of base type. Then if we apply the β_{wh} reduction strategy (see Section 1.3.1) to M, there are two possibilities :
- — either $M\ \beta_{\mathsf{wh}}^*\ \underline{n}$ for a uniquely determined $n \in \mathbb{N}$
- — or the computation does not terminate.

In the first case, we know by Theorem 7.2.2 that $[M] = \overline{n}$, but what can we say in the second case? The answer is that, in the second case, $[M] = \emptyset$. This result can be proved under rather general hypotheses about the model (basically, one needs a CCC with an "object of natural numbers", and where each hom-set is a cpo with a least element).

We give here a proof in this particular model, which is more direct than the general one and can be adapted to many similar contexts.

For any type A we define a relation $\Vdash_A$ between closed terms of type A and elements of $[A]$. The definition is by induction on A.

If $A = \iota$, M such that $\vdash M : \iota$ and $n \in \mathbb{N}$, we say that $M \Vdash_\iota n$ if $M\ \beta_{\mathsf{wh}}^*\ \underline{n}$.

If $A = B \to C$, M such that $\vdash M : B \to C$, $b_1, \dots, b_n \in [B]$ and $c \in [C]$, we say that $M \Vdash_{B \to C} ([b_1, \dots, b_n], c)$ if, for any P such that $\vdash P : B$ and $P \Vdash_B b_i$ for $i = 1, \dots, n$, one has $(M)\, P \Vdash_C c$.

The next lemma states the main property of the relation $\Vdash_A$ for the proof of Theorem 7.2.6.

Lemme 7.2.5 *Assume that $\vdash M : A$, $M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M'$ and $a \in [A]$. If $M' \Vdash_A a$ then $M \Vdash_A a$.*

Démonstration. By induction on A.

Assume that $A = \iota$. The assumption $M' \Vdash_\iota n$ means that $M'\ \beta_{\mathsf{wh}}\ \underline{n}$. If $M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M'$, we have $M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ \underline{n}$, that is $M \Vdash_\iota n$.

Assume that $A = B \to C$, $a = ([b_1, \dots, b_n], c)$ and M' is such that $M' \Vdash_{B \to C} a$. We assume that $M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M'$ and we want to prove $M \Vdash_{B \to C} a$. So let P be such that $\vdash P : B$ and $P \Vdash_B b_i$ for $i = 1, \dots, n$. Since $M\ \beta_{\mathsf{wh}}\ M'$, we have $(M)\, P\ \beta_{\mathsf{wh}}\ (M')\, P$ (see the definition of β_{wh} in Section 1.3.1). But $(M')\, P \Vdash_C c$ because $M' \Vdash_{B \to C} ([b_1, \dots, b_n], c)$ and hence $(M)\, P \Vdash_C c$ by inductive hypothesis. □

We write $M \Vdash_A [a_1, \dots, a_n]$ if $M \Vdash_A a_i$ for $i = 1, \dots, n$.

Théorème 7.2.6 (Adequacy) *Assume that $(x_1 : m_1 : A_1, \dots, x_l : m_l : A_l) \vdash M : a : A$. For any closed terms $P_1, \dots, P_n$ such that $\vdash P_i : A_i$ for $i = 1, \dots, l$, if $P_i \Vdash_{A_i} m_i$ for $i = 1, \dots, l$, then we have $M\, [P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_A a$.*

Démonstration. By induction on the derivation that $(x_1 : m_1 : A_1, \dots, x_l : m_l : A_l) \vdash M : a : A$, we prove the following universally quantified statement :

For any closed terms $P_1, \dots, P_n$ such that $\vdash P_i : A_i$ for $i = 1, \dots, l$, if $P_i \Vdash_{A_i} m_i$ for $i = 1, \dots, l$, then we have $M\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_A a$.

We use Φ for the semantic context $(x_1 : m_1 : A_1, \dots, x_l : m_l : A_l)$.

Assume that $M = x_i$ for some $i \in \{1, \dots, l\}$. Then we have $m_j = []$ for $j \neq i$ and $m_i = [a]$. We have $M\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] = P_i$ and hence $M\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_{A_i} a$ by our assumption about the P_js.

Assume that $M\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] = \underline{n}$ so that $M\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_\iota n$ because $\underline{n}\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{n}$ and by the definition of $\Vdash_\iota$.

Assume that $M = \underline{\mathsf{succ}}(P)$, $A = \iota$ and $a = \underline{n+1}$ for some $n \in \mathbb{N}$, so that we have $\Phi \vdash P : n : \iota$ and we know that $P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_\iota n$ by inductive hypothesis. This means that $P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l]\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{n}$. By definition of β_{wh}, it follows that $\underline{\mathsf{succ}}(P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l])\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{n+1}$, that is $M\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_\iota n+1$ as required.

Assume that $M = \mathsf{if}(P, Q, z \cdot R)$, that $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, with $\Phi_0 \vdash P : 0 : \iota$, $\Phi_1 \vdash Q : a : A$ and $\underline{\Phi}, z : \iota \vdash R : A$. The contexts Φ_p (for $p = 0, 1$) can be written $\Phi_p = (x_1 : m_1^p : A_1, \dots, x_l : m_l^p : A_l)$ with $m_i = m_i^0 + m_i^1$ for $i = 1, \dots, l$. For each i, we have assumed that $P_i \Vdash_{A_i} m_i$ so that we have $P_i \Vdash_{A_i} m_i^p$ for $p = 0, 1$, and for each $i = 1, \dots, l$. By inductive hypothesis, it follows that $P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_\iota 0$ and $Q\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_A a$. Therefore $P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l]\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{0}$. Hence, by definition of β_{wh}, we have $M\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l]\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l]$. Since $Q\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_A a$ we have $M\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_A a$ by Lemma 7.2.5.

Assume that $M = \mathsf{if}(P, Q, z \cdot R)$, that $\Phi = \Phi_0 + \Phi_2$, with $\Phi_0 \vdash P : n+1 : \iota$, $\Phi_2, z : k[n] : \iota \vdash R : a : A$ and $\underline{\Phi} \vdash Q : A$, for some $k, n \in \mathbb{N}$. The contexts Φ_p (for $p = 0, 2$) can be written $\Phi_k = (x_1 : m_1^p : A_1, \dots, x_l : m_l^p : A_l)$ with $m_i = m_i^0 + m_i^2$ for $i = 1, \dots, l$. For each i, we have assumed that $P_i \Vdash_{A_i} m_i$ so that we have $P_i \Vdash_{A_i} m_i^p$ for $p = 0, 2$, and for each $i = 1, \dots, l$. By inductive hypothesis, it follows that $P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_\iota n+1$ and $R\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l, \underline{n}/z] \Vdash_A a$ (because $\underline{n} \Vdash_\iota n$ by definition of $\Vdash_\iota$, and hence $\underline{n} \Vdash_\iota k[n]$). Therefore we have $P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l]\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{n+1}$. Hence, coming back to the definition of β_{wh}, we see that $M\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l]\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ R\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l, \underline{n}/z]$. But we have seen that $R\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l, \underline{n}/z] \Vdash_A a$ and hence we have $M\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_A a$ by Lemma 7.2.5.

Assume that $A = B \to C$, $M = \lambda x^B\, P$, that $a = (m, c)$, and that we have $\Phi, x : m : B \vdash P : c : C$. Given $P_1, \dots, P_l$ as in the statement of the theorem, we must prove that $\lambda x^B\, P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_{B \to C} (m, c)$. So let Q be a term such that $Q \Vdash_B m$, we must prove that

$$\left(\lambda x^B\, P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l]\right) Q \Vdash_C c\,.$$

Since $\left(\lambda x^B\, P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l]\right) Q\ \beta_{\mathsf{wh}}\ P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l, Q/x]$, by Lemma 7.2.5, it suffices to prove that $P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l, Q/x] \Vdash_C c$ which is a direct consequence of our inductive hypothesis (observe here that it is very important to write this inductive hypothesis as a statement universally quantified over the P_i's).

Assume that $M = (P)\,Q$, that we have $\Phi_0 \vdash P : (m, a) : B \to A$ with $m = [b_1, \dots, b_n]$, that $\Phi_p \vdash Q : b_p : B$ for $p = 1, \dots, n$ and $\Phi = \sum_{p=0}^n \Phi_p$. For $p = 0, \dots, n$ we can write $\Phi_p = (x_1 : m_1^p : A_1, \dots, x_l : m_l^p : A_l)$ and we have $m_i = \sum_{p=0}^n m_i^p$ for $i = 1, \dots, l$. Since we know that $P_i \Vdash_{A_i} m_i$, for $i = 1, \dots, l$, we have $P_i \Vdash_{A_i} m_i^p$ for each $i = 1, \dots, l$ and each $p = 0, \dots, n$. By inductive hypothesis, we have therefore $P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_{B \to A} (m, a)$ and $Q\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_B b_p$ for $p = 1, \dots, n$. By definition of $\Vdash_{B \to A}$, it follows that

$$M\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] = (P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l])\,Q\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_A a$$

as required.

Assume last that $M = \mathsf{fix}(P)$, that we have $\Phi_0 \vdash P : (m, a) : A \to A$ with $m = [a_1, \dots, a_n]$, $\Phi_p \vdash \mathsf{fix}(P) : a_p : A$ for $p = 1, \dots, n$ and $\Phi = \sum_{i=0}^n \Phi_i$. For $p = 0, \dots, n$ we can write $\Phi_p = (x_1 : m_1^p : A_1, \dots, x_l : m_l^p : A_l)$ and we have $m_i = \sum_{p=0}^n m_i^p$ for $i = 1, \dots, l$. Since we know that $P_i \Vdash_{A_i} m_i$, for $i = 1, \dots, l$, we have $P_i \Vdash_{A_i} m_i^p$ for each $i = 1, \dots, l$ and each $p = 0, \dots, n$. By inductive hypothesis, we have therefore $P\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_{A \to A} (m, a)$ and $\mathsf{fix}(P)\,[P_1/x_1, \dots, P_l/x_l] \Vdash_B a_p$ for $p = 1, \dots, n$. By definition of

$\Vdash_{A\to A}$, it follows that

$$(P\,[P_1/x_1,\dots,P_l/x_l])\,\mathsf{fix}(P)\,[P_1/x_1,\dots,P_l/x_l]\Vdash_A a$$

We have

$$\begin{aligned}M\,[P_1/x_1,\dots,P_l/x_l] = \mathsf{fix}(P\,[P_1/x_1,\dots,P_l/x_l])\\ \beta_{\mathsf{wh}}\ (P\,[P_1/x_1,\dots,P_l/x_l])\,\mathsf{fix}(P\,[P_1/x_1,\dots,P_l/x_l])\\ = \quad (P\,[P_1/x_1,\dots,P_l/x_l])\,\mathsf{fix}(P)\,[P_1/x_1,\dots,P_l/x_l]\end{aligned}$$

and hence $M\,[P_1/x_1,\dots,P_l/x_l]\Vdash_A a$ by Lemma 7.2.5, as required. □

In particular, when M is closed, we have

$$\vdash M : a : A \Rightarrow M \Vdash_A a$$

and in the particular case where $A=\iota$, we get the announced answer to our initial question :

$$\vdash M : n : \iota \Rightarrow M\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{n}$$

so that conversely, if the reduction of M in the β_{wh} strategy does not terminate, we must have $[M]=\emptyset$.

In section 1.3.4, for any type A, we have defined an observational preorder on closed terms of type A. Let M and N be closed terms of type A. We write $M \sqsubseteq_{\mathrm{obs}} N$ if, for any closed term C of type $A\to\iota$, one has

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad (C)\,M\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{n} \Rightarrow (C)\,N\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{n}\,.$$

Théorème 7.2.7 *Let M and N be closed terms such that $\vdash M : A$ and $\vdash N : A$. If $[M]\subseteq[N]$ (as subsets of $[A]$) then $M \sqsubseteq_{\mathrm{obs}} N$.*

Démonstration. Assume that $[M]\subseteq[N]$ and let C be a closed term such that $\vdash C : A\to\iota$. Assume that $(C)\,M\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{n}$ for some $n\in\mathbb{N}$. Then we have $[(C)\,M]=\{n\}$ by Theorem 7.2.2, that is

$$\mathsf{Ev}\circ\langle[C],[M]\rangle=\{n\}$$

Since $[M]\subseteq[N]$, we have $\mathsf{Ev}\circ\langle[C],[M]\rangle\subseteq\mathsf{Ev}\circ\langle[C],[N]\rangle=[(C)\,N]$ and hence $\vdash (C)\,N : n : \iota$ (by monotonicity of the interpretation in the relational model, see for instance Exercice 6.6.8). Therefore $(C)\,N\ \beta^*_{\mathsf{wh}}\ \underline{n}$ by Theorem 7.2.6. This shows that $M \sqsubseteq_{\mathrm{obs}} N$. □

In particular, if $[M]=[N]$, then $M\simeq_{\mathrm{obs}} N$, that is, two terms which have the same interpretation in the model are observationally equivalent. When the converse implication is also true (which is not the case in $\mathbf{Rel}_!$ but could be the case in some other model), one says that the model is (equationally) *fully abstract*. If the model is equiped with an order relation $\le$ (as here the inclusion relation) on morphisms "compatible with the CCC structure" and if $[M]\le[N]\Rightarrow M\sqsubseteq_{\mathrm{obs}} N$, one says that the model is *inequationally fully abstract*, which is of course a stronger condition than being fully abstract.

As an exemple of application, it is easy to see (exercise) that the two terms G and D of Section 1.3.4 satisfy

$$[G]=[D]=\{([0],[0],0)\}\cup\{([n],[n'],1)\mid n+n'\neq 0)\}$$

and hence $G\simeq_{\mathrm{obs}} D$.

It is also easy to see that $\mathbf{Rel}_!$ is not fully abstract. First, for each type A, we set $\Omega_A=\mathsf{fix}(\lambda x^A\,x)$ which satisfies $\vdash\Omega_A : A$.

Exercice 7.2.1 Prove that $[\Omega_A]=\emptyset$.

Let $M_1=\lambda x^\iota\,\mathsf{if}(x,\underline{0},z\cdot\Omega_\iota)$ and $M_2=\lambda x^\iota\,\mathsf{if}(x,\mathsf{if}(x,\underline{0},z\cdot\Omega_\iota),z\cdot\Omega_\iota)$ so that $\vdash M_i:\iota\to\iota$ for $i=1,2$.

Exercice 7.2.2 Prove that $[M_i]=\{(i[0],0)\}$ for $i=1,2$, so that $[M_1]\neq[M_2]$. Prove that $M_1\simeq_{\mathrm{obs}} M_2$ (by a syntactic analysis of a context C, or using the Adequacy Theorem for the Scott model of PCF).

Bibliographie

[AC98] Roberto Amadio and Pierre-Louis Curien. *Domains and lambda-calculi*, volume 46 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 1998.

[GLT89] Jean-Yves Girard, Yves Lafont, and Paul Taylor. *Proofs and types*, volume 7 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 1989.

[Kri90] Jean-Louis Krivine. *Lambda-Calcul : Types et Modèles*. Études et Recherches en Informatique. Masson, 1990.

[Lev02] Paul Blain Levy. Adjunction Models For Call-By-Push-Value With Stacks. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 69 :248–271, 2002.

[Mel09] Paul-André Melliès. Categorical semantics of linear logic. *Panoramas et Synthèses*, 27, 2009.