Rencontre du GT GEOCAL — GDR-IM

Sémantique quantitative et qualitative de PCF

Thomas Ehrhard

Laboratoire PPS, CNRS et Université Paris Diderot

Bordeaux, le 24 mars 2014

Introduction

Les modèles dénotationnels de PCF basés sur les domaines et les fonctions (domaines de Scott, dI-domaines, espaces cohérents etc) sont *qualitatifs*.

Autrement dit, ils disent ce qui est utile pour calculer un résultat, mais pas combien de fois les données sont utilisées.

Les modèles qualitatifs sont “finitaires” :

Par exemple, dans la hiérarchie des types simples construits sur les booléens dans les espaces cohérents, tous les domaines obtenus sont finis.

Par contre, dans les modèles quantitatifs, l'interprétation indique combien de fois chaque donnée est utilisée dans le calcul.

Tous les modèles de jeu, à l'exception très remarquable des *algorithmes séquentiels*, sont quantitatifs.

Mais il y a un autre modèle quantitatif, qui est d'ailleurs le plus simple (et le plus canonique ?) de tous les modèles dénotationnels : le *modèle relationnel*.

Tous ces modèles (sauf les algorithmes séquentiels) sont infinitaires.

On va voir

- comment la sémantique relationnelle induit naturellement une version "avec ressources" de PCF
- la saveur différentielle de ce calcul avec ressources
- comment on passe du quantitatif au qualitatif en construisant un nouuveau modèle.

Un langage de programmation fonctionnel : PCF

Un langage fonctionnel idéal.

Types :

- ι est un type : le type des entiers
- si σ et τ sont des types alors $\sigma \Rightarrow \tau$ est un type.

Termes, donnés avec leurs règles de typage.

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \underline{k} : \iota} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \iota}{\Gamma \vdash \mathsf{S}(M) : \iota} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \iota}{\Gamma \vdash \mathsf{P}(M) : \iota}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \iota \qquad \Gamma \vdash P : \sigma \qquad \Gamma \vdash Q : \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{If}(M, P, Q) : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x^\sigma\, M : \sigma \Rightarrow \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\, N : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{Fix}(M) : \sigma}$$

Réduction de tête faible

On se donne une sémantique opérationnelle définie par réécriture.

$$\frac{}{(\lambda x^\sigma\, M)\, N \;\; \beta_{\mathbf{wh}} \;\; M\,[N/x]} \qquad \frac{}{\mathsf{Fix}(M) \;\; \beta_{\mathbf{wh}} \;\; M\,\mathsf{Fix}(M)}$$

$$\frac{}{\mathsf{S}(\underline{k}) \;\; \beta_{\mathbf{wh}} \;\; \underline{k+1}} \qquad \frac{}{\mathsf{P}(\underline{0}) \;\; \beta_{\mathbf{wh}} \;\; \underline{0}} \qquad \frac{}{\mathsf{P}(\underline{k+1}) \;\; \beta_{\mathbf{wh}} \;\; \underline{k}}$$

$$\frac{}{\mathsf{If}(\underline{0}, P, Q) \;\; \beta_{\mathbf{wh}} \;\; P} \qquad \frac{}{\mathsf{If}(\underline{k+1}, P, Q) \;\; \beta_{\mathbf{wh}} \;\; Q}$$

Réduction : passage au contexte

$$\frac{M \ \ \beta_{\mathbf{wh}} \ \ M'}{M\,N \ \ \beta_{\mathbf{wh}} \ \ M'\,N}$$

$$\frac{M \ \ \beta_{\mathbf{wh}} \ \ M'}{\mathsf{If}(M, P, Q) \ \ \beta_{\mathbf{wh}} \ \ \mathsf{If}(M', P, Q)}$$

Sémantique relationnelle de la Logique Linéaire

La catégorie **Rel** : les objets sont les ensembles et

$$\mathbf{Rel}(X, Y) = \mathcal{P}(X \times Y) .$$

Identité : diagonale.

Composition relationnelle.

$X^\perp = X$,

$X \otimes Y = X \times Y = X \multimap Y = X \parr Y$.

$!X = \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(X)$, les multi-ensembles finis sur X.

C'est un foncteur **Rel** $\to$ **Rel** : si $t \in \mathbf{Rel}(X, Y)$ alors

$$!t = \{([a_1, \dots, a_n], [b_1, \dots, b_n]) \mid \forall i \; (a_i, b_i) \in t\} .$$

$\mathrm{d}^X = \{([a], a) \mid a \in X\} \in \mathbf{Rel}(!X, X)$ dereliction

$\mathrm{p}^X = \{(m_1 + \cdots + m_k, [m_1, \dots, m_k]) \mid m_1, \dots, m_k \in !X\}$ digging

définit une comonade sur **Rel** qui permet d'interpréter la logique linéaire.

Catégorie cartésienne fermée induite

C'est la catégorie de Kleisli de cette comonade $\mathbf{Rel}_!$:

- objets : ceux de **Rel** (les ensembles)
- $\mathbf{Rel}_!(X, Y) = \mathbf{Rel}(!X, Y)$

La composition est définie au moyen de d^X et p^X, on obtient

$$
\begin{aligned}
t \circ s = \{(m_1 + \cdots + m_n, c) \mid \exists b_1, \ldots, b_n \in Y \\
\forall i \ (m_i, b_i) \in s \text{ et } ([b_1, \ldots, b_n, c] \in t)\}
\end{aligned}
$$

pour $s \in \mathbf{Rel}(!X, Y)$ et $t \in \mathbf{Rel}(!Y, Z)$.

Interprétation relationnelle de PCF

Cette catégorie a aussi des opérateurs de point fixe, un "objet des entiers naturels" (qui est $\mathbb{N}$).

Les types sont interprétés par des objets :

- $[\iota]_{\mathbf{r}} = \mathbb{N}$
- $[\sigma \Rightarrow \tau]_{\mathbf{r}} = ![\sigma]_{\mathbf{r}} \multimap [\tau]_{\mathbf{r}} = \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}([\sigma]_{\mathbf{r}}) \times [\tau]_{\mathbf{r}}$.

Et les termes par des morphismes : si $\Gamma \vdash M : \sigma$ avec $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n)$ alors on définit

$$[M]_{\mathbf{r}}^{\Gamma} \in \mathbf{Rel}(![\sigma_1]_{\mathbf{r}} \otimes \cdots \otimes ![\sigma_n]_{\mathbf{r}}, [\sigma]_{\mathbf{r}}) = \mathcal{P}\left(\prod_{i=1}^{n} [\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(\sigma_i)]_{\mathbf{r}} \times [\sigma]_{\mathbf{r}}\right)$$

Types intersection relationnels

Au lieu de $(m_1, \ldots, m_n, a) \in [M]^{\Gamma}_{\mathbf{r}}$ écrivons

$$x_1 : m_1 : \sigma_1, \ldots, x_1 : m_n : \sigma_n \vdash_{\mathbf{r}} M : a : \sigma$$

On peut alors décrire le calcul de la sémantique relationnelle d'un terme par un système de typage.

Contexte sémantique : $\Phi = (x_1 : m_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : m_n : \sigma_n)$ où $m_i \in ![\sigma_i]_{\mathbf{r}}$.

On pose $\underline{\Phi} = (x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n)$.

Types intersection non idempotents pour PCF (système R)

$$\frac{}{x_1 : [\,] : \sigma_1, \ldots, x_n : [\,] : \sigma_n, x : [a] : \sigma \vdash_{\mathbf{r}} x : a : \sigma}$$

$$\frac{k \in \mathbb{N}}{x_1 : [\,] : \sigma_1, \ldots, x_n : [\,] \vdash_{\mathbf{r}} \underline{k} : k : \iota}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : k : \iota}{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} \mathsf{S}(M) : k+1 : \iota}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : 0 : \iota}{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} \mathsf{P}(M) : 0 : \iota} \qquad \frac{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : k+1 : \iota}{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} \mathsf{P}(M) : k : \iota}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : 0 : \iota \qquad \Psi \vdash_{\mathbf{r}} P : a : \sigma \qquad \Gamma \vdash Q : \sigma, \text{ et } \Gamma = \underline{\Phi} = \underline{\Psi}}{\Phi + \Psi \vdash_{\mathbf{r}} \mathrm{If}(M, P, Q) : a : \sigma}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : k+1 : \iota \qquad \Gamma \vdash P : \sigma \qquad \Psi \vdash_{\mathbf{r}} Q : a : \sigma, \text{ et } \Gamma = \underline{\Phi} = \underline{\Psi}}{\Phi + \Psi \vdash_{\mathbf{r}} \mathrm{If}(M, P, Q) : a : \sigma}$$

$$\frac{\Phi, x : m : \sigma \vdash_{\mathbf{r}} M : b : \tau}{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} \lambda x^{\sigma}\, M : (m, b) : \sigma \Rightarrow \tau}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : ([a_1, \ldots, a_n], b) : \sigma \Rightarrow \tau \qquad \forall i \quad \Psi_i \vdash_{\mathbf{r}} N : a_i : \sigma}{\Phi + \sum_{i=1}^{n} \Psi_i \vdash_{\mathbf{r}} M\, N : b : \tau}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : ([a_1, \ldots, a_n], a) : \sigma \Rightarrow \sigma \qquad \forall i \quad \Psi_i \vdash_{\mathbf{r}} \mathrm{Fix}(M) : a_i : \sigma}{\Phi + \sum_{i=1}^{n} \Psi_i \vdash_{\mathbf{r}} \mathrm{Fix}(M) : a : \tau}$$

Pour les deux dernières règles, il faut aussi que $\underline{\Phi} = \underline{\Psi_1} = \cdots = \underline{\Psi_n}$.

PCF avec ressources : des notations pour ces preuves

On présente le calcul avec un système de typage.

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \underline{k} : \iota}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s : \iota \qquad \Gamma \vdash t : \sigma \qquad k \in \mathbb{N}}{\Gamma \vdash (s = k) \cdot t : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash s : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x^{\sigma}\, s : \sigma \Rightarrow \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s : \sigma \Rightarrow \tau \qquad \Gamma \vdash t_1 : \sigma \qquad \cdots \qquad \Gamma \vdash t_1 : \sigma}{\Gamma \vdash \langle s \rangle [t_1, \ldots, t_n] : \tau}$$

On peut aussi former des sommes (ou plus généralement, des combinaisons linéaires) de termes :

$$\frac{\forall i \quad \Gamma \vdash s_i : \sigma}{\Gamma \vdash \sum_i s_i : \sigma}$$

À une dérivation π de $\Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : a : \sigma$, on associe un terme de PCF avec ressources $\pi^\bullet$ tel que $\underline{\Phi} \vdash \pi^\bullet : \sigma$.

Terme avec ressources associé à une dérivation

Si π est

$$\frac{}{x_1 : [] : \sigma_1, \ldots, x_n : [] : \sigma_n, x : [a] : \sigma \vdash_{\mathbf{r}} x : a : \sigma}$$

alors $\pi^\bullet = x$.

Si π est

$$\frac{k \in \mathbb{N}}{x_1 : [] : \sigma_1, \ldots, x_n : [] \vdash_{\mathbf{r}} \underline{k} : k : \iota}$$

alors $\pi^\bullet = \underline{k}$.

Si π est

$$\dfrac{\begin{array}{c}\theta \\ \Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : k : \iota\end{array}}{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} \mathsf{S}(M) : k+1 : \iota}$$

alors $\pi^\bullet = (\theta^\bullet = k) \cdot \underline{k+1}$.

De même pour

$$\dfrac{\begin{array}{c}\theta \\ \Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : 0 : \iota\end{array}}{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} \mathsf{P}(M) : 0 : \iota} \quad \text{et pour} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\theta \\ \Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : k+1 : \iota\end{array}}{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} \mathsf{P}(M) : k : \iota}$$

Si π est

$$\frac{\begin{array}{c}\theta\\ \Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : 0 : \iota\end{array} \qquad \begin{array}{c}\rho\\ \Psi \vdash_{\mathbf{r}} P : a : \sigma\end{array} \qquad \Gamma \vdash Q : \sigma, \text{ et } \Gamma = \underline{\Phi} = \underline{\Psi}}{\Phi + \Psi \vdash_{\mathbf{r}} \mathsf{If}(M, P, Q) : a : \sigma}$$

alors $\pi^\bullet = (\theta^\bullet = \underline{0}) \cdot \rho^\bullet$

Si π est

$$\dfrac{\dfrac{\theta}{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : k+1 : \iota} \qquad \Gamma \vdash P : \sigma \qquad \dfrac{\rho}{\Psi \vdash_{\mathbf{r}} Q : a : \sigma}}{\Phi + \Psi \vdash_{\mathbf{r}} \mathsf{If}(M, P, Q) : a : \sigma}$$

alors $\pi^{\bullet} = (\theta^{\bullet} = \underline{k+1}) \cdot \rho^{\bullet}$

Si π est

$$\dfrac{\begin{array}{c}\theta\\ \Phi, x : m : \sigma \vdash_{\mathbf{r}} M : b : \tau\end{array}}{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} \lambda x^{\sigma}\, M : (m, b) : \sigma \Rightarrow \tau}$$

alors $\pi^{\bullet} = \lambda x^{\sigma}\, \theta^{\bullet}$.

Si π est

$$\dfrac{\overset{\theta}{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : ([a_1, \ldots, a_n], b) : \sigma \Rightarrow \tau} \qquad \forall i \quad \overset{\rho_i}{\Psi_i \vdash_{\mathbf{r}} N : a_i : \sigma}}{\Phi + \sum_{i=1}^{n} \Psi_i \vdash_{\mathbf{r}} M\, N : b : \tau}$$

alors $\pi^\bullet = \langle \theta^\bullet \rangle [{\rho_1}^\bullet, \ldots, {\rho_n}^\bullet]$.

Si π est

$$\dfrac{\overset{\theta}{\Phi \vdash_{\mathbf{r}} M : ([a_1, \ldots, a_n], a) : \sigma \Rightarrow \sigma} \qquad \forall i \quad \overset{\rho_i}{\Psi_i \vdash_{\mathbf{r}} \mathrm{Fix}(M) : a_i : \sigma}}{\Phi + \sum_{i=1}^{n} \Psi_i \vdash_{\mathbf{r}} \mathrm{Fix}(M) : a : \sigma}$$

alors $\pi^\bullet = \langle \theta^\bullet \rangle [{\rho_1}^\bullet, \ldots, {\rho_n}^\bullet]$.

Réduction du calcul avec ressources

Réduction de la forme $s \ \beta_{\mathbf{wh}} \ S$ où S est une somme finie de termes ($= 0$, possiblement).

$\deg_x(s)$ le nombre d'occurrences de x dans s.

Réductions de base

$$\langle \lambda x^\sigma\ s\rangle[t_1, \ldots, t_n] \quad \beta_{\mathbf{wh}} \begin{cases} \sum_{f \in \mathfrak{S}_n} s\left[t_{f(1)}/x_1, \ldots, t_{f(n)}/x_1\right] & \text{si } n = \deg_x(s) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où les x_i sont les occurrences de x.

$$(\underline{k} = k') \cdot s\ \beta_{\mathbf{wh}} \begin{cases} s & \text{si } k = k' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Passage au contexte

$$\frac{s \;\; \beta_{\mathbf{wh}} \;\; S'}{\langle s \rangle \overline{t} \;\; \beta_{\mathbf{wh}} \;\; \sum_{s'} S'_{s'} \, \langle s' \rangle \overline{t}}$$

NB : $S'_{s'} \in \mathbb{N}$ pour chaque terme s', et ces nombres sont presque tous nuls.

Notation : $\overline{t}$ désigne un multi-ensemble $[t_1, \ldots, t_n]$ de termes.

$$\frac{s \;\; \beta_{\mathbf{wh}} \;\; S'}{(s = k) \cdot t \;\; \beta_{\mathbf{wh}} \;\; \sum_{s'} S'_{s'} \, (s' = k) \cdot t}$$

Passage aux sommes

On peut étendre $\beta_{\mathbf{wh}}$ en une relation entre sommes (finies) de termes :

$$\frac{s \;\; \beta_{\mathbf{wh}} \;\; s'}{s + S \;\; \beta_{\mathbf{wh}} \;\; s' + S}$$

La réduction générale β, sans restriction sur les passages au contexte, est confluente.

Normalisation

En utilisant une mesure de la taille des termes, par exemple :

- $|x|_{\mathbf{wh}} = |\underline{k}|_{\mathbf{wh}} = 0$
- $|(s = k) \cdot t|_{\mathbf{wh}} = 1 + |s|_{\mathbf{wh}} + |t|_{\mathbf{wh}}$
- $|\lambda x^{\sigma}\, s|_{\mathbf{wh}} = 1 + |s|_{\mathbf{wh}}$
- $|\langle s\rangle[t_1, \ldots, t_n]|_{\mathbf{wh}} = |s|_{\mathbf{wh}} + \sum_{i=1}^{n} |t_i|_{\mathbf{wh}}$

on vérifie que $\beta_{\mathbf{wh}}$ est normalisante (en fait β est fortement normalisante).

Conséquence : théorème d'adéquation

Supposons $\vdash_{\mathbf{r}} M : k : \iota$.

Soit π une dérivation de $\vdash_{\mathbf{r}} M : k : \iota$.

$\pi^\bullet$ est $\beta_{\mathbf{wh}}$-normalisant et $\pi^\bullet \;\; \beta^*_{\mathbf{wh}} \;\; \underline{k}$.

Donc (en observant que chaque $\beta_{\mathbf{wh}}$-reduction sur les termes avec ressource correspond à une $\beta_{\mathbf{wh}}$-reduction sur M), on en déduit que $M \;\; \beta^*_{\mathbf{wh}} \;\; \underline{k}$.

Intuition différentielle

Supposons $\vdash s : \sigma \Rightarrow \tau$ et imaginons que σ et τ représentent des espaces vectoriels (de dimension infinie en général).

Intuitivement, la dérivée n-ième $s^{(n)}$ de s est une fonction de σ vers l'espace des fonctions n-linéaires symétriques $\sigma^n \to \tau$.

Il faut voir $\langle s\rangle[t_1, \ldots, t_n]$ comme représentant

$$s^{(n)}(0) \cdot (t_1, \ldots, t_n)$$

Cela explique pourquoi l'argument de s est un multi-ensemble (l'ordre ne compte pas).

Développement de Taylor

A partir de cette intuition, on définit le développement de Taylor d'un terme de PCF comme une combinaison linéaire infinie (à coefficients rationnels positifs) de termes avec ressource.

$$
\begin{aligned}
x^\circ &= x \\
\underline{k}^\circ &= \underline{k} \\
\mathsf{S}(M)^\circ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} (M^\circ = k)\cdot \underline{k+1} = \sum_{k\in\mathbb{N},\, s} M^\circ_s\,(s = k)\cdot \underline{k+1} \\
\mathsf{P}(M)^\circ &= (M^\circ = 0)\cdot \underline{0} + \sum_{k\in\mathbb{N}} (M^\circ = k+1)\cdot \underline{k}
\end{aligned}
$$

$$\mathsf{If}(M, P, Q)^\circ = (M^\circ = 0) \cdot P^\circ + \sum_{k \in \mathbb{N}} (M^\circ = k+1) \cdot Q^\circ$$

$$(\lambda x^\sigma\, M)^\circ = \lambda x^\sigma\, M^\circ$$

$$(M\, N)^\circ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle M^\circ \rangle [\underbrace{N^\circ, \ldots, N^\circ}_{n\times}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s, t_1, \ldots, t_n} \frac{M^\circ_s \prod_{i=1}^{n} N^\circ_{t_i}}{n!} \langle s \rangle [t_1, \ldots, t_n]$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fix}(M)^\circ_0 &= 0 \\
\mathrm{Fix}(M)^\circ_{r+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle M^\circ \rangle [\underbrace{\mathrm{Fix}(M)^\circ_r, \dots, \mathrm{Fix}(M)^\circ_r}_{n\times}] \\
\mathrm{Fix}(M)^\circ &= \lim_{r \to \infty} \mathrm{Fix}(M)^\circ_r
\end{aligned}$$

Cohérence sur les termes

$$\frac{}{x \mathrel{\overset{\frown}{\smile}} x} \qquad \frac{}{\underline{k} \mathrel{\overset{\frown}{\smile}} \underline{k}} \qquad \frac{s \mathrel{\overset{\frown}{\smile}} s' \qquad k \neq k'}{(s = k) \cdot t \mathrel{\overset{\frown}{\smile}} (s' = k') \cdot t'}$$

$$\frac{s \mathrel{\overset{\frown}{\smile}} s' \qquad t \mathrel{\overset{\frown}{\smile}} t'}{(s = k) \cdot t \mathrel{\overset{\frown}{\smile}} (s' = k) \cdot t'} \qquad \frac{s \mathrel{\overset{\frown}{\smile}} s'}{\lambda x^\sigma\, s \mathrel{\overset{\frown}{\smile}} \lambda x^\sigma\, s'}$$

$$\frac{s \mathrel{\overset{\frown}{\smile}} s' \qquad \forall i, j \in \{1, \dots, l, \dots, n\} \quad t_i \mathrel{\overset{\frown}{\smile}} t_j}{\langle s \rangle [t_i \mid i = 1, \dots, l] \mathrel{\overset{\frown}{\smile}} \langle s' \rangle [t_i \mid i = l+1, \dots, n]}$$

$$\exists M \;\; M_s^\circ \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \mathrel{\overset{\frown}{\smile}} s$$

Cohérence et réduction de tête faible

Théorème

Si $s \frown s'$ *et* $s \ \beta_{\mathbf{wh}} \ S$, $s' \ \beta_{\mathbf{wh}} \ S'$, $S_t \neq 0$ *et* $S'_{t'} \neq 0$, *alors*

- $t \frown t'$
- $t = t' \implies s = s'$

En particulier, si $M \ \beta^*_{\mathbf{wh}} \ \underline{k}$, il existe au plus un t tel que $M^\circ_t \neq 0$ et $\mathsf{NF}(t) \neq 0$.

On sait par ailleurs qu'il existe un tel t ($\pi^\bullet$ où π est une dérivation de $\vdash_{\mathbf{r}} M : k : \iota$).

Cet unique t est une "trace" de l'exécution de M dans la Machine de Krivine, par exemple $|t|_{\mathbf{wh}}$ est le nombre d'étapes de la réduction $M \ \beta^*_{\mathbf{wh}} \ \underline{k}$.

Si on compte aussi la taille des multi-ensembles dans les applications, on obtient le nombre d'étapes dans la MdK.

Du quantitatif au qualitatif

Le modèle **Rel** est quantitatif au sens où par exemple les deux termes

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \lambda x^\iota \, \mathsf{If}(x, \underline{0}, \Omega_\iota) \\
M_2 &= \lambda x^\iota \, \mathsf{If}(x, \mathsf{If}(x, \underline{0}, \Omega_\iota), \Omega_\iota)
\end{aligned}
$$

ont des interprétations différentes :

$$
\begin{aligned}
[M_1]_{\mathbf{r}} &= \{([0], 0)\} \\
[M_2]_{\mathbf{r}} &= \{([0, 0], 0)\}
\end{aligned}
$$

$\Omega_\sigma = \mathsf{Fix}(\lambda x^\sigma \, x)$ est un terme divergent de type σ, en particulier $[\Omega_\sigma]_{\mathbf{r}} = \emptyset$.

Sémantique de Scott

Dans la sémantique de Scott, M_1 et M_2 ont la même interprétation.

Le principe est simple : on oublie les multiplicités dans les multi-ensembles (ou on les remplace par des ensembles finis).

Pour cela, on munit les ensembles d'une relation de préordre : une simple relation d'équivalence ne suffit pas.

La catégorie des préordres

On définit une catégorie **Pol**

- objets : les $U = (|U|, \leq_U)$ où $|U|$ est un ensemble et $\leq_U$ est une relation de préordre sur $|U|$
- **Pol**(U, V) est l'ensemble des fonctions $f : \mathcal{I}(U) \to \mathcal{I}(V)$ qui préservent toutes les unions.

$\mathcal{I}(U)$ est l'ensemble des segments initiaux de U :

$u \in \mathcal{I}(U)$ si $u \subseteq |U|$ et si $a \in u$ et $b \leq_U a$ alors $b \in u$.

C'est un treillis complet.

On voit que $\mathbf{Pol}(U, V) \simeq \mathcal{I}(U^{\mathrm{op}} \times V)$: à $f \in \mathbf{Pol}(U, V)$, on associe

$$\{(a, b) \mid b \in f(\downarrow a)\}$$

et cela définit un isomorphisme (les fonctions étant ordonnées par l'ordre ponctuel).

C'est un modèle de LL.

En particulier, $U \multimap V = (|U| \times |V|, \leq_{U \multimap V})$ avec

$$(a, b) \leq_{U \multimap V} (a', b') \quad \text{ssi} \quad a' \leq_U a \text{ et } b \leq_V b'$$

Exponentielle qualitative

$!U = (\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|U|), \leq)$ où $m \leq p$ si

$$\forall a \in \mathrm{Supp}(m)\, \exists b \in \mathrm{Supp}(p) \quad a \leq_U b$$

En particulier, si $\mathrm{Supp}(m) = \mathrm{Supp}(p)$ alors m et p sont équivalents pour ce préordre.

Si $f \in \mathbf{Pol}(U, V)$ alors

$$
\begin{aligned}
!f = \{(m, p) \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|U|) \times \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|V|) \mid \\
\forall b \in \mathsf{Supp}(p)\, \exists a \in \mathsf{Supp}(m)\ (a, b) \in f\} \\
\in \mathbf{Pol}(!U, !V)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^U &= \{(m, a) \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|U|) \times |V| \mid \exists b \in \mathsf{Supp}(m) \quad a \leq_U b)\} \\
&\in \mathbf{Pol}(!U, U) \\
\mathrm{p}^U &= \{(m, [m_1, \dots, m_n]) \mid m, m_i \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|U|) \\
&\qquad \text{et } m_1 + \dots + m_n \leq_{!U} m\} \in \mathbf{Pol}(!U, !!U)
\end{aligned}
$$

Une comonade permettant d'interpréter LL.

La catégorie de Kleisli induite

La catégorie cartésienne fermée induite (qui est aussi un modèle de PCF) est définie par :

- objets : les préordres
- morphismes : $\mathbf{Pol}_!(U, V) = \mathbf{Pol}(!U, V)$

Fait

$\mathbf{Pol}_!(U, V)$, *ordonné par l'inclusion, est isomorphe à l'ensemble des fonctions Scott-continues* $\mathcal{I}(U) \to \mathcal{I}(V)$ *ordonné par l'ordre ponctuel.*

On retrouve (une sous-CCC pleine d') un modèle connu depuis les années 60, mais pas comme modèle de LL évidemment.

Sémantique de Scott comme typage avec intersections

A chaque type on associe un préordre

- $[\iota]_{\mathbf{s}} = (\mathbb{N}, =)$ (préordre discret)
- $[\sigma \Rightarrow \tau]_{\mathbf{s}} = ![\sigma]_{\mathbf{s}} \multimap [\tau]_{\mathbf{s}}$

Par conséquent $|[\sigma]_{\mathbf{s}}| = [\sigma]_{\mathbf{r}}$ pour tout type σ.

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ avec $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n)$, alors

$$[M]_{\mathbf{s}}^{\Gamma} \in \mathbf{Pol}(![\sigma_1]_{\mathbf{s}} \otimes \cdots \otimes ![\sigma_n]_{\mathbf{s}}, [\sigma]_{\mathbf{s}})$$

$(m_1, \ldots, m_n, a) \in [M]_{\mathsf{s}}^{\Gamma}$ si et seulement si

$$x_1 : m_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : m_n : \sigma_n \vdash_{\mathsf{s}} M : a : \sigma$$

est provable dans le système suivant.

$$\frac{\exists b \in \mathsf{Supp}(m) \quad a \leq_{[\sigma]_{\mathsf{s}}} b}{\Phi, x : m : \sigma \vdash_{\mathsf{s}} x : a : \sigma}$$

$$\frac{k \in \mathbb{N}}{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} \underline{k} : k : \iota} \qquad \frac{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} M : k : \iota}{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} \mathsf{S}(M) : k+1 : \iota}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} M : 0 : \iota}{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} \mathsf{P}(M) : 0 : \iota} \qquad \frac{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} M : k+1 : \iota}{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} \mathsf{P}(M) : k : \iota}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} M : 0 : \iota \qquad \Phi \vdash_{\mathsf{s}} P : a : \sigma \qquad \Gamma \vdash Q : \sigma, \text{ et } \Gamma = \underline{\Phi}}{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} \mathsf{If}(M, P, Q) : a : \sigma}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} M : k+1 : \iota \qquad \Gamma \vdash P : \sigma \qquad \Phi \vdash_{\mathsf{s}} Q : a : \sigma, \text{ et } \Gamma = \underline{\Phi}}{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} \mathsf{If}(M, P, Q) : a : \sigma}$$

$$\frac{\Phi, x : m : \sigma \vdash_{\mathsf{s}} M : b : \tau}{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} \lambda x^{\sigma}\, M : (m, b) : \sigma \Rightarrow \tau}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} M : ([a_1, \ldots, a_n], b) : \sigma \Rightarrow \tau \qquad \forall i \quad \Phi \vdash_{\mathsf{s}} N : a_i : \sigma}{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} M\, N : b : \tau}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} M : ([a_1, \ldots, a_n], a) : \sigma \Rightarrow \sigma \qquad \forall i \quad \Phi \vdash_{\mathsf{s}} \mathrm{Fix}(M) : a_i : \sigma}{\Phi \vdash_{\mathsf{s}} \mathrm{Fix}(M) : a : \tau}$$

Lien entre quantitatif et qualitatif

Si $\vdash_{\mathsf{s}} M : a : \sigma$ et $b \leq_{[\sigma]_{\mathsf{s}}} a$ alors $\vdash_{\mathsf{s}} M : b : \sigma$. C'est juste une autre façon de dire que $[M]_{\mathsf{s}} \in \mathcal{I}([\sigma]_{\mathsf{s}})$.

C'est vrai en particulier si $a \sim b$ ($a \leq b$ et $b \leq a$), autrement dit, si a et b ne diffèrent que par les multiplicités dans les multi-ensembles qui y figurent.

Il est facile de voir que $\vdash_{\mathsf{r}} M : a : \sigma \Rightarrow \vdash_{\mathsf{s}} M : a : \sigma$.

La réciproque est fausse.

Par exemple, pour

$$M_2 = \lambda x^\iota \operatorname{If}(x, \operatorname{If}(x, \underline{0}, \Omega_\iota), \Omega_\iota)$$

on a $\vdash_{\mathbf{s}} M_2 : ([0], 0) : \iota \Rightarrow \iota$ mais on n'a pas $\vdash_{\mathbf{r}} M_2 : ([0], 0) : \iota \Rightarrow \iota$.

Théorème

Si $\vdash_{\mathbf{s}} M : a : \sigma$ alors il existe $b \geq_{[\sigma]_{\mathbf{s}}} a$ tel que $\vdash_{\mathbf{r}} M : b : \sigma$.

Il y a un énoncé plus général pour le cas où M n'est pas clos.

Pourquoi ce n'est pas trivial

On essaie de le prouver par récurrence sur la dérivation de $\vdash_{\mathsf{s}} M : a : \sigma$.

Supposons que $M = P\,Q$. La dérivation de $\vdash_{\mathsf{s}} M : a : \sigma$ se termine disons par

$$\frac{\vdash_{\mathsf{s}} P : ([b_1, \ldots, b_n], a) : \tau \Rightarrow \sigma \qquad \forall i \quad \vdash_{\mathsf{s}} Q : b_i : \sigma}{\vdash_{\mathsf{s}} P\,Q : a : \sigma}$$

Par hypothèse de récurrence, on peut trouver :

- $m \leq_{![\tau]_{\mathbf{s}}} [b_1, \ldots, b_n]$ et $a' \geq_{[\sigma]_{\mathbf{s}}} a$ tels que $\vdash_{\mathbf{r}} P : (m, a') : \tau \Rightarrow \sigma$
- ainsi que $b'_1, \ldots, b'_n$ tels que $\forall i \ \vdash_{\mathbf{r}} Q : b'_i : \sigma$ et $b'_i \geq_{[\tau]_{\mathbf{s}}} b_i$.

On a bien trouvé $a' \geq_{[\sigma]_{\mathbf{s}}} a$ mais rien ne dit qu'on peut prendre $m = [b'_1, \ldots, b'_n]$ et donc on ne peut pas conclure que $\vdash_{\mathbf{r}} P\, Q : a' : \sigma$.

Solution : une nouvelle dualité dans **Rel**

Soit U un préordre. Soient $u, u' \subseteq |U|$.

On dit que $u \perp u'$ si $(\downarrow u) \cap u' \neq \emptyset \Rightarrow u \cap u' \neq \emptyset$.

Si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(|U|)$ on pose

$$\mathcal{D}^{\perp} = \{u' \subseteq |U| \mid \forall u \in \mathcal{D} \quad u \perp u'\}$$

et on a comme d'habitude dans ce genre de situation :

- $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^{\perp\perp}$
- $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}^{\perp} \subseteq \mathcal{D}^{\perp}$

et donc $\mathcal{D}^{\perp\perp\perp} = \mathcal{D}^{\perp}$.

Préordres avec projection

On construit un nouveau modèle de LL, une catégorie "linéaire" **PP**.

Objets : les couples $E = (\langle E \rangle, \mathrm{D}(E))$ où $\langle E \rangle$ est un préordre et $\mathrm{D}(E) \subseteq \mathcal{P}(|\langle E \rangle|)$ vérifie $\mathrm{D}(E)^{\perp\perp} = \mathrm{D}(E)$.

Morphismes : on commence par définir un préordre avec projection $E \multimap F$.

- $\langle E \multimap F \rangle = \langle E \rangle \multimap \langle F \rangle$
- $\mathrm{D}(E \multimap F) = \{u \times v' \mid u \in \mathrm{D}(E) \text{ et } v' \in \mathrm{D}(F)^{\perp}\}^{\perp}$

Autrement dit, $t \subseteq |\langle E \rangle| \times |\langle F \rangle|$ est dans $\mathrm{D}(E \multimap F)$ si pour tout $u \in \mathrm{D}(E)$ et tout $v' \in \mathrm{D}(F)$

$$(\downarrow_U u \times \uparrow_V v') \cap t \neq \emptyset \Rightarrow (u \times v') \cap t \neq \emptyset$$

On définit alors $\mathbf{PP}(E, F) = \mathrm{D}(E \multimap F)$.

Identité en E : $\{(a, a) \mid a \in |\langle E \rangle|\}$

Composition relationnelle. Pourquoi cela marche-t-il ?

Théorème

$t \subseteq |\langle E \rangle| \times |\langle F \rangle|$ est dans $\mathrm{D}(E \multimap F)$ ssi pour tout $u \in \mathrm{D}(E)$

- $t\,u \in \mathrm{D}(F) \quad (t\,u = \{b \mid \exists a \in u\ (a, b) \in t\})$
- $\downarrow_{\langle E \rangle \multimap \langle F \rangle} t \downarrow_{\langle E \rangle} u = \downarrow_{\langle F \rangle} (t\,u)$

Exponentielle :

- $\langle !E \rangle = !\langle E \rangle$
- $\mathrm{D}(!E) = \{\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(u) \mid u \in \mathrm{D}(E)\}^{\perp\perp}$

Ça marche parce qu'on a

Théorème

$t \subseteq |\langle !E \rangle| \times |\langle F \rangle|$ est dans $\mathrm{D}(!E \multimap F)$ ssi pour tout $u \in \mathrm{D}(E)$

- $t(u) \in \mathrm{D}(F) \quad (t(u) = t\,\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(u))$
- $\downarrow_{\langle !E \rangle \multimap \langle F \rangle} t(\downarrow_{\langle E \rangle} u) = \downarrow_{\langle F \rangle}(t(u))$

$t(u)$ est l'application d'une morphisme t à un point u dans la catégorie $\mathbf{Rel}_!$.

C'est un modèle de LL et de PCF.

- $[\iota]_{\mathbf{p}} = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers avec le préordre discret
- $[\sigma \Rightarrow \tau]_{\mathbf{p}} = ![\sigma]_{\mathbf{p}} \multimap [\tau]_{\mathbf{p}}$

en sorte que

- $\langle [\sigma]_{\mathbf{p}} \rangle = [\sigma]_{\mathbf{s}}$
- $|\langle [\sigma]_{\mathbf{p}} \rangle| = [\sigma]_{\mathbf{r}}$

Dans ce modèle, l'interprétation des termes *est la même* que dans **Rel**.

Alors pourquoi cette construction compliquée ?

Parce qu'on a appris quelque chose sur l'interprétation relationnelle !

Théorème

Soit M clos tel que $\vdash M : \sigma$.

- $[M]_{\mathbf{r}} \in \mathrm{D}([\sigma]_{\mathbf{p}})$ *(puisque* **PP** *est un modèle de PCF)*
- $[M]_{\mathbf{s}} = \downarrow_{[\sigma]_{\mathbf{s}}} [M]_{\mathbf{r}}$ *(on a tout fait pour)*

Donc si $\vdash_{\mathbf{s}} M : a : \sigma$ il existe $a' \geq_{[\sigma]_{\mathbf{s}}} a$ tel que $\vdash_{\mathbf{r}} M : a' : \sigma$.

C'est exactement ce qu'on voulait.

Exemple de conséquence

Soit M tel que $\vdash M : \iota$ et supposons $[M]_{\mathbf{s}} \neq \emptyset$.

Soit donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $\vdash_{\mathbf{s}} M : k : \iota$.

On sait qu'il existe $k' \geq k$ tel que $\vdash_{\mathbf{r}} M : k' : \iota$. Or le préordre sur $\mathbb{N}$ est le préordre discret, donc on a $k' = k$.

Il s'en suit que $M \ \beta^*_{\mathbf{wh}} \ \underline{k}$.

Pour la sémantique de Scott, c'est un résultat qui se démontre habituellement par relations logiques.

Intérêt de l'approche par construction de modèle : elle est extrêmement modulaire et versatile.

- Types récursifs
- Calculs purs
- Calculs classiques
- Autres stratégies de réduction (CBV).

Et bien sûr elle donne une très bonne compréhension de la situation.

Par exemple, la construction de **PP** permet de montrer que $\mathbf{Pol}_!$ est le *collapse extensionnel* de $\mathbf{Rel}_!$.