Université Paris 7 - Denis Diderot
UFR d'informatique

Quantification du second ordre en sémantique des jeux Application aux isomorphismes de types

Thèse de doctorat
Spécialité Informatique

Joachim de Lataillade

Thèse supervisée par

Pierre-Louis CURIEN
Olivier LAURENT

Soutenue publiquement le 21 novembre 2007

Jury

Roberto	DI COSMO	*Président*
Pierre-Louis	CURIEN	*Directeur de thèse*
Olivier	LAURENT	*Co-directeur de thèse*
Philip	SCOTT	
Samson	ABRAMSKY	*Rapporteur*
Marcelo	FIORE	*Rapporteur*

À ma famille,
Qu'elle continue à s'élargir avec bonheur

À Krishnouille

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Olivier Laurent, qui a encadré cette thèse avec beaucoup de patience et d'intelligence. C'est lui qui m'a fait découvrir l'univers de la recherche, me laissant gagner progressivement mon autonomie tout en m'apportant un soutien sans faille, d'une terrible efficacité, dans les moments où j'en avais le plus besoin. Je n'oublierai pas sa confiance et ses conseils précieux.

Merci à Pierre-Louis Curien, d'abord pour avoir accepté d'être le directeur officiel de cette thèse, mais surtout pour sa présence et sa disponibilité, pour parler de science comme de sujets plus divers. Sa personnalité ouverte et chaleureuse y sont à mon avis pour beaucoup dans la réussite du laboratoire PPS.

Merci à Samson Abramsky pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse, ainsi que pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir sur le sujet de ce mémoire et pour m'avoir accueilli à Oxford à deux reprises, pour des séjours qui m'ont été très profitables.

Merci à Marcelo Fiore pour avoir accepté de mettre son expertise au service de la lecture de ce mémoire dont il a bien voulu être rapporteur.

Philip Scott est mon principal encadrant à Ottawa. Je le remercie beaucoup de m'avoir offert cette opportunité de venir travailler au sein du LFC, pour les nombreux services qu'il m'a rendus, et pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Merci à Roberto Di Cosmo d'avoir accepté de présider ce jury de thèse : lui qui m'a vu découvrir dès mon année de DEA un sujet qu'il connaît bien m'a toujours témoigné une confiance que j'ai beaucoup appréciée.

Je remercie toute l'équipe de PPS pour son dynamisme et sa gentillesse. Les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec ses membres m'ont énormément apporté sur le plan scientifique : je pense tout particulièrement à Paul-André Mélliès, mais aussi à Vincent Balat, Giuseppe Castagna, Juliusz Chroboczek, Russ Harmer, Delia Kesner, Jean-Louis Krivine et Alexandre Miquel. Merci aussi à Jean-Marie Rifflet, directeur de l'UFR, pour son aide et sa disponibilité dans le cadre de mon monitorat.

Merci aux thésards de PPS et du LIAFA pour l'ambiance qu'ils apportent aux deux laboratoires. Des mots croisés aux discussions scientifiques, ces trois années leur doivent beaucoup de bonne humeur. Merci donc à François, Benjamin, Raphaël, Emmanuel, Michel, Anne-Gwenn, Samuel H, Fabien, Stéphane, Pierre M, Caroline, Sylvain, Marie, Samuel M, Nicolas, Grégoire, Pierre C, Séverine, Christine, Mehdi et tous les autres. Puissent le rap et l'esprit Cérisy couler encore longtemps dans les veines de PPS.

Merci à Odile Ainardi pour son efficacité et son soutien permanent, elle est une chance pour PPS. Merci aussi à Noëlle Delgado et à Michelle Wasse pour leur aide et leur patience.

Cette thèse a aussi beaucoup profité de discussions avec des chercheurs extérieurs au laboratoire, au premier rang desquels Dominic Hughes et Andrzej Murawski. Merci aussi à Bob Coecke, Martin Hyland, Luke Ong et Glynn Winskel.

Bien qu'étrangère au monde de la recherche, ma famille m'a aidé et soutenu tout au long de ces trois années. Je lui en suis très reconnaissant et lui témoigne toute mon affection.

Mes amis ont aussi été d'une importance immense sur le plan personnel : merci donc aux Rémis qui n'ont pas lésiné sur les points trip, merci aux anciens de Saint-Jean et à ceux de Normale, merci aux gros lourds du CEA, aux socios, aux théâtreux, et à tous ceux que j'oublie.

Merci enfin à Sabine pour m'avoir supporté aussi vaillamment, particulièrement lors des moments les plus difficiles de ma rédaction de thèse, où elle m'a ébloui par sa confiance et sa patience.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La sémantique, à quoi ça sert ? Cette question - légitime - est tellement récurrente chez les néophytes qu'elle finit parfois par lasser des chercheurs plus passionnés par ce qu'ils découvrent que par les applications que l'on peut en tirer. Heureusement pour eux, la sémantique a largement fait la preuve de ses apports concrets en informatique : elle a permis d'inventer de nouveaux langages, de nouvelles logiques et même de nouveaux paradigmes de calcul, de développer des techniques de vérification efficaces et originales, de donner des outils formels pour raisonner sur des langages complexes, et finalement de mieux comprendre les mécanismes à la base de la programmation.

Mais l'ambition originelle de la sémantique était d'apporter des outils mathématiques pour raisonner sur les programmes. L'approche est élégante : à partir d'une interprétation des programmes, fournir par des raisonnements mathématiques des preuves de résultats portant sur la syntaxe. Dans cette thèse, partant d'un travail d'Olivier Laurent [Lau05] on va renouer avec cette vision des choses : plus précisément, on va construire des modèles de jeux pour les différentes formulations du système F, et utiliser ces modèles pour caractériser les isomorphismes de types dans ces différentes variantes.

Système F. La correspondance de Curry-Howard est une relation centrale en théorie des langages de programmation, qui lie de façon bijective les *preuves mathématiques* aux *programmes informatiques*. Initialement inventée pour relier le λ-calcul simplement typé à la logique minimale, cette correspondance a été très largement exploitée par la suite, que ce soit pour y incorporer d'autres mécanismes logiques ou informatiques [Par92, Rey97, Mil84] ou pour donner naissance à de nouveaux paradigmes de calcul [ML84].

Le système F, inventé simultanément par John Reynolds [Rey74] et Jean-Yves Girard [Gir72], consiste à étendre cette correspondance à la quantification du second ordre, c'est-à-dire la quantification (logique) sur les propositions. Le versant informatique de cette quantification correspond précisément à un mécanisme central : le *polymorphisme*. Ce terme désigne la capacité d'une fonction à être de plusieurs types à la fois : ainsi, si on considère la fonction `append` qui ajoute un élément à une liste, cette fonction est de type

$$\texttt{append} : \forall X.X \times X^\star \to X^\star$$

où $X^\star$ est le type des listes d'éléments de type X. Cela peut signifier deux choses :

- soit que cette fonction *peut être instanciée* de type $B \times B^\star \to B^\star$ pour tout type B
- soit qu'elle *est* elle-même de type $B \times B^\star \to B^\star$ pour tout B.

Ces deux options constituent les deux principaux paradigmes d'expression du système F : le système F *à la Church* dans le premier cas, le système F *à la Curry* dans le second cas. Dans cette thèse, on se penchera sur chacun de ces deux paradigmes, ainsi que sur l'extension vers la logique classique du système F à la Church.

Une propriété intrigante du système F saute immédiatement aux yeux : étant donné un programme (ou *terme*) t de type $\forall X.A$, il est possible d'instancier la variable X de ce terme avec n'importe quel type, y compris le type $\forall X.A$ lui-même. Pour peu que X apparaisse au moins une fois dans A, il n'y aura alors pas de décroissance du type le long de l'instantiation, et on peut même se retrouver avec le type dont on est parti ! Cette propriété est appelée *imprédicativité*. Elle pose des difficultés au niveau des langages de programmation, car elle rend le typage d'un terme indécidable ; en pratique, les langages polymorphes doivent souvent se restreindre à une version prédicative du polymorphisme. L'imprédicativité est aussi un obstacle à surmonter au moment de la construction de modèles de ce calcul, car on doit être capable de quantifier sur tous les types, ce qui requiert de la “place” dans le modèle. Ainsi, Reynolds a montré dans [Rey84] qu'il ne peut exister de modèle du système F basé sur la catégorie des ensembles et fonctions.

Les premiers modèles du système F [Gir72] apparaissent dès la preuve de sa normalisation et sont basés sur la réalisabilité. Girard a aussi développé des modèles plus explicites, surmontant les pièges de l'imprédicativité via les *domaines qualitatifs* [Gir86]. Par la suite, Seely [See87] et Pitts [Pit88] ont donné une interprétation catégorique des modèles du système F, à partir de la notion d'hyperdoctrine due à Lawvere [Law70].

Isomorphismes de types. La motivation première de cette thèse, et son principal apport, est l'utilisation d'un modèle du système F pour caractériser les *isomorphismes de types* au second ordre.

Un isomorphisme de type dans un langage de programmation est une relation d'équivalence, donnée par la syntaxe, entre les types de ce langage. Elle dit la chose suivante : lorsque deux types A et B sont isomorphes, alors tout terme de type A a le même contenu calculatoire qu'un terme de type B, et réciproquement.

Caractériser les isomorphismes de types est un problème simple à formuler, mais qui peut se révéler délicat à résoudre. Ainsi, dans le cas du système F à la Church, le système équationnel qui caractérise les isomorphismes de types ne contient que des équations auxquelles on pouvait facilement s'attendre ; pour autant, la preuve de la complétude de ce système (c'est-à-dire la preuve qu'il n'y a pas d'autre équation à ajouter) fournie par Roberto Di Cosmo [DC95] est loin d'être élémentaire.

Cette thèse propose d'aborder cette question, dans le cas du polymorphisme, à travers le prisme de la sémantique. Les preuves n'en seront pas plus simples, mais plus géométriques et plus faciles à étendre à de nouveaux langages. En particulier, on montrera pour chaque langage étudié que l'existence d'un isomorphisme se ramène à une invariance géométrique.

Sémantique des jeux. La sémantique utilisée pour montrer ces résultats se doit d'être proche de la syntaxe et accessible aux calculs. Comme dans [Lau05], c'est bien évidemment vers la *sémantique des jeux* que l'on va se tourner, car elle remplit parfaitement ce cahier des charges.

La sémantique des jeux est basée sur l'opposition entre deux adversaires de toujours, **P** et **O**, qui s'échangent des *coups* sur une *arène*. Ces deux sigles proviennent des dénominations anglo-saxonnes *Player* et *Opponent*, mais je préfère y voir une réminiscence de l'opposition post-troyenne entre **Oreste** et **Pyrrhus** dont témoignent ces vers de Racine[1] :

> *[...] Quoi ? Pyrrhus, je te rencontre encore ?*
> *Trouverai-je partout un rival que j'abhorre ?*
> *Percé de tant de coups, comment t'es-tu sauvé ?*
> *Tiens, tiens ! Voilà le coup que je t'ai réservé !*

On se contentera sobrement dans cette thèse de désigner **O** par *Opposant* et **P** par *Joueur*. Intuitivement, le Joueur représente le programme en train de s'exécuter, tandis que l'Opposant est l'environnement de ce programme (par exemple les valeurs de ses paramètres) : on s'intéresse donc à la *stratégie* suivie par Joueur, c'est-à-dire aux coups qu'il joue en réponse aux coups joués par Opposant. Arènes et stratégies sont respectivement les objets et les morphismes d'un modèle de jeu, et interprètent donc respectivement les types et les termes du langage.

Le mécanisme fondamental de la sémantique des jeux, dû à Abramsky et Jagadeesan [AJ94], est l'*interaction* entre stratégies : partant de deux stratégies ayant une partie de leur arène en commun, on en génère une nouvelle en considérant que, sur l'arène commune, l'une des stratégies agit comme le Joueur, et l'autre stratégie comme l'Opposant. Au niveau de la syntaxe, cela revient à fournir un terme en argument d'un autre terme et à considérer le résultat de cette application.

Autour de la notion dynamique d'interaction, la sémantique des jeux s'est construite comme un modèle élégant, géométrique et robuste (beaucoup de variations dans la syntaxe peuvent être intégrées dans la sémantique). Elle est capable d'interpréter beaucoup de langages avec une grande précision, mais aussi de fournir des outils pour une approche nouvelle de la vérification de programmes, la *sémantique des jeux algorithmique* [Abr01].

Jeux et système F. Grâce à l'interprétation des types sous forme d'arènes, qui sont généralement de simples ordres partiels, la sémantique des jeux n'est pas mise en difficulté par la propriété d'imprédicativité.

Une première modélisation du polymorphisme dans les jeux a été donnée par Samson Abramsky dans [Abr97]. Y figure déjà la notion d'*uniformité*, qui sera très largement reprise par la suite.

[1] Si l'on en croit la teneur de ses vers, on peut penser que Pyrrhus est en train de jouer la stratégie point fixe, particulièrement frustrante pour Oreste car elle consiste à rejouer sans arrêt le même coup...

Dominic Hughes a formulé dans sa thèse [Hug00] un modèle de jeux du système F (à la Church) dont il a prouvé qu'il était *complet*, c'est-à-dire en bijection avec la syntaxe. Cependant, l'algorithme d'interaction entre stratégies est assez complexe à définir dans ce modèle, or il joue un rôle central dans le travail qu'on va présenter dans ce mémoire ; c'est pourquoi on réutilisera surtout du travail de Hughes la notion d'*hyperforêts*, structure arborescente utilisée pour interpréter les types.

Andrzej Murawski et Luke Ong ont aussi proposé un modèle du second ordre [MO01], afin d'interpréter la logique linéaire affine du second ordre. Ils y introduisent la notion de *jeu évolutif* : l'idée de base est qu'un coup de type $\forall X.A$ se décompose en la donnée d'un type B suivi d'un coup dans $A[B/X]$.

Samson Abramsky et Radha Jagadesaan ont conçu un modèle très différent [AJ03], dans l'esprit des jeux AJM. Les coups y sont d'abord construits de façon très générale, en tenant à peine compte des quantificateurs du second ordre, puis des conditions supplémentaires sont imposées aux stratégies. Les spécificités de ce modèle s'expliquent en partie par le fait qu'il ait été conçu pour aborder la *généricité* : dans un langage polymorphe, un type T est dit générique si, dès que $u\{T\} = t\{T\}$ pour u et t de type $\forall X.A$, alors $u = t$. Le travail d'Abramsky et Jagadesaan fournit un exemple de modèle avec de nombreux types génériques.

Enfin, Juliusz Chroboczek a construit un modèle de jeux du sous-typage [Chr03] au sein duquel la quantification du second ordre est interprétée par une borne inférieure. Chroboczek définit par ailleurs une sémantique des jeux pour le λ-calcul non typé, qui sera réutilisée au moment où on étudiera le système F à la Curry.

C'est donc à partir de ces différents travaux qu'est construit le modèle du polymorphisme présenté dans ce mémoire, et qui se veut plus souple et mieux adapté aux calculs explicites.

Présentation du modèle. Il est courant, lorsqu'on définit un modèle du système F, d'interpréter la quantification du second ordre comme une intersection, ou une borne inférieure comme dans le travail de Chroboczek :

$$\forall X.A = \bigwedge_{B \in \mathcal{G}} A[B/X]$$

où $\mathcal{G}$ est l'ensemble des arènes. Cependant, dans l'esprit de cette thèse qui est de cerner au plus près le fonctionnement de la syntaxe, ce choix ne nous convient pas car il accorde trop de liberté au comportement de Joueur[2].

Ainsi, même lorsqu'on traitera le système F à la Curry, pour lequel l'interprétation par une intersection est usuelle, on préférera voir la quantification comme un produit généralisé :

$$\forall X.A = \prod_{B \in \mathcal{G}} A[B/X]$$

[2] Par exemple, dans l'arène $(\forall X.X) \to \bot$, il n'y a aucune restriction imposée à Joueur, alors que dans la syntaxe à la Church, un terme de ce type instancie nécessairement le quantificateur $\forall X$, et selon l'instantiation **O** sera éventuellement capable de répondre.

En pratique, cela signifie qu'un coup dans $\forall X.A$ correspondra, comme chez Murawski et Ong, à la donnée d'un type B suivi d'un coup dans $A[B/X]$.

Mais cette description se révélera elle aussi trop libérale par rapport à la syntaxe : plus précisément, elle décrit bien le comportement de Joueur, mais mal celui d'Opposant. On devra donc imposer une condition d'*uniformité* pour retrouver des stratégies au comportement plus proche de celui de la syntaxe.

Le principal apport conceptuel de cette thèse concernant le modèle lui-même est de relier la description des coups, basée sur l'idée de Murawski et Ong donnée ci-dessus, avec une description directe des formules basée sur le modèle d'Abramsky et Jagadesaan. Cette correspondance permettra d'une part de travailler plus aisément sur les coups que dans les autres modèles, d'autre part de les relier à l'hyperforêt de Hughes correspondant à la formule. Or c'est justement à partir de cette structure d'hyperforêt que l'on travaillera sur notre modèle et en tirer nos résultats sur les isomorphismes de types.

Applications. La sémantique des jeux va donc être utilisée pour caractériser les isomorphismes de types dans différents calculs polymorphes. La démarche adoptée est la suivante : un isomorphisme de la syntaxe nous génère un isomorphisme dans le modèle, dont on prouve qu'il peut être caractérisé géométriquement. Il reste alors à traduire syntaxiquement cette caractérisation géométrique pour obtenir notre résultat sur les isomorphismes de types.

On va tout d'abord appliquer cette idée au système F à la Church : le modèle est construit à partir des concepts décrits ci-dessus, et la preuve de caractérisation consiste à montrer que les hyperforêts de Hughes sont les invariants géométriques des isomorphismes. On retrouvera alors les résultats de Di Cosmo [DC95].

On s'intéresse ensuite au système F à la Curry. Pour cela, on ne va pas construire de nouveau modèle, mais utiliser la sémantique de Chroboczek pour le λ-calcul non typé, et la relier à notre modèle à la Church, pour obtenir une interprétation des termes à la Curry. Cette interprétation nous suffira à trouver une caractérisation des isomorphismes sous forme d'invariants géométriques, là encore via les hyperforêts. La caractérisation syntaxique correspondante est un enrichissement des équations de Di Cosmo par une nouvelle équation, inédite et non-triviale :

$$\forall X.A \simeq_{Cu} A[\forall Y.Y/X] \qquad \text{si } X \notin Neg_A$$

où Neg_A est l'ensemble des variables apparaissant au niveau d'une occurrence négative de A (c'est-à-dire au niveau d'un coup de Joueur).

Enfin, on va s'intéresser à une extension du système F à la Church vers la logique classique. En effet, le système F tel qu'on la présenté jusqu'ici était *intuitionniste*, c'est-à-dire que la logique à laquelle il correspond n'accepte pas la règle du tiers-exclu[3] $A \vee (\neg A)$. Pour réintroduire cette règle syntaxiquement, on s'inspirera de l'extension classique usuelle du λ-calcul, le $\lambda\mu$-calcul, pour obtenir un nouveau calcul polymorphe qu'on appellera

[3]Supprimer cet axiome permet d'obtenir une logique *constructive* : par exemple, une preuve de $A \vee B$ fournit une preuve de A ou une preuve de B.

$\lambda\mu 2$. Au niveau du modèle, on va là encore utiliser des techniques connues pour introduire une disjonction classique dans les jeux. La caractérisation des isomorphismes dans le modèle s'effectuera de façon très similaire à celle des isomorphismes à la Church, et nous donnera une caractérisation syntaxique cette fois-ci sans surprise.

Plan de la thèse. Le prochain chapitre est un rappel sur le système F, ses différentes syntaxes et ses modèles, mais permet aussi de fixer la syntaxe du langage $\lambda\mu 2$, extension classique du système F à la Church, et de présenter le problème des isomorphismes de types.

Le chapitre 3 porte sur la sémantique des jeux HO, mais il n'est pas qu'un chapitre de rappels : il présente aussi la preuve de caractérisation de [Lau05] des isomorphismes du λ-calcul simplement typé, et introduit certaines des idées qui seront développées plus précisément par la suite.

Le chapitre 4 est une courte introduction à la grammaire des coups qui sera utilisée tout au long de notre travail.

Le chapitre 5 traite le cas du système F à la Church : après avoir introduit le modèle et montré qu'on obtient bien une hyperdoctrine, on prouve la caractérisation des isomorphismes de types via les hyperforêts, et on en déduit le système équationnel déjà donné par Roberto Di Cosmo.

Le chapitre 6 expose le modèle du système F à la Curry : partant d'un modèle du λ-calcul non typé d'une part, et du modèle du système F à la Church d'autre part, on construit le modèle directement, sans passer par une structure catégorique. On prouve ensuite la caractérisation des isomorphismes dans ce cas, via un critère plus subtil sur les hyperforêts.

Dans le chapitre 7, on traite l'extension au cas classique du système F à la Church, c'est-à-dire le langage $\lambda\mu 2$. On commence par donner une interprétation catégorique de $\lambda\mu 2$, l'*hyperdoctrine de contrôle*, et par montrer la correction de cette interprétation. Ensuite, on construit une sémantique de jeux, basée sur une nouvelle grammaire, et on montre que cela nous donne bien une hyperdoctrine de contrôle. Enfin, on donne la caractérisation des isomorphismes dans ce cadre, en étendant la preuve du chapitre 5.

Enfin, le chapitre 8 présentera les extensions et ouvertures de ce travail, certaines étant immédiates et ne demandant aucun travail particulier pour des raisons que l'on explicitera, d'autres constituant des axes de recherche de plus long terme.

Chapitre 2

Système F et isomorphismes de types

Le système F est un prototype de langage de programmation fonctionnelle avec des types polymorphes. Il en existe essentiellement deux variantes :

- le système F **à la Church**, dans lequel les termes portent des indications de type explicites
- le système F **à la Curry**, dans lequel il n'y a pas de types explicites dans les termes : la grammaire des termes est alors simplement celle du λ-calcul non typé.

2.1 Système F à la Church

Le système F à la Church est celui qui prolonge le plus naturellement l'isomorphisme de Curry-Howard au second ordre : comme dans le cas du λ-calcul simplement typé, une dérivation de typage va correspondre exactement à une preuve en déduction naturelle, et le terme porte la trace des règles logiques utilisées dans la preuve.

Il faut donc introduire deux nouvelles constructions sur les termes, qui correspondent aux règles logiques d'introduction et d'élimination du quantificateur universel : ce sont les construction $t \mapsto \Lambda X.t$ et $t \mapsto t\{B\}$.

Grammaire des types

On se donne un ensemble dénombrable de **variables de types** $V = \{X, Y, \ldots\}$.

$$A = \top \mid \ \bot \mid \ X \mid \ A \times A \mid \ A \to A \mid \ \forall X.A \qquad (X \in V)$$

Les formules[1] sont considérées modulo α-renommage des variables vis-à-vis du lieur $\forall$. L'ensemble des variables de types libres dans une formule A sera noté $FTV(A)$.

[1] Ici comme dans la suite de cette thèse, on s'autorise, grâce à l'isomorphisme de Curry-Howard, à utiliser indifférents les mots *type* et *formule*.

Notons que la présence du type $\bot$ n'est pas standard dans le système F, mais étant donné qu'on n'y perd rien et qu'on en aura besoin au moment de l'extension classique, on l'a ajouté ici.

Grammaire des termes

On se donne un ensemble dénombrable de **variables de types** $\mathcal{V} = \{x, y, \ldots\}$.

$$t ::= x \mid \; \star \mid \; \langle t, t \rangle \mid \; \pi_1(t) \mid \; \pi_2(t) \mid \; tt \mid \; \lambda x^A.t \mid \; \Lambda X.t \mid \; t\{A\} \qquad (x \in \mathcal{V})$$

Les formules sont considérées modulo α-renommage des variables vis-à-vis du lieur λ. L'ensemble des variables de termes libres dans un terme t sera noté $FV(t)$.

Séquents

Les séquents de notre calcul sont de la forme

$$\vec{X}; \Gamma \vdash t : A$$

où t est un terme, A est un type, Γ est un contexte de typage (i.e. une suite d'expressions de la forme $x_i : A_i$, où A_i est un type et x_i une variable qui apparaît au plus une fois dans Γ) et $\vec{X}$ est un ensemble de variables de type. On note $FTV(\Gamma)$ l'ensemble des variables de type apparaissant librement dans un des types A_i de Γ et $FV(t)$ l'ensemble des variables de terme apparaissant librement dans t.

Afin de contrôler les variables libres apparaissant dans un séquent, on introduit la relation $\vec{X} \Vdash A$: cette relation exprime le fait que les variables libres du type A sont choisies parmi $X_1, \ldots, X_n$, et elle est définie par les règles d'inférence suivantes :

$$\frac{X \in \vec{X}}{\vec{X} \Vdash X} \qquad \frac{}{\vec{X} \Vdash \top} \qquad \frac{}{\vec{X} \Vdash \bot}$$

$$\frac{\vec{X} \Vdash A \qquad \vec{X} \Vdash B}{\vec{X} \Vdash A \to B} \qquad \frac{\vec{X} \Vdash A \qquad \vec{X} \Vdash B}{\vec{X} \Vdash A \times B} \qquad \frac{\vec{X}, X \Vdash A}{\vec{X} \Vdash \forall X.A}$$

Règles de typage

$$(\mathrm{ax})\ \frac{\vec{X} \Vdash A_1 \quad \ldots \quad \vec{X} \Vdash A_n}{\vec{X}; x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash x_i : A_i}$$

$$(\top)\ \frac{\vec{X} \Vdash \Gamma}{\vec{X}; \Gamma \vdash \star : \top}$$

$$(\to I)\ \frac{\vec{X}; \Gamma, x : A \vdash t : B}{\vec{X}; \Gamma \vdash \lambda x^A.t : A \to B}$$

$$(\to E)\ \frac{\vec{X}; \Gamma \vdash t : A \to B \qquad \vec{X}; \Gamma \vdash u : A}{\vec{X}; \Gamma \vdash tu : B}$$

$$(\times I)\ \frac{\vec{X};\Gamma \vdash t : A \qquad \vec{X};\Gamma \vdash u : B}{\vec{X};\Gamma \vdash \langle t, u\rangle : A \times B}$$

$$(\times E1)\ \frac{\vec{X};\Gamma \vdash t : A \times B}{\vec{X};\Gamma \vdash \pi_1(t) : A} \qquad (\times E2)\ \frac{\vec{X};\Gamma \vdash t : A \times B}{\vec{X};\Gamma \vdash \pi_2(t) : B}$$

$$(\forall I)\ \frac{\vec{X}, X;\Gamma \vdash t : A}{\vec{X};\Gamma \vdash \Lambda X.t : \forall X.A}\ \text{si } X \notin FTV(\Gamma)$$

$$(\forall E)\ \frac{\vec{X};\Gamma \vdash t : \forall X.A \qquad \vec{X} \Vdash B}{\vec{X};\Gamma \vdash t\{B\} : A[B/X]}$$

Égalités

Les égalités du langage sont définies par des séquents de la forme $\vec{X};\Gamma \vdash t = u : A$ (avec $\vec{X};\Gamma \vdash t : A$ et $\vec{X};\Gamma \vdash u : A$) générés par des relations de congruence définies comme suit :

λ-calcul :

$$(\lambda x^A.t)u = t[u/x] \quad : \ B \qquad (\beta)$$
$$\lambda x^A.tx = t \quad : \ A \to B \quad \text{si } x \notin FV(t) \qquad (\eta)$$

Produits :

$$t = \star \quad : \ \top \qquad (\top)$$
$$\pi_1(\langle u, v\rangle) = u \quad : \ A \qquad (\pi_1)$$
$$\pi_2(\langle u, v\rangle) = v \quad : \ B \qquad (\pi_2)$$
$$\langle \pi_1(u), \pi_2(u)\rangle = u \quad : \ A \times B \qquad (\times)$$

Quantification du second ordre :

$$(\Lambda X.t)\{B\} = t[B/X] \quad : \ A[B/X] \qquad (\beta 2)$$
$$\Lambda X.t\{X\} = t \quad : \ \forall X.A \quad \text{if } X \notin FTV(t) \qquad (\eta 2)$$

2.2 Système F à la Curry

Le système F à la Curry étend lui aussi le λ-calcul simplement typé à la logique du second ordre, mais en prenant le parti de ne pas modifier le langage des termes, qui reste donc limité au λ-calcul pur. En conséquence, il n'y a plus stricto sensu de correspondance de Curry-Howard : un même terme peut correspondre à plusieurs preuves différentes.

Bien que ce système semble moins pertinent que le système F à la Church dans le domaine de la théorie de la preuve, il est en réalité plus adéquat lorsqu'on considère les langages de programmation. En effet, dans le système F à la Church, un terme t de type $\forall X.A$ n'aura pas le type $A[B/X]$: c'est le terme $t\{B\}$ qui aura ce type ; tandis que dans le système F à la Curry, un terme t de type $\forall X.A$ aura tous les types $A[B/X]$, et c'est bien l'idée sous-jacente à la notion de polymorphisme : la même fonction peut être utilisée avec différents types.

Le système F à la Curry, tel qu'on le considérera dans cette thèse, comporte dans sa grammaire de types le produit $A \times B$ mais pas de type $\top$.

Cela est du à la forme de l'égalité associée à ce dernier :

$$\Gamma \vdash t = \star : \top \qquad (\top)$$

Cette égalité dépend fortement du fait que le terme t puisse être typé par $\top$. Or, étant donné que la grammaire des termes est basée sur le λ-calcul pur, on voudrait que les équations du langage puissent s'exprimer directement entre termes, indépendamment de toute structure de typage.

Il y a donc un phénomène d'hétérogénéité entre la règle $(\top)$ et les autres règles du calcul. C'est pourquoi on s'autorise dans cette thèse à considérer un système F à la Curry sans type $\top$.

Grammaire des types

$$A = \bot \mid X \mid A \times A \mid A \to A \mid \forall X.A \qquad (X \in V)$$

Grammaire des termes

$$t ::= x \mid \langle t, t \rangle \mid \pi_1(t) \mid \pi_2(t) \mid tt \mid \lambda x.t \qquad (x \in \mathcal{V})$$

Séquents

Les séquents sont de la forme

$$\vec{X}; \Gamma \vdash t : A$$

où t est un terme, A un type et Γ un contexte de typage. La relation $\vec{X} \Vdash A$ est définie comme précédemment.

Règles de typage

$$(\text{ax})\ \frac{\vec{X} \Vdash A_1 \quad \ldots \quad \vec{X} \Vdash A_n}{\vec{X}; x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash x_i : A_i}$$

$$(\to I)\ \frac{\vec{X}; \Gamma, x : A \vdash t : B}{\vec{X}; \Gamma \vdash \lambda x.t : A \to B}$$

$$(\to E)\ \frac{\vec{X}; \Gamma \vdash t : A \to B \qquad \vec{X}; \Gamma \vdash u : A}{\vec{X}; \Gamma \vdash tu : B}$$

$$(\times I)\ \frac{\vec{X};\Gamma\vdash t:A \qquad \vec{X};\Gamma\vdash u:B}{\vec{X};\Gamma\vdash\langle t,u\rangle : A\times B}$$

$$(\times E1)\ \frac{\vec{X};\Gamma\vdash t:A\times B}{\vec{X};\Gamma\vdash \pi_1(t):A} \qquad (\times E2)\ \frac{\vec{X};\Gamma\vdash t:A\times B}{\vec{X};\Gamma\vdash \pi_2(t):B}$$

$$(\forall I)\ \frac{\vec{X},X;\Gamma\vdash t:A}{\vec{X};\Gamma\vdash t:\forall X.A}\ \text{si } X\notin FTV(\Gamma)$$

$$(\forall E)\ \frac{\vec{X};\Gamma\vdash t:\forall X.A \qquad \vec{X}\Vdash B}{\vec{X};\Gamma\vdash t:A[B/X]}$$

Égalités

Les égalités entre termes sont données directement, indépendamment de tout séquent :

$$\begin{aligned}
(\lambda x.t)u &= t[u/x] && && (\beta)\\
\lambda x.tx &= t && \text{si } x\notin FV(t) && (\eta)\\
\pi_1(\langle u,v\rangle) &= u && && (\pi_1)\\
\pi_2(\langle u,v\rangle) &= v && && (\pi_2)\\
\langle \pi_1(u),\pi_2(u)\rangle &= u && && (\times)
\end{aligned}$$

Comme on l'a dit, une règle pour le type $\top$ apparaîtrait peu homogène vis-à-vis des égalités ci-dessus. Cela n'empêche qu'il est possible de définir un système à la Curry dans lequel ce type apparaît : il faut alors simplement que toute égalité entre les termes soit sujette à un contexte de typage, comme c'est le cas pour le système F à la Church : on aurait alors des règles de la forme

$$\Gamma\vdash t=u:A$$

Mais une telle règle n'est pas très fidèle à l'esprit du système F à la Curry. En particulier, il n'est pas sûr que la transitivité de l'égalité soit directement assurée dans cette formulation. L'étude d'un tel système, plus complet mais nettement moins homogène, n'est pas l'objet de cette thèse.

2.3 Système F avec disjonction classique

L'extension à la logique classique de la correspondance de Curry-Howard a conduit Michel Parigot à définir le $\lambda\mu$-calcul [Par92] en ajoutant de nouveaux opérateurs au λ-calcul, ce qui lui permet de capturer la notion de *contrôle*. Ce calcul permet d'utiliser le résultat du calcul comme s'il était envoyé sur plusieurs sorties : cela correspond au fait que les séquents de la logique classique contiennent plusieurs conclusions. La célèbre commande de contrôle `call/cc` peut notamment être encodée dans le $\lambda\mu$-calcul, et son type est la formule de Pierce $((A \to B) \to A) \to A$, qui est vraie en logique classique mais pas en logique intuitionniste.

Il existe deux paradigmes différents pour ce calcul, qui diffèrent au niveau des règles de réduction des opérateurs de contrôle : le $\lambda\mu$-calcul avec appel par nom et le $\lambda\mu$-calcul avec appel par valeur. Peter Selinger a démontré dans [Sel01] que ces deux calculs étaient duaux.

On va considérer ici l'extension au second ordre de ce calcul, dans un paradigme en appel par nom, et avec l'opérateur de disjonction sur les types introduit par David Pym et Eike Ritter [PR01] et adopté par Selinger [Sel01]. Ce système sera par la suite appelé $\lambda\mu 2$.

Grammaire des types

$$A = \top \mid \perp \mid X \mid A \times A \mid A \to A \mid A \parr A \mid \forall X.A$$

Grammaire des termes

En plus de l'ensemble $\mathcal{V}$ des variables de termes, on se donne un ensemble dénombrable $\mathcal{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ de **noms**.

$$\begin{array}{rl} t ::= & x \mid \star \mid \langle t, t\rangle \mid \pi_1(t) \mid \pi_2(t) \mid tt \mid \lambda x^A.t \mid [\alpha]t \mid \mu\alpha^A.t \\ & \mid [\alpha,\beta]t \mid \mu(\alpha^A, \beta^B).t \mid \Lambda X.t \mid t\{A\} \end{array}$$

Les formules sont considérées modulo α-renommage des variables de termes vis-à-vis du lieur λ, et des noms vis-à-vis du lieur μ. L'ensemble des noms libres dans un termes t sera noté $FN(t)$.

Séquents

Les séquents sont de la forme

$$\vec{X}; \Gamma \vdash t : A \mid \Delta$$

où t est un terme, A un type, Γ un contexte de typage pour les variables, Δ un contexte de nommage (i.e. une suite d'expressions de la forme $\alpha_i : A_i$ où A_i est un type et α_i un nom apparaissant au plus une fois dans Δ) et $\vec{X}$ un ensemble de variables de type.

On redéfinit la relation $\vec{X} \Vdash A$:

$$\frac{X \in \vec{X}}{\vec{X} \Vdash X} \qquad \frac{}{\vec{X} \Vdash \top} \qquad \frac{}{\vec{X} \Vdash \perp}$$

$$\frac{\vec{X} \Vdash A \qquad \vec{X} \Vdash B}{\vec{X} \Vdash A \to B} \qquad \frac{\vec{X} \Vdash A \qquad \vec{X} \Vdash B}{\vec{X} \Vdash A \times B} \qquad \frac{\vec{X} \Vdash A \qquad \vec{X} \Vdash B}{\vec{X} \Vdash A \parr B}$$

$$\frac{\vec{X}, X \Vdash A}{\vec{X} \Vdash \forall X.A}$$

Règles de typage

$$(\mathrm{ax})\ \frac{\vec{X} \Vdash A_1 \quad \dots \quad \vec{X} \Vdash A_n \quad \vec{X} \Vdash B_1 \quad \dots \quad \vec{X} \Vdash B_p}{\vec{X}; x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash x_i : A_i \mid \alpha_1 : B_1, \dots, \alpha_p : B_p}$$

$$(\top)\ \frac{\vec{X} \Vdash \Gamma \qquad \vec{X} \Vdash \Delta}{\vec{X}; \Gamma \vdash \star : \top \mid \Delta}$$

$$(\to I)\ \frac{\vec{X}; \Gamma, x : A \vdash t : B \mid \Delta}{\vec{X}; \Gamma \vdash \lambda x^A.t : A \to B \mid \Delta}$$

$$(\to E)\ \frac{\vec{X}; \Gamma \vdash t : A \to B \mid \Delta \qquad \vec{X}; \Gamma \vdash u : A \mid \Delta}{\vec{X}; \Gamma \vdash tu : B \mid \Delta}$$

$$(\times I)\ \frac{\vec{X}; \Gamma \vdash t : A \mid \Delta \qquad \vec{X}; \Gamma \vdash u : B \mid \Delta}{\vec{X}; \Gamma \vdash \langle t, u\rangle : A \times B \mid \Delta}$$

$$(\times E1)\ \frac{\vec{X}; \Gamma \vdash t : A \times B \mid \Delta}{\vec{X}; \Gamma \vdash \pi_1(t) : A \mid \Delta} \qquad (\times E2)\ \frac{\vec{X}; \Gamma \vdash t : A \times B \mid \Delta}{\vec{X}; \Gamma \vdash \pi_2(t) : B \mid \Delta}$$

$$(\mathrm{nommage})\ \frac{\vec{X}; \Gamma \vdash t : A \mid \Delta}{\vec{X}; \Gamma \vdash [\alpha]t : \bot \mid \Delta}\ \text{si } \alpha : A \in \Delta$$

$$(\mu\text{-abstraction})\ \frac{\vec{X}; \Gamma \vdash t : \bot \mid \alpha : A, \Delta}{\vec{X}; \Gamma \vdash \mu\alpha^A.t : A \mid \Delta}$$

$$(\text{double nommage})\ \frac{\vec{X}; \Gamma \vdash t : A \parr B \mid \Delta}{\vec{X}; \Gamma \vdash [\alpha, \beta]t : \bot \mid \Delta}\ \text{si } \alpha : A, \beta : B \in \Delta$$

$$(\text{double } \mu\text{-abstraction})\ \frac{\vec{X}; \Gamma \vdash t : \bot \mid \alpha : A, \beta : B, \Delta}{\vec{X}; \Gamma \vdash \mu(\alpha^A, \beta^B).t : A \parr B \mid \Delta}$$

$$(\forall I)\ \frac{\vec{X}, X; \Gamma \vdash t : A \mid \Delta}{\vec{X}; \Gamma \vdash \Lambda X.t : \forall X.A \mid \Delta}\ \text{si } X \notin FTV(\Gamma) \cup FTV(\Delta)$$

$$(\forall E)\ \frac{\vec{X}; \Gamma \vdash t : \forall X.A \mid \Delta \qquad \vec{X} \Vdash B}{\vec{X}; \Gamma \vdash t\{B\} : A[B/X] \mid \Delta}$$

Égalités

La théorie équationnelle de $\lambda\mu 2$ est donnée par les séquents $\vec{X}; \Gamma \vdash t = u : A \mid \Delta$ (avec $\vec{X}; \Gamma \vdash t : A \mid \Delta$ et $\vec{X}; \Gamma \vdash u : A \mid \Delta$) générés par les relations de congruence suivantes :

λ-calcul avec produits :

$$\begin{array}{rlll}
t = \star & : \top & & (\top) \\
\pi_1(\langle t, u\rangle) = u & : A & & (\pi_1) \\
\pi_2(\langle t, u\rangle) = v & : B & & (\pi_2) \\
\langle \pi_1(u), \pi_2(u)\rangle = u & : A \times B & & (\times) \\
(\lambda x^A.t)u = t[u/x] & : B & & (\beta) \\
\lambda x^A.tx = t & : A \to B & \text{si } x \notin FV(t) & (\eta)
\end{array}$$

Quantification du second ordre :

$$\begin{array}{rlll}
(\Lambda X.t)\{B\} = t[B/X] & : A[B/X] & & (\beta 2) \\
\Lambda X.t\{X\} = t & : \forall X.A & \text{si } X \notin FTV(t) & (\eta 2)
\end{array}$$

$\lambda\mu$-calcul avec disjonction :

$$\begin{array}{rlll}
(\mu\alpha^{A\to B}.t)u = \mu\beta^B.t[[\beta](-)u/[\alpha](-)] & : B & \text{si } \beta \notin FN(t,u) & (\mu^{\to}) \\
\pi_i(\mu\alpha^{A_1\times A_2}.t) = \mu\beta^{A_i}.t[[\beta]\pi_i(-)/[\alpha](-)] & : A_i & \text{si } \beta \notin FN(t) & (\mu^{\times}) \\
[\beta,\gamma](\mu\alpha^{A \parr B}.t) = t[[\beta,\gamma](-)/[\alpha](-)] & : \bot & & (\mu^{\parr}) \\
(\mu\alpha^{\forall X.A}.t)\{B\} = \mu\beta^{A[B/X]}.t[[\beta](-)\{B\}/[\alpha](-)] & : A[B/X] & \text{si } \beta \notin FN(t) & (\mu^{\forall})
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlll}
[\alpha']\mu\alpha^A.t = t[\alpha'/\alpha] & : \bot & & (\rho^{\mu}) \\
[\alpha',\beta']\mu(\alpha^A,\beta^B).t = t[\alpha'/\alpha,\beta'/\beta] & : \bot & & (\rho^{\parr}) \\
[\xi]t = t & : \bot & \text{si } \xi : \bot \in \Delta & (\rho^{\bot})
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlll}
\mu\alpha^A.[\alpha]t = t & : A & \text{si } \alpha \notin FN(t) & (\theta^{\mu}) \\
\mu(\alpha^A,\beta^B).[\alpha,\beta]t = t & : A \parr B & \text{si } \alpha,\beta \notin FN(t) & (\theta^{\parr})
\end{array}$$

Dans les équations ci-dessus, la substitution contextuelle $s_{\alpha,C}(M) = M[C(-)/[\alpha](-)]$ où M est un terme, $t \mapsto C(t)$ une opération sur les termes et $\alpha : A$ apparaît dans le contexte de nommage, est définie par induction sur M :

- $s_{\alpha,C}([\alpha]M) = C([\alpha]s_{\alpha,C}(M))$
- $s_{\alpha,C}([\alpha,\beta]M) = C(\mu\alpha^A.[\alpha,\beta]s_{\alpha,C}(M))$
- $s_{\alpha,C}([\beta,\alpha]M) = C(\mu\alpha^A.[\beta,\alpha]s_{\alpha,C}(M))$
- $s_{\alpha,C}$ commute avec toutes les autres opérations de base sur les termes (avec la condition d'éviter les captures de variable).

2.4 Modèles du système F

Les premiers modèles du système F apparaissent en fait dès la thèse de Girard [Gir72], au moment de la preuve de normalisation forte du calcul : en effet, la technique des *candidats de réductibilité* est un cas particulier de la *réalisabilité*, qui construit des modèles à partir de la syntaxe. Girard a aussi proposé par la suite dans [Gir86] un modèle cohérent du système F.

On sait depuis [Rey84] qu'il est par contre impossible, à cause de l'imprédicativité, de construire un modèle du système F dans la catégorie des ensembles et des fonctions. C'est pourquoi on préférera l'approche plus générale des catégories. La description catégorique des modèles du système F sera largement utilisée dans cette thèse : elle est basée sur la notion d'hyperdoctrine, introduite par Lawvere [Law70].

Dans la définition suivante, **CCC** est la catégorie des catégories cartésiennes closes et des foncteurs stricts de cccs ($G : C \to D$ est un foncteur strict si l'image de la structure cartésienne close choisie pour C est la structure cartésienne close choisie pour D).

Définition 1 (hyperdoctrine) *Une **hyperdoctrine** $\mathbf{H}$ est définie par :*
- *une catégorie de base $|\mathbf{H}|$ munie d'une structure cartésienne, c'est-à-dire d'un objet terminal 1 et du produit binaire*[2]
- *un objet distingué U dans $|\mathbf{H}|$ tel que, pour tout $I \in |\mathbf{H}|$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I = U^n$ (avec la convention $U^0 = 1$) ; on note $P_n^i : U^n \to U$ la projection sur la ième composante, et $P_{n+1} = \langle P_{n+1}^1, \ldots, P_{n+1}^n \rangle : U^{n+1} \to U^n$*
- *un foncteur $F : |\mathbf{H}|^{op} \to \boldsymbol{CCC}$ tel que, si on compose F avec le foncteur d'oubli $\mathit{fff} : \boldsymbol{CCC} \to \boldsymbol{Set}$, on obtient le foncteur $|\mathbf{H}|(-, U)$*
- *pour tout $I \in |\mathbf{H}|$, un foncteur $\Pi_I : F(I \times U) \to F(I)$ tel que :*
  - *Π_I est adjoint à droite au foncteur $G_I : F(I) \to F(I \times U)$ défini par $G_I = F(P_{n+1})$ pour $I = U^n$*
  - *Π_I est naturel en I : pour tout $\alpha : I \to J$, $F(\alpha) \circ \Pi_J = \Pi_I \circ F(\alpha \times id_U)$*
  - *pour tout $\alpha : I \to J$, pour tout objet A de $F(J \times U)$, le morphisme $(F(\alpha) \circ \Pi_J)(A) \to (\Pi_I \circ F(\alpha \times id_U))(A)$ généré par l'adjonction est une identité.*

On note
$$\kappa : F(I \times U)(G_I(A), B) \to F(I)(A, \Pi_I(B))$$
la bijection liée à l'adjonction entre Π_I et G_I. Dans la définition ci-dessus, le morphisme $f : (F(\alpha) \circ \Pi_J)(A) \to (\Pi_I \circ F(\alpha \times id_U))(A)$ est donné par :
$$f = \kappa(F(\alpha \times id)(\kappa^{-1}(id_{\Pi_J(A)})))$$
et la dernière propriété stipule que $f = id_{(F(\alpha) \circ \Pi_J)(A)}$.

Soit $\mathbf{H}$ une hyperdoctrine, caractérisée par sa catégorie de base $|\mathbf{H}|$ et son foncteur $F : |\mathbf{H}|^{op} \to \mathbf{CCC}$. On construit une catégorie $\mathcal{W}(\mathbf{H})$ comme suit :
- les objets sont les couples (I, A) où I est un objet de $|\mathbf{H}|$ et A un objet de $F(I)$
- un morphismes de (I, A) vers (J, B) vérifie $I = J$, c'est un morphisme de A vers B dans $F(I)$.

[2]Dans la syntaxe comme dans les modèles, l'élément terminal, la paire et la flèche seront notés respectivement $\top$, $\langle t, u \rangle$ et $A \to B$. Dans les catégories, on utilise les notations plus classiques 1, (f, g) et B^A.

Cette construction est proche de la construction de Grothendieck (cf. [Pit88]), mais comme l'interprétation du système F à la Church n'utilisera que les morphismes $(I, A) \to (J, B)$ pour lesquels $I = J$, on n'a pas jugé utile de présenter une construction plus générale.

Seely [See87] puis Pitts [Pit88] ont montré que les hyperdoctrines capturaient bien le polymorphisme :

Proposition 1 *Pour toute hyperdoctrine* $\mathbf{H}$*,* $\mathcal{W}(\mathbf{H})$ *est un modèle du système F à la Church.*

On ne donnera pas la preuve de ce résultat, mais simplement la façon dont sont interprétés types et termes dans cette structure.

Considérons donc notre hyperdoctrine $\mathbf{H}$, et notons $- \mapsto -[U^n, B]$ le foncteur $F(id_{U^n} \times B) : F(U^{n+1}) \to F(U^n)$ pour $B : U^n \mapsto U$ morphisme de $|\mathbf{H}|$.

On adopte les notations suivantes pour une catégorie cartésienne fermée : $\diamond_A : A \to 1$ est la flèche terminale, π_1 et π_2 sont les projections, $(f, g) : A \to (B \times C)$ indique la paire des deux morphismes $f : A \to B$ et $g : A \to C$, $\epsilon_{A,B} : B^A \times A \to B$ est l'évaluation, et $\Lambda(f) : B \to C^A$ est la curryfication du morphisme $f : A \times B \to C$. On notera parfois $\xrightarrow{ccc}$ les isomorphismes triviaux dans une ccc.

Interprétation des types

$$
\begin{gathered}
[\![\top]\!] = 1 \\
[\![X_i]\!] = P_n^i \\
[\![A \times B]\!] = [\![A]\!] \times [\![B]\!] \\
[\![A \to B]\!] = [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \\
[\![\forall X_{n+1}.A]\!] = \Pi_{U^n}([\![A]\!])
\end{gathered}
$$

On note que l'interprétation de X_i est un morphisme $P_n^i : U^n \to U$ dans la catégorie de base $|\mathbf{H}|$: on utilise en réalité le fait que la composition de F avec le foncteur d'oubli *fff* : $\mathbf{CCC} \to \mathbf{Set}$ génère le foncteur $|\mathbf{H}|(-, U)$. Il est donc équivalent de définir l'interprétation d'un type comme un objet dans $F(U^n)$ ou comme un morphisme de U^n vers U dans $|\mathbf{H}|$.

Interprétation des termes

Dans ce qui suit, par souci de simplicité on écrira simplement A à la place de $[\![A]\!]$, et on note $\overline{\pi}_i : B_1 \times \cdots \times B_m \to B_i$ la projection sur B_i (obtenue en composant π_1 et π_2 un certain nombre de fois).

$$
\begin{array}{lcl}
[\![\vec{X};\Gamma \vdash x_i : B_i]\!] & = & \Gamma \xrightarrow{\overline{\pi}_i} B_i \\
[\![\vec{X};\Gamma \vdash \star : \top]\!] & = & \Gamma \xrightarrow{\diamond} 1 \\
[\![\vec{X};\Gamma \vdash \langle t,u\rangle : A \times B]\!] & = & \Gamma \xrightarrow{([\![t]\!],[\![u]\!])} A \times B \\
[\![\vec{X};\Gamma \vdash \pi_1(t) : A]\!] & = & \Gamma \xrightarrow{[\![t]\!]} A \times B \xrightarrow{\pi_1} A \\
[\![\vec{X};\Gamma \vdash \pi_2(t) : B]\!] & = & \Gamma \xrightarrow{[\![t]\!]} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B \\
[\![\vec{X};\Gamma \vdash tu : B]\!] & = & \Gamma \xrightarrow{([\![t]\!],[\![u]\!])} B^A \times A \xrightarrow{\epsilon} B \\
[\![\vec{X};\Gamma \vdash \lambda x^A.t : A \to B]\!] & = & \Gamma \xrightarrow{\Lambda([\![t]\!])} B^A \\
[\![\vec{X};\Gamma \vdash \Lambda X.t : \forall X.A]\!] & = & \Gamma \xrightarrow{\kappa([\![t]\!])} \Pi_{U^n}(A) \\
[\![\vec{X};\Gamma \vdash t\{B\} : A[B/X]]\!] & = & \Gamma \xrightarrow{\kappa^{-1}([\![t]\!])[U^n,B]} A[U^n,B]
\end{array}
$$

Dans le cas du système F à la Curry, l'interprétation par une hyperdoctrine n'est pas suffisante car on doit avoir plus d'égalités entre les morphismes. Comme souligné par Phil Scott [Sco00], il n'existe pas à ce jour de travail catégorique sur les rapports entre système F à la Curry et système F à la Church.

Une façon simple de construire un modèle du système F à la Curry est de donner un modèle du λ-calcul non typé, muni d'une relation de typage qui coïncide avec les jugements de typage du système F à la Curry. Dans cette thèse, on ne construira cependant pas un véritable modèle à la Curry, car l'interprétation que l'on donnera sera un modèle de la *réduction* et non de l'*égalité*.

Enfin, le chapitre 7 donnera une interprétation catégorique des modèles de $\lambda\mu 2$ et prouvera la correction de cette interprétation.

2.5 Isomorphismes de types

On conclut cette section introductive par la question des isomorphismes de types, dont l'étude dans le cadre du système F a constitué le point de départ et la motivation de cette thèse.

Le problème des isomorphismes de types est une question purement syntaxique : deux types A et B sont isomorphes si et seulement si il existe deux termes $f : A \to B$ et $g : B \to A$ tels que $f \circ g = id_B$ et $g \circ f = id_A$. Plus formellement :

Définition 2 (isomorphisme de types) *Considérons un langage contenant le λ-calcul simplement typé.*

Un isomorphisme de types dans ce langage entre A et B est un couple de termes (t,u) tel que :

- $\vdash t : A \to B$
- $\vdash u : B \to A$

- $\vdash \lambda x.t(ux) = \lambda x.x : B \to B$
- $\vdash \lambda y.u(ty) = \lambda y.y : A \to A$

Du point-de-vue de la programmation, cette relation d'équivalence sur les types de données permet de traduire un programme d'un type à un autre sans modifier le sens calculatoire de ce programme. Ainsi, chercher un programme modulo isomorphisme de types permet à un programmeur de chercher toutes les fonctions qui peuvent potentiellement remplir les spécifications qu'il recherche, et de réutiliser ces fonctions dans un nouveau contexte de typage [Rit91]. Ce procédé est particulièrement intéressant lorsqu'il s'agit de programmation fonctionnelle, car dans ce cas le type peut réellement être vu comme une spécification partielle du programme : un tel outil de recherche modulo isomorphisme a ainsi été implémenté en Caml par Jérôme Vouillon. Cela peut aussi être utilisé dans les assistants à la preuve, afin d'aider à retrouver des preuves et à les réutiliser [BP01] (pour plus d'exemples sur l'utilisation des isomorphismes de types en informatique, voir [DC95]).

D'un point-de-vue plus général, les isomorphismes de types sont la réponse la plus naturelle à la question de l'équivalence entre deux types dans un langage de programmation. En effet, si on considère deux types A et B que l'on souhaite identifier, il faut non seulement que ces deux types soient équiprouvables, et donc qu'il existe t et u tels que $\vdash t : A \to B$ et $\vdash u : B \to A$, mais aussi que l'identification entre A et B ne génère pas d'autre terme canonique que l'identité ; et donc que les composées $t \circ u$ et $u \circ t$ soient égales à l'identité.

Caractériser les types isomorphes (donc équivalents) semble dès lors une question simple et pertinente. Elle a été résolue pour le λ-calcul simplement typé par Soloviev [Sol83]. Mais cette résolution est souvent non triviale, en particulier en présence de polymorphisme. Roberto Di Cosmo [DC95] a résolu cette question syntaxiquement pour le système F à la Church, en donnant un système équationnel sur les types qui caractérise complètement les isomorphismes.

Cette thèse propose une nouvelle approche, plus géométrique, de cette question, ainsi que de nouveaux résultats de caractérisation. Suivant l'approche d'Olivier Laurent dans [Lau05], on va utiliser la sémantique des jeux comme outil fondamental dans notre travail.

Au risque de briser définitivement le suspens, on va donner ici les caractérisations équationnelles des isomorphismes de types pour les différents calculs avec polymorphisme introduits précédemment. Le lecteur rétif au Verfremdungseffekt aura intérêt à passer directement au chapitre suivant.

Pour le système F à la Church, on retrouvera la même caractérisation que Di Cosmo dans [DC95], à savoir :

$$
\begin{array}{rcll}
A \times \top & \simeq_\varepsilon & A & \\
\forall X.\top & \simeq_\varepsilon & \top & \\
\top \to A & \simeq_\varepsilon & A & \\
A \to \top & \simeq_\varepsilon & \top & \\
A \times B & \simeq_\varepsilon & B \times A & \\
A \times (B \times C) & \simeq_\varepsilon & (A \times B) \times C & \\
A \to (B \to C) & \simeq_\varepsilon & (A \times B) \to C & \\
A \to (B \times C) & \simeq_\varepsilon & (A \to B) \times (A \to C) & \\
\forall X.\forall Y.A & \simeq_\varepsilon & \forall Y.\forall X.A & \\
\forall X.(A \times B) & \simeq_\varepsilon & \forall X.A \times \forall X.B & \\
A \to \forall X.B & \simeq_\varepsilon & \forall X.(A \to B) & \text{si } X \notin FTV(A)
\end{array}
$$

Comme on le verra au chapitre 5, ce système d'équations est lié de façon directe à une propriété de nature géométrique.

Pour le système F à la Curry, on donnera au chapitre 6 une caractérisation par un système équationnel inédit, qui prolonge le système précédent (mais privé des règles liées au type $\top$) :

$$
\begin{array}{rcll}
A \times B & \simeq_{Cu} & B \times A & \\
A \times (B \times C) & \simeq_{Cu} & (A \times B) \times C & \\
A \to (B \to C) & \simeq_{Cu} & (A \times B) \to C & \\
A \to (B \times C) & \simeq_{Cu} & (A \to B) \times (A \to C) & \\
\forall X.\forall Y.A & \simeq_{Cu} & \forall Y.\forall X.A & \\
A \to \forall X.B & \simeq_{Cu} & \forall X.(A \to B) & \text{si } X \notin FTV(A) \\
\forall X.(A \times B) & \simeq_{Cu} & \forall X.A \times \forall X.B & \\
\forall X.A & \simeq_{Cu} & A[\forall Y.Y/X] & \text{si } X \notin Neg_A
\end{array}
$$

où Neg_A et Pos_A sont définis par induction sur A :

- $Pos_X = \{X\}$, $Neg_X = \emptyset$
- $Pos_\perp = Neg_\perp = \emptyset$
- $Pos_{A\times B} = Pos_A \cup Pos_B$, $Neg_{A\times B} = Neg_A \cup Neg_B$
- $Pos_{A\to B} = Neg_A \cup Pos_B$, $Neg_{A\to B} = Pos_A \cup Neg_B$
- $Pos_{\forall X.A} = Pos_A \setminus \{X\}$, $Neg_{\forall X.A} = Neg_A \setminus \{X\}$

Enfin, on montrera au chapitre 7 que les isomorphismes dans le langage $\lambda\mu 2$ sont bien ceux auxquels on pouvait s'attendre :

$$
\begin{array}{rcll}
A \times \top & \simeq_{\parr} & A & \\
\forall X.\top & \simeq_{\parr} & \top & \\
\top \to A & \simeq_{\parr} & A & \\
A \to \top & \simeq_{\parr} & \top & \\
\top \parr A & \simeq_{\parr} & \top & \\
\bot \parr A & \simeq_{\parr} & A & \\
A \times B & \simeq_{\parr} & B \times A & \\
A \parr B & \simeq_{\parr} & B \parr A & \\
A \times (B \times C) & \simeq_{\parr} & (A \times B) \times C & \\
A \parr (B \parr C) & \simeq_{\parr} & (A \parr B) \parr C & \\
A \to (B \to C) & \simeq_{\parr} & (A \times B) \to C & \\
(A \to B) \parr C & \simeq_{\parr} & A \to (B \parr C) & \\
(A \times B) \parr C & \simeq_{\parr} & (A \parr C) \times (B \parr C) & \\
\forall X.\forall Y.A & \simeq_{\parr} & \forall Y.\forall X.A & \\
\forall X.(A \times B) & \simeq_{\parr} & \forall X.A \times \forall X.B & \\
(\forall X.A) \parr B & \simeq_{\parr} & \forall X.(A \parr B) & \text{si } X \notin FTV(B)
\end{array}
$$

Chapitre 3

Sémantique des jeux

Les idées de la sémantique des jeux remontent aux années 1950, avec les travaux de Lorenzen, poursuivis par Lorenz, sur la *logique de dialogue*[1] (cf. [Fel86]). Il ne s'agit pas encore d'une sémantique à part entière, mais d'une compréhension très précise de la syntaxe. Blass propose plus tard, à travers le concept de *jeux polarisés* [Bla72, Bla92], une véritable interprétation de la syntaxe, mais qui s'avère non catégorique car la loi de composition sur ces jeux n'est pas associative (cf. [Abr03]).

Cette difficulté a été surmontée d'une part par Joyal [Joy77], en utilisant les *jeux de Conway*, et d'autre part par Abramsky et Jagadeesan [AJ94] qui, sans s'éloigner des intuitions des jeux polarisés, construisent un modèle de la Logique Linéaire Multiplicative (MLL) et prouvent un résultat de *complétude*[2] pour ce modèle : toute stratégie σ : $A \to B$ est l'interprétation d'un terme de la syntaxe (pourvu que A et B soient les interprétations de deux formules). Ces jeux sont à la base de la conception moderne de la sémantique des jeux. Ils se trouvent par ailleurs en correspondance avec une autre sémantique de premier plan de la Logique Linéaire, la *Géométrie de l'Interaction* (GoI) de Girard [Gir88] : en effet, comme indiqué dans [AJ94], si l'on se restreint à la sous-catégorie des jeux *sans histoire*, alors la loi de composition peut être vue comme une *formule d'exécution*.

La difficulté suivante était d'intégrer à ces jeux une interprétation des modalités exponentielles de la logique. Deux réponses différentes sont apparues pour répondre à ce problème : d'une part le modèle AJM d'Abramsky, Jagadeesan et Malacaria [AJM00], et d'autre part le modèle HO de Hyland et Ong [HO00] (aussi inventé indépendamment par Nickau [Nic94]), qui réintègre certaines conditions structurelles proposées par Lorenzen.

Ces deux modèles ont connu un succès immédiat car ils ont permis de franchir une étape décisive dans la recherche de sémantique complètement adéquates pour le langage PCF, quête initiée par les travaux de Robin Milner [Mil77] et Gordon Plotkin [Plo77] et très suivie par les chercheurs en sémantique des langages de programmation. Une connection est d'ailleurs établie dans [Lai98] entre les *algorithmes séquentiels* de Berry et Curien [BC82], autre structure issue de cette quête d'une sémantique complètement

[1] Aussi appelée *logique dialogique*.

[2] Dans cette thèse, l'expression *full completeness* sera simplement traduite par *complétude*.

adéquate, et certaines idées de la sémantique des jeux.

On va décrire dans ce chapitre les jeux standards (sans second ordre) dans la formulation d'Hyland et Ong. Par la suite, on se référera à cette description sous l'appellation de **jeux HO**.

Mais ce chapitre n'est pas, loin s'en faut, un tutoriel précis de la sémantique des jeux d'Hyland et Ong : le lecteur qui chercherait une introduction de ce genre pourra par exemple se référer à la thèse de Guy McCusker [McC96], qui a formalisé la présentation aujourd'hui la plus standard de ces jeux, ou à celle de Russ Harmer [Har99]. Le but ici est simplement d'introduire les notions clés de la sémantique des jeux de telle manière que le passage au second ordre, et au formalisme très précis qu'on en a donné, ait été préparé en amont. La plupart des constructions que l'on va introduire dans ce chapitre seront d'ailleurs reprises au chapitre suivant, dans notre nouveau formalisme.

3.1 Notations sur les ensembles

Étant donné un ensemble E, on note $Card(E)$ son cardinal, $\mathbb{P}(E)$ l'ensemble de ses sous-ensembles et E^* l'ensemble des mots finis construits à partir de E (aussi appelés listes d'éléments de E).

On note $E + F$ l'union disjointe entre deux ensembles E et F. Si $f : E \rightharpoonup G$ et $g : F \rightharpoonup G$ sont des fonctions partielles alors $[f, g] : E + F \rightharpoonup G$ est défini par :

$$[f,g](x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \text{ et } f(x) \text{ est défini} \\ g(x) & \text{si } x \in F \text{ et } g(x) \text{ est défini} \end{cases}$$

Enfin, on considérera l'ensemble des variables de type $X, Y, \ldots$ comme étant en bijection avec $\mathbb{N} \backslash \{0\}$, et on notera cet ensemble $\mathcal{X} = \{X_j \mid j > 0\}$.

3.2 Arènes

Définition 3 (arène) *Une **arène** $A = (E_A, \lambda, \vdash, D)$ est un ensemble E_A muni d'une fonction de **polarité** $\lambda : E_A \to \{\mathbf{O}, \mathbf{P}\}$, d'une fonction partielle de **décoration** $D : E_A \rightharpoonup \mathcal{X}$ et d'une relation de **justification** $\vdash \subseteq E_A + (E_A \times E_A)$, avec les propriétés suivantes :*

- *il n'existe pas de cycle $x \vdash x_1 \vdash \cdots \vdash x_n \vdash x$*
- *si $\vdash x$ alors $\lambda(x) = \mathbf{O}$*
- *si $x \vdash y$ alors $\lambda(x) \neq \lambda(y)$.*

Cette définition rejoint celle que l'on peut trouver dans [Har99], mais on y ajoute la notion non standard de décoration : l'idée de décorer les coups par des variables est logique dans l'optique d'ajouter une notion de quantification sur ces variables, on l'introduit donc dès maintenant pour l'utiliser plus tard.

Pour une arène A, donnée, on peut définir un ensemble de **coups initiaux** $I_A \subseteq E_A$ par :

$$I_A = \{x \in E_A \mid \vdash x\}$$

et un ordre partiel $\leq$ par :

$$x \leq y \Leftrightarrow (x = y) \vee \exists z_1, \ldots, z_n,\ x \vdash z_1 \vdash \cdots \vdash z_n \vdash y$$

On peut d'ailleurs retrouver la relation de justification à partir de la donnée de I et $\leq$:
- $\vdash x$ ssi $x \in I$
- $x \vdash y$ ssi $x < y$ et $x \leq z \leq y \Rightarrow (z = x \vee z = y)$.

3.2.1 Constructions sur les arènes

On appelle **arènes atomiques** les arènes suivantes :
- $\top = (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$
- $\bot = (\{0\}, 0 \mapsto \mathbf{O}, \emptyset, \emptyset)$
- $X_i = (\{i\}, i \mapsto \mathbf{O}, \emptyset, i \mapsto i)$.

Étant données deux arènes $A = (E_A, \lambda_A, \vdash_A, D_A)$ et $B = (E_B, \lambda_B, \vdash_B, D_B)$, on définit l'**arène produit** $A \times B = (E_{A\times B}, \lambda_{A\times B}, \vdash_{A\times B}, D_{A\times B})$ par :
- $E_{A\times B} = E_A + E_B$
- $\lambda_{A\times B} = [\lambda_A, \lambda_B]$
- $\vdash_{A\times B} = \vdash_A + \vdash_B$
- $D_{A\times B} = [D_A, D_B]$

et l'**arène flèche** $A \to B = (E_{A\to B}, \lambda_{A\to B}, \vdash_{A\to B}, D_{A\to B}))$ par :
- $E_{A\to B} = E_A + E_B$
- $\lambda_{A\to B} = [\bar{\lambda}_A, \lambda_B]$
- $\vdash_{A\to B} = \vdash_A + \vdash_B + (I_B \times I_A)$
- $D_{A\times B} = [D_A, D_B]$

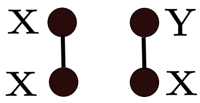
où $\bar{\lambda}(x) = \begin{cases} \mathbf{O} & \text{si } \lambda(x) = \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \text{si } \lambda(x) = \mathbf{O} \end{cases}$

3.2.2 Forêts

Définition 4 (forêt) *Une* ***forêt*** *est un ensemble ordonné* $(\mathcal{F}, \leq)$ *tel que, pour tout* y *dans* $\mathcal{F}$*, l'ensemble* $\{x \in \mathcal{F} \mid x \leq y\}$ *est fini et totalement ordonné.*

Une ***forêt décorée*** $(\mathcal{F}, \leq, \mathcal{D})$ *est une forêt* $(\mathcal{F}, \leq)$ *munie d'une fonction partielle* $\mathcal{D} : \mathcal{F} \rightharpoonup \mathcal{X}$.

Dans la présentation la plus courante des jeux HO, les types sont généralement interprétés par des forêts décorées : par exemple, l'interprétation du type $X \to (X \times Y)$ sera la forêt ci-dessous :



Il existe en fait une manière très simple de passer d'une arène à une forêt décorée. Cette construction est d'une certaine importance, car les structures arborescentes constitueront la base de notre travail sur les isomorphismes.

Soit $A = (E_A, \lambda, \vdash, D)$ une arène. On note $Chem(A)$ l'ensemble des **chemins** dans A, c'est-à-dire l'ensemble des suites $x_1 x_2 \dots x_n$ d'éléments de E_A tels que : $\vdash x_1$ et pour tout $i \in [1, n-1]$, $x_i \vdash x_{i+1}$.

Si on considère l'ordre préfixe $\preceq$ sur $Chem(A)$, défini par

$$x_1 \dots x_n \preceq x_1 \dots x_n x'_1 \dots x'_p$$

et qu'on pose

$$\mathcal{D}(x_1, \dots x_n) = D(x_n)$$

alors $(Chem(A), \preceq, \mathcal{D})$ est une forêt décorée, qui sera notée F_A.

On définit aussi l'opération $or : Chem(A) \to E_A$ par : $or(f) = x_n$ si $f = x_1 \dots x_n$. On notera que si $f, g \in Chem(A)$, alors

$$f \preceq g \Leftrightarrow or(f) \leq or(g)$$

$or(f)$ est appelée l'**origine** de f : l'idée est que le nœud f est en fait le coup $or(f)$ de l'arène auquel on ajouté une *histoire*, c'est-à-dire une liste de coups qui le justifient. Appliquer or revient alors à oublier cette histoire et à revenir au coup dont on est parti.

Enfin, on donne la définition d'un isomorphisme entre deux forêts décorées, car cette notion sera utilisée à la section 3.4 :

Définition 5 (isomorphisme de forêts décorées) *Un isomorphisme entre les forêts décorées $F_A = (\mathcal{F}_A, \leq_A, \mathcal{D}_A)$ et $F_B = (\mathcal{F}_B, \leq_B, \mathcal{D}_B)$ est une bijection $g : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ qui respecte la structure de forêt décorée, c'est-à-dire telle que :*
- *$x \leq_A y$ ssi $f(x) \leq_B f(y)$*
- *$\mathcal{D}_B \circ f = \mathcal{D}_A$.*

3.3 Stratégies, innocence, composition

Définition 6 (suite justifiée, partie) *Une **suite justifiée** sur une arène $A = (E_A, \lambda, \vdash, D)$ est la donnée d'une suite $s = x_1 \dots x_n$ d'éléments de E_A et d'une fonction partielle $f : \{1, \dots, n\} \rightharpoonup \{1, \dots, n\}$ telle que : si $f(i)$ n'est pas défini alors $\vdash x_i$, et si $f(i) = j$ alors $j < i$ et $x_j \vdash x_i$ (on dit alors que x_i **justifie** x_j).*

*Une **partie** est une suite justifiée $s = x_1 \dots x_n$ telle que : pour tout $1 \leq i \leq n$,*
- *si $\lambda(x_i) = \mathbf{P}$ alors $\lambda(x_{i+1}) = \mathbf{O}$*
- *$\lambda(x_i) = \mathbf{O}$ alors $\lambda(x_{i+1}) = \mathbf{P}$ et : $D(x_{i+1}) = D(x_i)$ si $D(x_i)$ est défini, $D(x_{i+1})$ n'est pas défini sinon.*

On note $\mathcal{P}_A$ (resp. $\mathcal{E}_A$) l'ensemble des parties (resp. l'ensemble des parties de longueur paire) sur A.

Soient s et t deux suites justifiées sur une arène A, on écrit $t \preceq s$ si t est un préfixe de s.

Définition 7 (stratégie) *Une* ***stratégie*** *σ sur une arène $A = (E_A, \lambda, \vdash, D)$ est un ensemble non vide de parties sur A de longueur paire, clos par préfixe de longueur paire et déterministe : si sx et sy sont deux parties de σ alors $sx = sy$.*

On note alors $\sigma : A$.

Définition 8 (stratégie totale) *Une stratégie $\sigma : A$ est dite* ***totale*** *si, pour toute partie $s \in \sigma$ si $sx \in \mathcal{P}_A$ alors il existe un coup y tel que $sxy \in \sigma$.*

Définition 9 (vue, innocence) *Soit s une partie, on définit sa* ***vue*** *$\ulcorner s \urcorner$ par :*

- $\ulcorner \epsilon \urcorner = \epsilon$
- $\ulcorner sx \urcorner = \ulcorner s \urcorner x$ *si* $\lambda(x) = \mathbf{P}$
- $\ulcorner sx \urcorner = x$ *si* $\vdash x$
- $\ulcorner sxty \urcorner = \ulcorner s \urcorner xy$ *si* $\lambda(y) = \mathbf{O}$ *et x justifie y.*

Une stratégie $\sigma : A$ est dite ***innocente*** *si, pour toute partie sx de σ, le coup qui justifie x est dans $\ulcorner s \urcorner$, et si on a : pour tout $sxy \in \sigma$, $t \in \sigma$, si tx est une partie sur A et $\ulcorner sx \urcorner = \ulcorner tx \urcorner$ alors $txy \in \sigma$.*

Définition 10 (restriction) *Soit s une suite justifiée sur une arène $A = (E_A, \lambda_A, \vdash_A, D_A)$, et soit $B = (E_B, \lambda_B, \vdash_B, D_B)$ une arène telle que $E_B \subseteq E_A$, $\leq_B \subseteq \leq_A$ et λ_A (resp. D_A) coïncide avec λ_B (resp. D_B) sur E_B.*

Alors on note $s\restriction_B$ la ***restriction*** *de s à B, c'est-à-dire la sous-suite justifiée de s obtenue en ne gardant que les coups de A, avec les pointeurs associés tant qu'on reste dans A.*

Cela nous permet de définir la stratégie **identité** :

$$id_A = \{s \in \mathcal{E}_{A_1 \to A_2} \mid \forall t \in \mathcal{E}_{A_1 \to A_2}, t \preceq s \Rightarrow t\restriction_{A_1} = t\restriction_{A_2}\}$$

où A_1 (resp. A_2) est la copie gauche (resp. droite) de A dans l'union disjointe $A + A$. Comme prouvé dans [Har99], c'est bien une stratégie sur $A \to A$.

Enfin, on définit la **composition** entre deux stratégies de la manière suivante :

Définition 11 (séquence d'interaction, composition) *Une* ***séquence d'interaction*** *entre A, B et C est une suite justifiée s sur $(A \to B) \to C$ telle que $s\restriction_{A,B}$, $s\restriction_{B,C}$ et $s\restriction_{A,C}$ soient des parties. L'ensemble des suites d'interaction entre A, B et C est noté* $\boldsymbol{Int}(A, B, C)$.

Soient σ et τ deux stratégies. On appelle ***composition*** *de σ et τ l'ensemble*

$$\sigma;\tau = \{u\restriction_{A,C} \mid u \in \boldsymbol{Int}(A, B, C),\ u\restriction_{B,C} \in \tau \text{ et } u\restriction_{A,B} \in \sigma\}$$

Un lemme utile, appelé **lemme de zipping**, nous est fourni dans [Har99] et [Lau05] :

Lemme 1 *Soient $\sigma : A \to B$, $\tau : B \to C$ et $s \in \sigma;\tau$ avec $s \neq \epsilon$. Il existe une unique séquence d'interaction $u \in \boldsymbol{Int}(A, B, C)$ se terminant par un coup dans A ou C telle que : $u{\upharpoonright_{A\to B}} \in \sigma$, $u{\upharpoonright_{B\to C}} \in \tau$ et $u{\upharpoonright_{A\to C}} = s$.*

On se référera à [Har99] pour la démonstration des résultats suivants :
- $\sigma;\tau$ est une stratégie sur $A \to C$
- $\sigma;\tau$ est innocente si σ et τ sont innocentes
- la composition est associative
- l'identité est élément neutre pour la composition.

On obtient alors une catégorie des jeux HO définie de la manière suivante :
- les objets sont les arènes
- un morphisme de A vers B est une stratégie innocente $\sigma : A \to B$
- l'identité sur A est $id_A : A \to A$
- la composée de $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to C$ est $\sigma;\tau : A \to C$.

On munit cette catégorie des morphismes suivants :
- stratégie triviale :

$$\diamond = \{\epsilon\} : A \to \top$$

- projections :

$$\pi_A = \{s \in \mathcal{E}_{A\times B_1 \to B_2} \mid \forall t \in \mathcal{E}_{A\times B_1\to B_2}, t \preceq s \Rightarrow t{\upharpoonright_{B_1}} = t{\upharpoonright_{B_2}}\} : A \times B \to B$$

$$\pi_B = \{s \in \mathcal{E}_{A_1\times B \to A_2} \mid \forall t \in \mathcal{E}_{A_1\times B\to A_2}, t \preceq s \Rightarrow t{\upharpoonright_{A_1}} = t{\upharpoonright_{A_2}}\} : A \times B \to A$$

- paire : si $\sigma : A \to B$ et $\tau : A \to C$,

$$\langle\sigma, \tau\rangle = \{s \in \mathcal{E}_{A\to(B\times C)} \mid s{\upharpoonright_{A\to B}} \in \sigma \text{ et } s{\upharpoonright_{A\to C}} \in \tau\} : A \to (B \times C)$$

- évaluation :

$$\begin{aligned} eval \;=\; \{ & s \in \mathcal{E}_{(A_1\to B_1)\times A_2\to B_2} \mid \forall t \in \mathcal{E}_{(A\to B)\times A\to B}, \\ & t \preceq s \Rightarrow t{\upharpoonright_{A_1}} = t{\upharpoonright_{A_2}} \wedge t{\upharpoonright_{B_1}} = t{\upharpoonright_{B_2}}\} \quad : (A \to B) \times A \to B \end{aligned}$$

- abstraction : si $\sigma : A \times B \to C$, $\Lambda(\sigma)$ est la stratégie sur $A \to (B \to C)$ dont les parties sont les mêmes que celles de σ mais vues comme des parties sur $A \to (B \to C)$.

qui en font une catégorie cartésienne fermée, comme prouvé dans [Har99].

Cette catégorie des jeux HO nous donne donc un modèle du λ-calcul simplement typé avec produits.

3.4 Isomorphismes de types

La motivation première de notre travail sur les isomorphismes de types provient d'un résultat d'Olivier Laurent [Lau05], dans le cas du modèle de jeux HO. On va redonner ce résultat et sa démonstration ici, car la technique de preuve est fondamentale et sera réutilisée dans le cadre des jeux du second ordre.

Le travail d'Olivier Laurent porte sur la caractérisation, par des moyens sémantiques, des isomorphismes de types dans le λ-calcul simplement typé avec produits (quelques extensions de ce calcul sont aussi traitées dans [Lau05]). Il s'agit de retrouver par ce moyen les résultats de Soloviev [Sol83], qui a prouvé que les isomorphismes de types étaient caractérisés par le système équationnel suivant :

$$\begin{array}{rcl} A \times (B \times C) & \simeq_\lambda & (A \times B) \times C \\ A \times B & \simeq_\lambda & B \times A \\ A \to (B \times C) & \simeq_\lambda & (A \to B) \times (A \to C) \\ A \to (B \to C) & \simeq_\lambda & (A \times B) \to C \\ A \times \top & \simeq_\lambda & A \\ A \to \top & \simeq_\lambda & \top \\ \top \to A & \simeq_\lambda & A \end{array}$$

L'idée de base est de se plonger dans le modèle de jeux : un isomorphisme de types y est alors interprété comme un couple de stratégies constituant un **isomorphisme de jeux** :

Définition 12 *Soient A et B deux arènes, un* ***isomorphisme de jeux*** *entre A et B est un couple de stratégies innocentes $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to A$ tel que $\sigma;\tau = id_A$ et $\tau;\sigma = id_B$.*

La première étape du travail est de montrer que les stratégies d'un isomorphisme de jeux se comportent d'une façon très similaire à la stratégie identité. Cette similarité est formalisée par la notion de **partie zig-zag** :

Définition 13 (partie zig-zag) *Une partie $s \in \mathcal{P}_{A \to B}$ est appelée* ***zig-zag*** *si*
- *chaque coup Joueur qui suit un coup Opposant dans A (resp. dans B) est joué dans B (resp. dans A)*
- *chaque coup Joueur qui suit un coup Opposant initial est justifié par ce dernier*
- *$s\restriction_A$ et $s\restriction_B$ ont les mêmes pointeurs.*

Si s est une partie zig-zag de longueur paire dans $A \to B$, on note $\check{s}$ l'unique partie zig-zag dans $B \to A$ telle que $\check{s}\restriction_A = s\restriction_A$ et $\check{s}\restriction_B = s\restriction_B$.

Le premier résultat à démontrer est donc le suivant :

Lemme 2 *Si (σ, τ) est un isomorphisme de jeux entre A et B, alors toutes les parties de σ sont zig-zag et $\tau = \{\check{s} \mid s \in \sigma\}$. De plus, σ et τ sont totales.*

Démonstration : Soit $s \in \sigma$ de longueur k, on va montrer par induction sur k que s est zig-zag et $\breve{s} \in \tau$.

Si $k = 0$ alors $s = \epsilon$ et le résultat est immédiat.

Si $k = k' + 2$, $s = tmn$ avec $t \in \sigma$, donc par hypothèse d'induction t est zig-zag et $\breve{t} \in \tau$. On peut alors construire inductivement une séquence d'interaction $u \in \mathbf{Int}(B, A, B)$ telle que $u\restriction_{A \to B} = t$ et $u\restriction_{B \to A} = \breve{t}$.

Supposons que m soit un coup dans B (le cas où m est un coup dans A est similaire). Il est alors impossible que n soit un coup dans B : on aurait $umn \in \mathbf{Int}(B, A, B)$ avec $umn\restriction_{A \to B} = s \in \sigma$ et $umn\restriction_{B \to A} = \breve{t} \in \tau$, d'où $umn\restriction_{B \to B} \in id_B$. Ce qui est impossible car $umn\restriction_{B \to B}$ contient dans ce cas deux coups successifs dans le même B.

Considérons les parties $I_1 = u\restriction_{B \to B}$ et $I_2 = I_1 mm \in id_B$. Comme $\tau; \sigma = id_B$, il existe $w \in \mathbf{Int}(B, A, B)$ tel que $w\restriction_{B \to B} = I_2$, $w\restriction_{A \to B} \in \sigma$ et $w\restriction_{B \to A} \in \tau$. On peut écrire $w = w_0 m n_1 \dots n_p m$ où $n_1, \dots, n_p$ sont des coups dans A et $w_0\restriction_{B \to B} = I_1$. Par le lemme de zipping, on a $w_0 = u$. Par ailleurs, $w_0\restriction_{B \to A} = \breve{t} n_1 \dots n_p m \in \tau$. La même preuve que ci-dessus nous assure que, si $\breve{t} n_1 m' \in \tau$ avec n_1 joué dans A, alors m' est joué dans B. D'où $p = 1$, et $w = umn_1m$. Comme par ailleurs $w\restriction_{A \to B} \in \sigma$, cela nous donne $n_1 = n$.

Si m est initial, on en déduit que n pointe sur m (sinon $w\restriction_{B \to B} \notin id_B$). Sinon, par innocence de σ, le coup qui justifie n dans s doit se trouver avant le justificateur de m, et ce doit être le coup juste avant car sinon le justificateur de m dans $w\restriction_{B \to A} = \breve{t}nm \in \tau$ ne sera pas dans $\ulcorner \breve{t}n \urcorner$, ce qui contredirait la condition d'innocence pour τ. Donc s est zig-zag, et par ailleurs $\breve{s} = \breve{t}nm \in \tau$.

On montre par le même raisonnement que si $t \in \tau$ alors t est zig-zag et $\breve{t} \in \sigma$. D'où $\tau = \{\breve{s} \mid s \in \sigma\}$.

Il reste à montrer que σ est totale. Soit $s \in \sigma$ et $sm \in \mathcal{P}_{A \to B}$ avec m coup dans B (le cas où m est un coup dans A est similaire). On construit la séquence d'interaction $u \in \mathbf{Int}(B, A, B)$ telle que $u\restriction_{A \to B} = s$ et $u\restriction_{B \to A} = \breve{s}$, et la partie $v \in id_B$ telle que $v\restriction_B = sm\restriction_B$. Comme $\tau; \sigma = id_B$, il existe $w \in \mathbf{Int}(B, A, B)$ tel que $w\restriction_{B \to B} = v$, $w\restriction_{A \to B} \in \sigma$ et $w\restriction_{B \to A} \in \tau$. Comme on n'a que des parties zig-zag dans σ et τ, cela nous donne $w = w_0 mnm$, et par le lemme de zipping on montre que $w_0 = u$. D'où $w\restriction_{A \to B} = smn \in \sigma$. σ est donc totale, et τ aussi. □

Une fois ce résultat préliminaire établi, on peut démontrer qu'un isomorphisme de jeu implique l'existence d'un isomorphisme de forêts décorées :

Proposition 2 *Si il existe un isomorphisme de jeux (σ, τ) entre deux arènes A et B, alors F_A et F_B sont isomorphes.*

Démonstration : Soit c un nœud de F_A, et $c_1, \dots, c_p$ la suite des ancêtres de c, avec $c_i \preceq c_j$ pour $i \leq j$.

On va construire, par induction sur p, une bijection $f : E_A \to E_B$ telle que : si $a_i = or(c_i)$ et $b_i = or(f(c_i))$ alors $b_1 a_1 a_2 b_2 b_3 a_3 \cdots \in \sigma$.

Si $p = 1$, on regarde l'unique partie dans τ de la forme $a_1 m$ (elle existe par totalité) et on pose $f(c_1) = m$.

Si $p = p'+1$ avec p' pair et non nul, on a par hypothèse d'induction $a_1 b_1 b_2 a_2 \dots b_{p'} a_{p'} \in \tau$, et par totalité il existe m tel que $a_1 b_1 b_2 a_2 \dots b_{p'} a_{p'} a_p m \in \tau$. On pose alors $f(c_p) = f(c_1) \dots f(c_{p'}) m$.

Si $p = p' + 1$ avec p' impair, on a par hypothèse d'induction $b_1 a_1 a_2 b_2 \dots b_{p'} a_{p'} \in \sigma$, et par totalité il existe m tel que $b_1 a_1 a_2 b_2 \dots b_{p'} a_{p'} a_p m \in \sigma$. On pose alors $f(c_p) = f(c_1) \dots f(c_{p'}) m$.

On peut associer de la même façon une fonction g à la stratégie τ, et on vérifie aisément que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des identités, donc f est une bijection. Par ailleurs, si $c_A \leq d_A$ (resp $c_B \leq d_B$) alors $f(c_A) \leq f(d_A)$ (resp. $f(c_B) \leq f(d_B)$) par définition des parties zig-zag, et $\mathcal{D}_B(f(a_p)) = \mathcal{D}_A(a_p)$ par définition d'une partie. □

Pour revenir aux isomorphismes de types du langage, on considère les **formes canoniques** définies comme suit :

Définition 14 (forme canonique) *On considère les types du λ-calcul simplement typé avec produits finis, qu'on équipe d'un produit n-aire : $\prod_{i=1}^{n} M_i = ((M_1 \times M_2) \times \dots) \times M_n$.*

*Un type A est appelé **forme canonique non triviale** s'il s'écrit :*

$$A = \prod_{i=1}^{n} N_i$$

avec $n > 0$, où chaque N_i est soit de la forme $\alpha_i \in \mathcal{X} \cup \{\perp\}$, soit de la forme $A_i \to \alpha_i$ avec A_i forme canonique non triviale et $\alpha_i \in \mathcal{X} \cup \{\perp\}$.

*Une **forme canonique** est soit le type $\top$, soit une forme canonique non triviale.*

Lemme 3 *Pour tout type A, il existe une forme canonique A' telle que $A \simeq_\lambda A'$ (où le système équationnel $\simeq_\lambda$ est défini à la figure 3.4).*

Démonstration : Les formes canoniques sont les formes normales du système de réduction suivant :

$$\begin{gathered}
A \times (B \times C) \Rightarrow (A \times B) \times C \\
A \to (B \times C) \Rightarrow (A \to B) \times (A \to C) \\
A \to (B \to C) \Rightarrow (A \times B) \to C \\
A \times \top \Rightarrow A \\
\top \times A \Rightarrow A \\
A \to \top \Rightarrow \top \\
\top \to A \Rightarrow A
\end{gathered}$$

Ces règles de réduction sont compatibles avec le système équationnel $\simeq_\lambda$: si $A \Rightarrow A'$ alors $A \simeq_\lambda A'$. De plus $\Rightarrow$ termine : si on pose

$$\begin{gathered}
\psi(A \times B) = \psi(A) + 2\psi(B) + 1 \\
\psi(A \to B) = \psi(A)\psi(B) + 1 \\
\psi(\top) = \psi(\perp) = \psi(Y) = 4
\end{gathered}$$

on a $\psi(A) > \psi(A')$ si $A \Rightarrow A'$. □

On est maintenant capable de montrer qu'une égalité sur les forêts décorées se ramène à une égalité sur les types :

Proposition 3 *Soient A et B deux types du λ-calcul simplement typé avec produits finis, interprétés respectivement dans notre modèle de jeux par les arènes A^* et B^*. Si F_{A^*} et F_{B^*} sont isomorphes, alors $A \simeq_\lambda B$.*

Démonstration : On considère que A et B sont sous forme canonique, et on note g la bijection entre les deux forêts. On raisonne par induction sur la structure de F_A :

- si F_A est vide, alors F_B est vide et $A \simeq_\lambda B$.
- si F_A est un arbre, alors A est de la forme α ou $A' \to \alpha$ avec $\alpha \in \mathcal{X} \cup \{\bot\}$ et $F_{A'}$ non vide : en effet, si $A = A_1 \times A_2$ alors F_A contient au moins deux racines ; donc $B = \beta$ (dans le cas où $A = \alpha$) ou $B = B' \to \beta$ avec $F_{B'}$ non vide (dans le cas où $A = A' \to \alpha$), et le fait que g préserve l'ordre et les décorations nous assure que $\beta = \alpha$. Par ailleurs, dans le cas où $A = A' \to \alpha$, on peut construire à partir de g une bijection entre $F_{A'}$ et $F_{B'}$ qui respecte le structure de forêt décorée, d'où par hypothèse d'induction $A' \simeq_\lambda B'$, donc $A \simeq_\lambda B$
- si F_A contient $k \geq 2$ arbres, alors $A = ((A_1 \times A_2) \times \cdots \times A_{k-1}) \times A_k$ avec F_{A_i} arbre pour $1 \leq i \leq k$: en effet, si $A = ((A_1 \times A_2) \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$ avec F_{A_i} arbre alors F_A contient n racines, d'où $n = k$. On a donc aussi $B = ((B_1 \times B_2) \times \cdots \times B_{k-1}) \times B_k$. L'isomorphisme entre F_A et F_B nous assure qu'on peut trouver une permutation $\phi : [1, k] \to [1, k]$ telle que, pour tout $1 \leq i \leq k$, $F_{A_{\phi(i)}}$ et F_{B_i} soient isomorphes. Par hypothèse d'induction, cela implique $A_{\phi(i)} \simeq_\lambda B_i$, donc par commutativité du produit on a $A \simeq_\lambda B$.

□

On peut finalement conclure par la caractérisation des isomorphismes dans ce langage :

Théorème 1 (Soloviev, Laurent) *Dans le λ-calcul simplement typé avec produits finis, les types A et B sont isomorphes si et seulement si $A \simeq_\lambda B$.*

Démonstration : Supposons qu'il existe une isomorphisme entre A et B, alors dans le modèle de jeu il existe un couple de stratégies (σ, τ) qui réalise un isomorphisme de jeux entre les arènes A^* et B^*, interprétations respectives de a et B dans le modèle. La proposition 2 nous permet alors de dire que F_{A^*} et F_{B^*} sont isomorphes, ce qui implique $A \simeq_\lambda B$ grâce à la proposition 3.

Pour montrer la réciproque, on vérifie que pour chaque équation de $\simeq_\lambda$ on peut construire un couple de termes qui réalise l'isomorphisme (cf. par exemple [DC95]). □

Le schéma général de la preuve est résumé sur la figure 3.1. Ce schéma sera réutilisé dans nos différents modèles pour parvenir à des caractérisations d'isomorphisme de types au second ordre.

3.5 Capture de la notion de contrôle

L'étude des isomorphismes de types pour $\lambda\mu 2$ nous conduira dans cette thèse à étudier l'extension de la sémantique des jeux à un calcul avec contrôle. On va donner ici les grandes idées de cette extension, sans détailler la construction du modèle, en

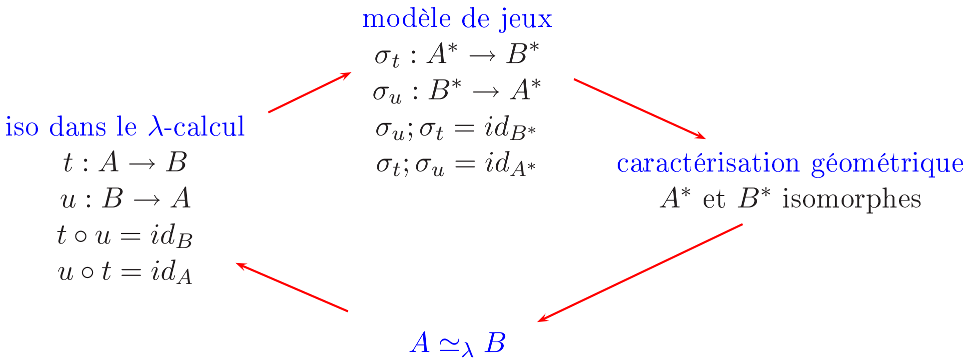


FIG. 3.1 – Preuve de caractérisation des isomorphismes de types

préambule à ce qui sera fait au chapitre 7 dans le cadre plus complexe des jeux du second ordre avec contrôle.

Les deux grandes nouveautés à prendre en compte dans un cadre avec contrôle sont :
- le fait que l'on interprète des séquents avec plusieurs conclusions à droite, c'est-à-dire de la forme $\Gamma \vdash t : A \mid \Delta$, et non plus $\Gamma \vdash t : A$
- l'interprétation de termes tels que `call/cc` qui n'existent pas en logique intuitionniste.

Le premier point va être résolu en introduisant un nouveau connecteur sur les types, la **disjonction** $\parr$.

La construction $A \parr B$ est habituelle en sémantique des jeux, elle consiste à relier deux à deux les coups initiaux de A et de B. Mais, si on réunit deux coups, la décoration du nouveau coup obtenu doit contenir les décorations des deux coups dont on est parti. La fonction de décoration nous génère donc des *listes* de décorations[3] pour chaque coup.

On a donc une nouvelle définition des arènes :

Définition 15 ($\parr$-arène) *Une* ***$\parr$-arène*** $A = (E_A, \lambda, \vdash, D)$ *est un ensemble* E_A *muni d'une fonction de* ***polarité*** $\lambda : E_A \to \{O, P\}$, *d'une fonction partielle de* ***décoration*** $D : E_A \rightharpoonup \mathcal{X}^*$ *et d'une relation de* ***justification*** $\vdash \subseteq E_A + (E_A \times E_A)$ *vérifiant les propriétés suivantes :*
- *il n'existe pas de cycle* $x \vdash x_1 \vdash \cdots \vdash x_n \vdash x$
- *si* $\vdash x$ *alors* $\lambda(x) = \mathbf{O}$
- *si* $x \vdash y$ *alors* $\lambda(x) \neq \lambda(y)$.

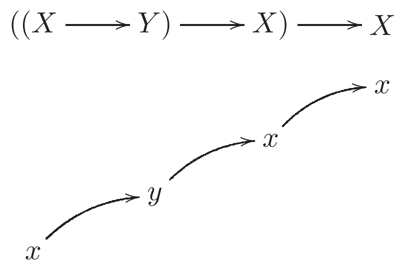
Les arènes atomiques, ainsi que les opérations produit et flèche, sont définies comme précédemment, modulo la transformation de D en une fonction de E_A vers $\mathcal{X}^*$. La construction $\parr$ est définie comme suit : si $A = (E_A, \lambda_A, \vdash_A, D_A)$ et $B = (E_B, \lambda_B, \vdash_B, D_B)$, on définit $A \parr B = (E_{A \parr B}, \lambda_{A \parr B}, \vdash_{A \parr B}, D_{A \parr B})$ par :

[3] Au chapitre 7 on préférera parler de multi-ensembles, mais ici il est plus simple de raisonner avec des listes.

- $E_{A\parr B} = (I_A \times I_B) + (E_A \backslash I_A) + (E_B \backslash I_B)$
- $\lambda_{A\parr B}(x) = \begin{cases} \mathbf{O} & \text{si } x \in I_A \times I_B \\ [\lambda_A, \lambda_B](x) & \text{sinon} \end{cases}$
- $x \vdash_{A\parr B} y$ ssi $x = (a,b) \wedge a \vdash_A y$ ou $x = (a,b) \wedge b \vdash_B y$ ou $x \vdash_A y$ ou $x \vdash_B y$
- $\mathcal{D}_{A\parr B}((a,b)) = \mathcal{D}_A(a) \cdot \mathcal{D}_B(b)$
  $\mathcal{D}_{A\parr B}(a) = \mathcal{D}_A(a)$ si $a \in E_A \backslash I_A$
  $\mathcal{D}_{A\parr B}(b) = \mathcal{D}_B(b)$ si $b \in E_B \backslash I_B$

Sur le deuxième point, l'approche que l'on va choisir a été suggérée par Olivier Laurent, dans un travail encore en cours d'écriture, à partir d'une réflexion sur les techniques de réalisabilité classique de Jean-Louis Krivine [Kri01]. Ce travail est aussi en lien avec celui de Jim Laird dans [Lai97] (les pointeurs de Laurent sont des cas particuliers de ceux de Laird).

Le terme `call/cc` est de type $((X \to Y) \to X) \to X$, c'est-à-dire qu'il réalise précisément la loi de Pierce qui permet de passer de la logique intuitionniste à la logique classique. Comment devrait se comporter la stratégie σ_{cc} correspondant à `call/cc` ? Dans les modèles de jeux usuels, cette stratégie est essentiellement décrite par la vue suivante :



Si on regarde pourquoi cette stratégie σ_{cc} n'existe pas dans le modèle défini à la section 3.3, on se rend compte que cela est lié à la définition d'une partie : en effet, étant donnée une partie $s = x_1 \dots x_n$, la condition :

$$\text{si } \lambda(x_i) = \mathbf{O} \text{ et que } D(x_i) \text{ est défini, alors } D(x_i) = D(x_{i+1})$$

n'est pas compatible avec ce qu'on veut donner comme définition à σ_{cc}. Non pas parce que la fonction D a maintenant $\mathcal{X}^*$ pour codomaine : d'ailleurs, dans l'arène correspondant à $((X \to Y) \to X) \to X$, tous les coups e sont tels que $D(e)$ se réduit à un seul élément. Mais parce que la partie viole réellement cette règle.

La démarche la plus naturelle consisterait à se débarrasser totalement de cette règle : c'est ce qui est fait usuellement (cf. par exemple [Har99]), et cela conduit à différencier les stratégies intuitionnistes des stratégies classiques par une condition plus sophistiquée, le *bon parenthésage*. L'idée est de considérer que les types de base sont composés d'une *question* et d'une ou plusieurs *réponses*, et que les stratégies intuitionnistes seront celles qui répondent toujours à la dernière question pendante.

Mais ce n'est pas l'optique qui sera adoptée ici, car elle a le défaut d'imposer des conditions sur les types de base, ce qui ne nous convient pas forcément (en particulier dans l'optique du second ordre, où les variables de type seront amenées à être substituées). L'idée qu'on privilégiera est la suivante : si on considère type $A = ((Z \to Y) \to X) \to X$, un terme de la logique classique (un $\lambda\mu$-terme par exemple) ne peut exister que dans les cas $Z = Y$ (c'est le terme $\lambda x.x(\lambda y.y)$) et $Z = X$ (c'est `call/cc`). Ce qui signifie que le dernier coup de la stratégie σ_{cc} fait forcément référence à un autre coup, qui porte la même décoration.

Plus précisément, si un coup x joué par **P** porte la liste de décorations $D(x) = X_{i_1} \cdot X_{i_2} \cdot \dots \cdot X_{i_n}$, il existe un pointeur pour chaque $j \in [1, n]$, appelé **pointeur de contrôle**, qui relie la j-ème variable de la liste $D(x)$ à une occurrence de X_{i_j} dans $D(y)$, où y est un coup **O** joué avant x.

Ainsi, on ne procède pas à une suppression, mais à un raffinement, de la règle portant sur les décorations. Formellement, on définit de nouvelles suites justifiées et parties de la manière suivante :

Définition 16 ($\parr$-suite justifiée, $\parr$-partie) *Une **$\parr$-suite justifiée** sur une $\parr$-arène $A = (E_A, \lambda, \vdash, D)$ est la donnée d'une suite $s = x_1 \dots x_n$ de coups de E_A et de deux fonctions partielles $f : \{1, \dots, n\} \rightharpoonup \{1, \dots, n\}$ et $f^{\parr} : \{1, \dots, n\} \times \mathbb{N} \rightharpoonup \{1, \dots, n\} \times \mathbb{N}$ telles que :*
- *si $f(i)$ n'est pas défini alors $\vdash x_i$*
- *si $f(i) = j$ alors $j < i$, $x_j \vdash x_i$*
- *si $f^{\parr}(i, t)$ est défini alors $t \leq n$ où n est la taille de la liste $D(x_i)$*
- *si $f^{\parr}(i, t) = (j, u)$ alors $j < i$ et $D(x_i)\langle t\rangle = D(x_j)\langle u\rangle$ où $L\langle t\rangle$ représente le k-ième élément de la liste L.*

*Une **$\parr$-partie** sur A est une suite justifiée $s = x_1 \dots x_n$ sur A telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$:*
- *si $\lambda(x_i) = \mathbf{P}$ alors $\lambda(x_{i+1}) = \mathbf{O}$ et, pour tout $t \in [1, n]$ où n est la taille de la liste $D(x_i)$, $f^{\parr}(i, t) = (j, u)$ avec $\lambda(x_j) = \mathbf{O}$*
- *si $\lambda(x_i) = \mathbf{O}$ alors $\lambda(x_{i+1}) = \mathbf{P}$ et, pour tout $t \in \mathbb{N}$, $f^{\parr}(i, t)$ n'est pas défini.*

La fonction f sera appelée **pointeur de justification**, tandis que $f^{\parr}$ sera le **pointeur de contrôle**.

On remarque que, si les pointeurs de contrôle sont conçus pour aller des coups **P** aux coups **O**, cette condition est imposée aux parties mais pas aux suites justifiées. Cela est lié au fait qu'on va utiliser les suites justifiées pour définir la composition de stratégies, et que dans ce cas la polarité des coups n'aura pas vraiment de sens, en particulier à l'endroit où se déroule l'interaction.

On définit la restriction $s\restriction_B$ d'une partie s à l'arène B sur le même modèle que précédemment, c'est-à-dire comme la sous-suite justifiée de s obtenue en ne gardant que les coups de B, avec les pointeurs de justification et de contrôle associés tant qu'on reste dans B. De même, la restriction $s\restriction_{A,B}$ est la sous-suite de s obtenue en ne gardant que les coups de A ou B, avec les pointeurs de justification et de contrôle héréditairement associés : cela signifie que x est justifié par y dans $s\restriction_{A,B}$ (via l'un des deux types de pointeur) si et seulement si x est héréditairement justifiée par y dans s et qu'il n'existe pas de coup z dans A ou B, joué après y dans s, et qui justifie héréditairement x.

Définition 17 ($\parr$-séquence d'interaction, composition) *Une **$\parr$-séquence d'interaction** entre A, B et C est une $\parr$-suite justifiée s sur $(A \to B) \to C$, sans pointeur de contrôle entre A et C et telle que $s\upharpoonright_{A,B}$, $s\upharpoonright_{B,C}$ et $s\upharpoonright_{A,C}$ soient des $\parr$-parties. L'ensemble des $\parr$-suites d'interaction entre A, B et C est noté $\boldsymbol{Int}^{\parr}(A, B, C)$.*

*Soient σ et τ deux $\parr$-stratégies. On appelle **composition** de σ et τ l'ensemble*

$$\sigma;\tau = \{u\upharpoonright_{A,C} \mid u \in \boldsymbol{Int}^{\parr}(A, B, C),\ u\upharpoonright_{B,C} \in \tau \text{ et } u\upharpoonright_{A,B} \in \sigma\}$$

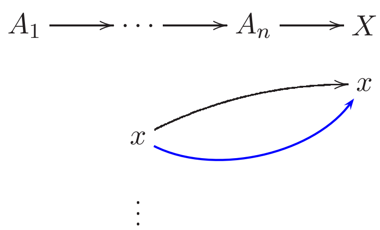
On n'étendra pas plus loin le développement de ces idées, et on ne présentera pas la construction complète du modèle, étant donné que toutes ces idées seront reprises au chapitre 7 dans un contexte avec second ordre.

On va simplement présenter informellement comment un terme clos du $\lambda\mu$-calcul simplement typé (sans les produits) peut être interprété dans ce cadre. Un terme clos $\beta\mu\rho$-réduit et correctement $\eta\theta$-expansé s'écrit sous la forme suivante :

$$t = \lambda x_1 \ldots \lambda x_n\ \mu\alpha.[\beta]\ y\ t_1\ \ldots\ t_p : A_1 \to \cdots \to A_n \to X$$

On remarque tout d'abord que la construction $\parr$ n'intervient pas dans le type : elle est indispensable pour construire un modèle du $\lambda\mu$-calcul, mais pas pour interpréter les termes clos.

Les vues de la stratégie σ_t interprétant ce terme peuvent être représentées de la façon suivante :



où les pointeurs noirs sont les pointeurs de justification et les pointeurs bleus les pointeurs de contrôle.

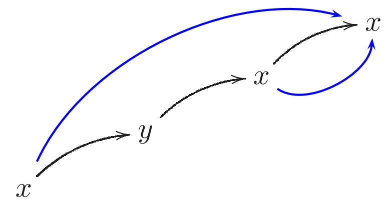
Le premier coup joué par **O** correspond à la partie $\lambda x_1 \ldots \lambda x_n\ \mu\alpha$ du terme : les x_i correspondront aux différents fils de la racine, et le α indiquera une cible potentielle pour un pointeur de contrôle. Le coup de **P** en réponse correspond à la partie $[\beta]\ y$: le y indique quel nœud est choisi et donne le pointeur de justification, tandis que le $[\beta]$ nous donne le pointeur de contrôle, dont la cible sera le nœud où **O** a joué $\mu\beta$ (si β est de type $\bot$, cela correspond à l'absence de pointeur). Le coup suivant d'**O** consiste à choisir un des t_i et à recommencer le même processus...

Ainsi, le terme `call/cc`, défini en $\lambda\mu$-calcul par

$$\texttt{call/cc} = \lambda x^{(X \to Y) \to X}.\mu\alpha^X.[\alpha]x(\lambda y^X \mu\beta^Y.[\alpha]y)$$

est maintenant décrit par la vue suivante :

$$((X \longrightarrow Y) \longrightarrow X) \longrightarrow X$$



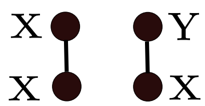
Les pointeurs de contrôle ont donc un équivalent très naturel dans la syntaxe, à savoir la liaison entre $\mu\alpha$ et $[\alpha]$. Ils seront par ailleurs un excellent outil dans le cadre du polymorphisme, car ils permettront de généraliser très facilement la notion centrale d'*extension copycat*.

3.6 Vers le second ordre

Avant de passer, dans les chapitres suivants, à la description formelle d'une sémantique des jeux du second ordre, on va tenter dans cette section d'expliquer et de motiver les choix qui ont été faits pour décrire ce modèle.

Intéressons-nous tout d'abord à l'interprétation des types. L'utilisation d'un ordre partiel, comme dans le présent chapitre, plutôt qu'une structure de forêt, peut déjà amener à de légitimes interrogations. Après tout, Dominic Hughes [Hug00] a bien choisi d'interpréter les types par des hyperforêts, structures qui seront d'ailleurs réintroduites dans la présente thèse car elles se révèlent primordiales pour l'étude des isomorphismes.

Considérons donc le type $X \to (X \times Y)$, dont on a déjà décrit précédemment la forêt associée :



Pourquoi ce type, composé à partir de trois types simples, est-il interprété par une forêt à quatre nœuds ? Parce que l'interprétation par des forêts revient en fait à considérer les formules du langage modulo un certain nombre d'égalités, telles que $A \to (B \times C) \simeq (A \to B) \times (A \to C)$ dans le cas présent, ou encore $A \to (B \to C) \simeq (A \times B) \to C$. Ces égalités paraissent inoffensives, puisqu'elles correspondent à des isomorphismes dans le langage. Mais lorsqu'on cherchera, dans la construction de modèles du second ordre, à définir une notion de substitution, on se heurtera à cette interprétation des formules modulo isomorphismes.

En effet, la substitution doit préserver les connecteurs, au sens où on devra avoir par exemple :

$$(A \times B)[C/X] = A[C/X] \times B[C/X]$$

$$(A \to B)[C/X] = A[C/X] \to B[C/X]$$

Il s'agit ici d'égalités, et non d'isomorphismes ! Par conséquent, considérer les formules modulo isomorphisme, autrement dit les mettre sous une forme canonique de forêt, risque de nous faire perdre cette égalité : si les forêts seront semblables sur le plan géométrique, les noms des coups qui les composent ne seront probablement pas identiques.

En fait, pour arriver à une véritable préservation des connecteurs par substitution, la meilleure solution est de faire en sorte que l'arène qui interprète un type porte en elle l'historique des connecteurs qui composent ce type. C'est pourquoi notre ordre partiel sera en fait défini sur la grammaire suivante :

$$a ::= \uparrow a \mid \ \downarrow a \mid \ ra \mid \ la \mid \ \star a \mid \ i \qquad (i \in \mathbb{N})$$

L'ensemble construit à partir de cette grammaire est notée $\mathbb{A}$.

Intuitivement, le symbole $\uparrow$ (resp. $\downarrow$) correspond à la partie gauche (resp. droite) du type flèche, l (resp. r) correspond à la partie gauche (resp. droite) du produit, le symbole $\star$ correspond à la quantification du second ordre les indices $j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ correspondent aux variables de type libres et l'indice 0 correspond soit à une variable de type liée, soit au type $\perp$.

Cette grammaire permet de ne plus utiliser d'union disjointe pour nos constructions d'arènes : ainsi, pour définir par exemple $A \to B$, au lieu de construire une union disjointe entre les éléments de A et ceux de B, on va explicitement ajouter un symbole $\uparrow$ devant les éléments de B, et un symbole $\downarrow$ devant les éléments de A.

Cette description a un autre avantage immédiat : on va être capable d'en tirer directement la fonction de polarité et la relation de justification : ainsi, puisque c'est le passage à gauche de la flèche qui inverse la polarité, $\lambda(a) = \mathbf{O}$ (resp. $\lambda(a) = \mathbf{P}$) si le nombre de symboles $\downarrow$ dans a est pair (resp. impair). De même, c'est la flèche qui génère la structure d'ordre entre les coups : $\vdash a$ si a ne comporte aucun symbole $\downarrow$, et $a \vdash b$ si $a = k_1 \dots k_n {\uparrow} p_1 \dots p_m$ et $a = k_1 \dots k_n {\downarrow} q_1 \dots q_{m'}$ où les k_i, les p_i et les q_i sont des symboles quelconques.

Mais si l'on se contente d'interpréter un type par un ensemble $\mathcal{O}_A$, muni de l'ordre partiel défini ci-dessus, on va perdre beaucoup d'information : les variables liées sont indifférenciables du type $\perp$, et surtout indifférenciables les unes des autres. Il nous faut ajouter un pointeur pour indiquer si une variable est liée, et si oui à quel endroit. On va donc définir une fonction $\mathcal{L}_A$ qui, à chaque élément de $\mathcal{O}_A$, associe soit une valeur neutre $\dagger$ si ce nœud ne correspond pas à une variable liée, soit un élément de $\mathbb{A}$ qui correspond à l'endroit où est liée la variable. Dans ce dernier cas, il s'agit de relier l'élément à une occurrence du symbole $\star$. Le fait que la variable soit liée dans la portée de son quantificateur correspond au fait que $\mathcal{L}_A(c)$ soit un préfixe de c.

Ainsi, une arène sera la donnée d'un ordre partiel $\mathcal{O}_A$ sur la grammaire définie ci-dessus, et d'une fonction $\mathcal{L}_A$ de $\mathcal{O}_A$ dans $\mathbb{A} \cup \{\dagger\}$.

Maintenant qu'on a expliqué comment construire les arènes, la question est d'arriver à jouer dans celles-ci : un coup ne sera plus simplement un élément de $\mathcal{O}_A$, mais une structure plus complexe. Considérons en effet un terme du système F à la Church : les substitutions $t\{B\}$ vont être interprétées par des symboles $\star^B$ où B est une arène, aux endroits ou se trouvaient les symboles $\star$.

Par ailleurs, considérons les termes suivants :

$$\lambda x^{\forall X.X}.\pi_1(x\{A \times B\}) : (\forall X.X) \to A$$
$$\lambda x^{\forall X.X}.x\{\forall Y.Y\}\{A\} : (\forall X.X) \to A$$

Ces deux exemples ont en commun que la façon dont le terme est construit n'est pas liée à la structure du type : dans le premier cas on a l'opérateur π_1 alors que le type ne contient pas de produit ; dans le deuxième cas on a deux symboles de substitution alors qu'on a une seule quantification dans le type.

Dans le modèle, cela va se traduire par la description des coups en plusieurs couches : l'une correspond à un élément de $\mathcal{O}_A$, modulo le remplacement des symboles $\star$ par des symboles $\star^B$ où B est une arène. L'autre couche est un coup joué dans une arène substituée, c'est-à-dire une arène B qui apparaît sur un symbole $\star^B$. Ainsi, les deux termes décrits ci-dessus peuvent se réécrire en

$$\lambda x^{\forall X.X}.\pi_1(x\{A \times B\}) : (\forall X.X) \to A$$
$$\lambda x^{\forall X.X}.x\{\forall Y.Y\}\{A\} : (\forall X.X) \to A$$

où la partie bleue correspond à la première couche et la partie rouge à la deuxième couche (la partie noire correspond à un coup précédemment joué par **O**).

Lorsqu'on joue un coup correspondant à une variable libre ou à $\perp$, le coup se réduira à la première couche (comme dans les jeux HO habituels) ; dans le cas contraire, les deux couches sont jouées et l'arène dans laquelle on joue la deuxième couche peut être déterminée à partir de la première couche. Plus précisément, si on note $\mathcal{A}$ est la fonction qui remplace les symboles $\star^B$ par $\star$, et $m_1[m_2]$ un coup constitué de deux couches m_1 et m_2, un coup dans une arène aura une des deux formes suivantes :

- soit m_1 avec $\mathcal{A}(m_1) \in \mathcal{O}_A$
- soit $m_1[m_2]$ avec $\mathcal{A}(m_1) \in \mathcal{O}_A$ et m_2 est un coup joué dans l'arène B, où B est déterminé par m_1 et $\mathcal{L}_A$.

Cette idée se retrouve de façons diverses dans les modèles de jeu déjà existants (sauf celui de Chroboczek où le second ordre n'existe qu'au niveau des types, pas au niveau des coups) :

- dans le modèle de Hughes, l'idée est que la deuxième couche est jouée dans un nouveau terrain de jeu : les deux joueurs jouent sur plusieurs plateaux différents, et un mouvement sur un plateau peut générer de nouveaux plateaux sur lesquels se prolonge le coup : un coup est donc une suite de mouvements successifs sur des plateaux différents
- dans le modèle de Murawski et Ong, un coup fait évoluer l'arène dans laquelle on joue : ainsi, on ne divise pas un coup en différentes parties, mais on a une suite d'évolutions
- le modèle d'Abramsky et Jagadesaan est le plus proche du nôtre au niveau de la description des coups ; il y a bien deux couches, mais il n'y est pas possible

de déterminer l'arène dans laquelle est joué le coup correspondant à la deuxième couche : n'importe quel coup peut y être joué a priori, les contraintes ne sont imposées que dans la définition des parties et ne sont pas les mêmes que dans notre modèle.

Notre description aura le double avantage d'être simple à manipuler et d'établir un lien précis entre les coups et l'arène où ils sont joués.

La structure de second ordre étant complètement codée dans les coups, les définitions de suite justifiée, de partie, de stratégie, etc, seront exactement les mêmes que dans le cas des jeux HO.

Chapitre 4

Sémantique des jeux sur une grammaire

Dans ce chapitre, on va introduire le formalisme central qui sera utilisé tout au long de la thèse. Il consiste en une grammaire à partir de laquelle peuvent être définis :

- un ordre partiel et une polarité, pour définir des arènes qui seront les *objets* de nos modèles
- une notion de stratégie et de composition, ce qui permettra de définir les *morphismes* de nos modèles et leur composition.

4.1 Grammaires de mots

Au cours de cette thèse, nous utiliserons plusieurs grammaires de la forme suivante :

$$\mu ::= \uparrow\mu \mid \ \downarrow\mu \mid \ \alpha_i\mu \mid \ j \qquad (i \in I, \ j \in \mathbb{N})$$

où I est un ensemble (dénombrable) quelconque. De telles grammaires seront appelées grammaires de mots. On notera par la suite $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots (aussi appelés **coups**) définis par cette grammaire.

Intuitivement, le symbole $\uparrow$ (resp. $\downarrow$) correspond à la partie gauche (resp. droite) d'une implication, les α_i correspondent aux connecteurs covariants (produit cartésien, quantification...), les indices $j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ correspondent aux variables de type libres et l'indice 0 correspond soit à une variable de type liée, soit au type $\perp$.

Sur une telle grammaire est définie automatiquement une fonction de **polarité** λ, à valeurs dans $\{\mathbf{O}, \mathbf{P}\}$:

- $\lambda(j) = \mathbf{O}$
- $\lambda(\uparrow\mu) = \lambda(\alpha_i\mu) = \lambda(\mu)$
- $\lambda(\downarrow\mu) = \overline{\lambda}(\mu)$

avec $\overline{\mathbf{O}} = \mathbf{P}$ et $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{O}$.

On donne aussi sur $\mathcal{M}$ une relation de **justification** $\vdash \ \subseteq \mathcal{M} \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{M})$:

– $\vdash j$
– si $\vdash \mu$ alors $\vdash \alpha_i\mu$, $\vdash \uparrow\mu$ et $\uparrow\mu \vdash \downarrow\mu$
– si $\mu \vdash \mu'$ alors $\alpha_i\mu \vdash \alpha_i\mu'$, $\uparrow\mu \vdash \uparrow\mu'$ et $\downarrow\mu \vdash \downarrow\mu'$.

qui induit un ordre partiel $\leq$ sur cette grammaire par fermeture réflexive et transitive. Si $\vdash \mu$ on dit que μ est **initial**.

Enfin, on définit la fonction $\sharp$ de **décoration** :
– $\sharp(j) = j$
– $\sharp(\uparrow\mu) = \sharp(\downarrow\mu) = \sharp(\alpha_i\mu) = \sharp(\mu)$.

On remarque que la donnée un ensemble $E \subseteq \mathcal{M}$, avec la polarité λ, l'ordre partiel $\vdash$ et la fonction de décoration $\sharp$ nous permettent de définir une arène au sens des jeux HO. La définition d'une arène du second ordre requiert cependant plus de données, elle sera explicitée au chapitre suivant.

On définit aussi l'opération de **substitution** $\mu[\mu']$, qui s'avérera utile pour traiter le polymorphisme :
– $j[\mu'] = \mu'$
– $\uparrow\mu[\mu'] = \uparrow(\mu[\mu'])$, $\downarrow\mu[\mu'] = \downarrow(\mu[\mu'])$ et $\alpha_i\mu[\mu'] = \alpha_i(\mu[\mu'])$.

On dit que μ_1 est un **préfixe** de μ_2 si il existe $\mu' \in \mathbf{M}$ tel que $\mu_2 = \mu_1[\mu']$. On note alors $\mu_1 \sqsubseteq^p \mu_2$

4.2 Parties et stratégies

Les grammaires de mots ont suffisamment de structure pour nous permettre d'introduire les notions élémentaires de la sémantique des jeux : parties, stratégies, innocence, et, dans un deuxième temps, composition.

Définition 18 (suite justifiée, partie) *Une* ***suite justifiée*** *sur une grammaire de mots est la donnée d'une suite $s = \mu_1 \ldots \mu_n$ de coups et d'une fonction partielle $f : \{1, \ldots, n\} \rightharpoonup \{1, \ldots, n\}$ telle que : si $f(i)$ n'est pas défini alors $\vdash \mu_i$, et si $f(i) = j$ alors $j < i$ et $\mu_j \vdash \mu_i$ (on dit alors que m_j* ***justifie*** *m_i).*

Une ***partie*** *sur une grammaire donnée est une suite justifiée $s = \mu_1 \ldots \mu_n$ telle que : pour tout $1 \leq i \leq n$, si $\lambda(\mu_i) = \mathbf{P}$ alors $\lambda(\mu_{i+1}) = \mathbf{O}$ et si $\lambda(\mu_i) = \mathbf{O}$ alors $\lambda(\mu_{i+1}) = \mathbf{P}$ et $\sharp(\mu_i) = \sharp(\mu_{i+1})$.*

On note $\mathbb{E}$ l'ensemble des suites justifiées de longueur paire. Soient s et s' deux suites justifiées, on note $t \preceq s$ si t est un préfixe de s. Enfin, étant donnés deux coups m et n d'une suite justifiée s, on dit que m **justifie héréditairement** n s'il existe des coups $m_1, \ldots, m_p$ avec $p > 1$ tels que : $m = m_1$, $m_p = n$ et m_i justifie m_{i+1} pour $1 \leq i < p$.

Définition 19 (stratégie) *Une* ***stratégie*** *σ sur une grammaire donnée est un ensemble non vide de parties de longueur paire, clos par préfixe de longueur paire et déterministe : si $s\mu$ et $s\nu$ sont deux parties de σ alors $s\mu = s\nu$.*

Définition 20 (vue, innocence) *Soit s une partie, on définit sa* ***vue*** *$\ulcorner s \urcorner$ par :*

– $\ulcorner \epsilon \urcorner = \epsilon$
– $\ulcorner s\mu \urcorner = \ulcorner s \urcorner \mu$ *si* $\lambda(\mu) = \mathbf{P}$
– $\ulcorner s\mu \urcorner = \mu$ *si* $\vdash \mu$
– $\ulcorner s\mu t\nu \urcorner = \ulcorner s \urcorner \mu\nu$ *si* $\lambda(\nu) = \mathbf{O}$ *et* μ *justifie* ν.

Une stratégie σ *est dite* ***innocente*** *si, pour toute partie* sn *de* σ, *le coup qui justifie* n *est dans* $\ulcorner s \urcorner$, *et si on a : pour tout* $smn \in \sigma$, $t \in \sigma$, *si* tm *est une partie et* $\ulcorner sm \urcorner = \ulcorner tm \urcorner$ *alors* $tmn \in \sigma$.

Définition 21 (bi-vue) *Une* ***bi-vue*** *est une suite justifiée telle que chaque coup de la suite est justifié par son prédécesseur.*

4.3 Composition

La composition entre deux stratégies est habituellement définie à partir de trois arènes A, B et C. Ici les arènes n'apparaissent pas explicitement, mais grâce aux symboles $\uparrow$ et $\downarrow$ on va pouvoir les rendre implicites, et donc définir la composition.

4.3.1 Format

Soit $\zeta \in (\{\uparrow, \downarrow\} \cup \{\alpha_i\}_{i \in I})^*$, un coup μ est dit de **format** ζ si $\mu = \zeta\mu'$ pour un certain coup μ'.

Soit Σ un ensemble fini d'éléments $\zeta_j \in (\{\uparrow, \downarrow\} \cup \{\alpha_i\}_{i \in I})^*$. Une suite justifiée est dite de format Σ si chacun de ses coups est de format ζ_j pour un certain j. Une stratégie est de format Σ si chacune de ses parties est de format Σ.

Dans le cas où $\Sigma = \{\uparrow, \downarrow\}$, on dit que la suite justifiée (ou la stratégie) est de **format flèche**.

4.3.2 Restriction

Considérons une suite justifiée $s = \mu_1 \ldots \mu_n$, on définit la suite justifiée $s\!\upharpoonright_\zeta$ comme la restriction de s aux coups de format ζ où le préfixe ζ a été effacé, et les pointeurs sont définis par : si $\mu_i = \zeta\mu'_i$ est justifiée par $\mu_j = \zeta\mu'_j$ dans s, alors l'occurrence correspondante de μ'_i dans $s\!\upharpoonright_\zeta$ est justifiée par μ'_j.

Soit $\zeta, \xi \in \{\uparrow, \downarrow, r, l\}^*$, considérons la restriction s' de s aux coups de format ζ et aux coups de format ξ héréditairement justifiés par un coup de format ζ. La suite justifiée $s\!\upharpoonright_{\zeta,\xi}$ est alors définie comme la suite s' où chaque préfixe ζ (resp. ξ) est remplacé par $\uparrow$ (resp. $\downarrow$), et où les pointeurs sont définis comme suit :

– si $\mu_i = \zeta\mu'_i$ (resp. $\mu_i = \xi\mu'_i$) est justifié par $\mu_j = \zeta\mu'_j$ (resp. $\mu_j = \xi\mu'_j$) dans s, alors l'occurrence correspondante de $\uparrow\mu'_i$ (resp. $\downarrow\mu'_i$) dans $s\!\upharpoonright_{\zeta,\xi}$ est justifiée par $\uparrow\mu'_j$ (resp. $\downarrow\mu'_j$)
– si $\mu_i = \xi\mu'_i$ est héréditairement justifié par un coup $\mu_j = \zeta\mu'_j$ dans s avec $\vdash \mu'_i$ et $\vdash \mu'_j$ (μ'_j est alors nécessairement unique), alors l'occurrence correspondante de $\downarrow\mu'_i$ est justifiée par l'occurrence correspondante de $\uparrow\mu'_j$.

On remarque à travers cette définition qu'il est souvent utile de considérer une partie modulo renommage de ses coups. De façon générale, étant donnés une suite justifiée s et des formats $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tels que : si γ_i préfixe de γ_j alors $i = j$, on notera

$$s\{\delta_1(-)/\gamma_1(-), \ldots, \delta_n(-)/\gamma_n(-)\}$$

la suite obtenue à partir de s en remplaçant les coups de la forme $\gamma_1\mu$ par $\delta_1\mu$, les coups de la forme $\gamma_2\mu$ par $\delta_2\mu$, etc. à condition qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur les pointeurs. On notera aussi parfois $\mu\{\delta(-)/\gamma(-)\}$ le coup $\delta\nu$ si $\mu = \gamma\nu$.

4.3.3 Interaction

Une fois la restriction définie, il est possible de définir l'interaction comme dans les jeux HO :

Définition 22 (séquence d'interaction, composition) *Une* ***séquence d'interaction*** $s = \mu_1 \ldots \mu_n$ *est une suite justifiée de format* $\{\uparrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow\}$ *telle que* $s\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow}$, $s\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$ *et* $s\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ *sont des parties. L'ensemble des suites d'interaction est noté* ***Int****.*

Soient σ *et* τ *deux stratégies. On appelle* ***composition*** *de* σ *et* τ *l'ensemble*

$$\sigma;\tau = \{u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \mid u \in \textbf{\textit{Int}},\ u\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tau \text{ et } u\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma\}$$

Proposition 4 $\sigma;\tau$ *est une stratégie, de format flèche. De plus, si* σ *et* τ *sont innocentes alors* $\sigma;\tau$ *est innocente. Enfin, la composition est associative :*

$$(\sigma;\tau);\rho = \sigma;(\tau;\rho)$$

Démonstration : On va introduire ici une idée qui sera réutilisée à plusieurs reprises dans cette thèse : comme la démonstration peut se faire de la même manière que dans le cas des jeux HO (cf. [Har99]), on propose, non pas de la réécrire, mais d'effectuer une traduction vers le cas des jeux HO.

Remarquons tout d'abord que la définition de la composition n'utilise que les parties de σ et τ de format flèche. On peut donc considérer sans perte de généralité que les deux stratégies sont de format flèche.

On considère alors trois copies de $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$, vues comme des arènes et on va identifier les nœuds de format $\uparrow$ avec $\mathcal{M}_3$, les nœuds de format $\downarrow\uparrow$ avec $\mathcal{M}_2$ et nœuds de format $\downarrow\downarrow$ avec $\mathcal{M}_1$. On peut alors considérer σ comme une stratégie HO sur $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$, moyennant un renommage des coups de format $\downarrow\uparrow$ en coups de format $\uparrow$ et des coups de format $\downarrow\downarrow$ en coups de format $\downarrow$: on notera σ^{HO} la partie ainsi renommée. De même, on peut considérer τ comme une stratégie HO sur $\mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3$ moyennant un renommage des coups de format $\downarrow\uparrow$ en coups de format $\downarrow$, et $\sigma;\tau$ comme un ensemble de parties HO sur $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_3$ moyennant un renommage des coups de format $\downarrow\downarrow$ en coups de format $\downarrow$. Or ces renommages sont précisément ceux impliqués par les restrictions $s \mapsto s\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$, $s \mapsto s\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow}$ et $s \mapsto s\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ respectivement.

On a donc $\mathbf{Int} = \mathbf{Int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3)$ et :

$$\begin{aligned}(\sigma;\tau)^{HO} &= \{u\restriction_{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_3} \mid\ u \in \mathbf{Int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3),\ u\restriction_{\mathcal{M}_2,\mathcal{M}_3}\in \tau^{HO}\ \textit{et}\ u\restriction_{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2}\in \sigma^{HO}\}\\ &= \sigma^{HO};\tau^{HO}\end{aligned}$$

où σ^{HO}, τ^{HO} et $(\sigma;\tau)^{HO}$ sont les ensembles de parties HO considérées après renommage.

$(\sigma;\tau)^{HO}$ est donc une stratégie HO, donc un ensemble non vide de parties de longueur paire, clos par préfixe pair et déterministe. Donc $\sigma;\tau$ est bien une stratégie sur $\mathcal{M}$.

Par ailleurs $(\sigma^{HO};\tau^{HO});\rho^{HO} = \sigma^{HO};(\tau^{HO};\rho^{HO})$ donc $(\sigma;\tau);\rho = \sigma;(\tau;\rho)$.

Enfin, σ^{HO} est une stratégie HO innocente si et seulement si σ est une stratégie innocente sur $\mathcal{M}$, donc $\sigma;\tau$ est innocente si σ et τ le sont. $\square$

La traduction $\sigma \mapsto \sigma^{HO}$ vers les jeux HO que l'on a utilisée dans cette preuve vérifie les propriétés suivantes, qui seront réutilisées par la suite :

- $(\sigma;\tau)^{HO} = \sigma^{HO};\tau^{HO}$
- si $\sigma^{HO} = \tau^h o$ alors $\sigma = \tau$
- σ^{HO} est innocente si et seulement si σ est innocente.

Le statut formel de cette traduction sera précisé à la section 5.2.3.

Chapitre 5

Système F à la Church

5.1 Arènes

Dans cette section on va introduire la notion d'**arène**, qui servira à interpréter les types. Nous n'utilisons pas directement la notion d'**hyperforêt**, développée par Hughes dans [Hug00], car les différentes opérations requises, notamment la substitution, sont délicates à définir dans le contexte des hyperforêts, alors que dans notre cadre ce sera presque immédiat. Cependant, la structure très géométrique des hyperforêts étant utile à nos démonstrations, on les retrouvera de manière indirecte.

La définition d'une arène sera à première vue relativement similaire à la notion d'ensemble d'occurrences introduite par Abramsky [AJ03], et c'est pourquoi nous avons gardé cette terminologie pour désigner la grammaire. Mais elle s'en distingue par quelques apports importants :

- une arène contient toute l'information nécessaire pour retrouver la formule à laquelle elle correspond ; en particulier, on sera capable, à partir de l'arène, de construire de façon géométrique l'hyperforêt correspondant à la formule
- surtout, la notion d'arène permettra de définir de façon très simple les **coups** joués dans cette arène : ceux-ci correspondront à la notion de *jeu évolutif* proposée par Murawski et Ong [MO01], mais dans notre contexte la notion d'évolution n'aura pas besoin d'être explicitée
- enfin, il existe une manière directe, non inductive, de construire l'interprétation d'une formule à partir de son arbre syntaxique.

On définit la grammaire des **occurrences** :

$$a ::= \uparrow a \mid \ \downarrow a \mid \ ra \mid \ la \mid \ \star a \mid \ i \qquad (i \in \mathbb{N})$$

L'ensemble de toutes les occurrences est noté $\mathbb{A}$.

5.1.1 Interprétation d'une formule, arène du second ordre

Un **arbre syntaxique** est un arbre, étiqueté au niveau des nœuds et des arêtes, et équipé de flèches liant certaines feuille à certains nœud. Soit A une formule, son arbre syntaxique T_A est défini comme suit :

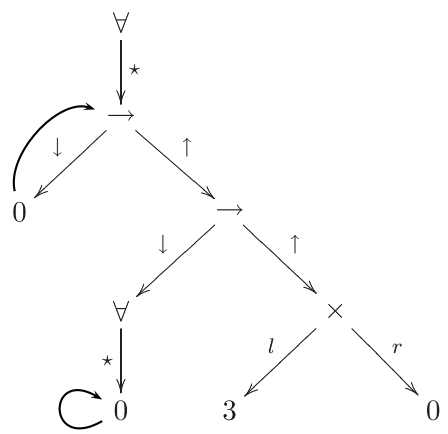
- $T_\top$ est l'arbre vide
- $T_\bot$ est réduit à une feuille étiquetée par 0
- T_{X_i} est réduit à une feuille étiquetée par i
- $T_{A\to B}$ est constitué d'une racine $\to$ avec pour fils deux sous-arbres T_A et T_B ; l'arête entre $\to$ et T_A (resp. T_B) est étiquetée par $\uparrow$ (resp. $\downarrow$) ; si l'un des sous-arbres est vide, l'arête étiquetée n'a pas lieu d'être
- $T_{A\times B}$ est constitué d'une racine $\times$ avec pour fils deux sous-arbres T_A et T_B ; l'arête entre $\times$ et T_A (resp. T_B) est étiquetée par l (resp. r) ; si l'un des sous-arbres est vide, l'arête étiquetée n'a pas lieu d'être
- $T_{\forall X_i.A}$ est constitué d'une racine $\forall$ avec un unique fils T, qui est obtenu à partir de T_A en reliant chaque feuille étiquetée par i à la racine de T_A, et en réétiquetant chacune de ces feuilles par 0 ; l'arête entre $\forall$ et T est étiquetée par $\star$; si T est vide, l'arête étiquetée n'a pas lieu d'être.

Une branche de cet arbre allant de la racine à une feuille est appelée **branche maximale**, et sera décrite par la liste des étiquettes de ses arêtes, avec l'étiquette de la feuille placée au bout de la liste. Une branche maximale est donc décrite par une occurrence.

L'ensemble $\mathcal{O}_A$ des occurrences d'une formule A est l'ensemble des branches maximales de T_A. On définit une fonction de **connexion** $\mathcal{L}_A : \mathcal{O}_A \to \mathbb{A} \cup \{\dagger\}$ comme suit : si la feuille atteinte par la branche maximale a est reliée par une flèche au nœud c, alors $\mathcal{L}_A(a)$ est la liste des étiquettes des arêtes présentes sur le chemin depuis la racine jusqu'à c, avec un 0 placé au bout de la liste ; sinon, $\mathcal{L}_A(a) = \dagger$.

La structure $(\mathcal{O}_A, \mathcal{L}_A)$ est appelée une **arène** du second ordre. Par la suite, on notera cette arène directement A, sans risque de confusion.

Exemple : À la formule $A = \forall X_1.(X_1 \to ((\forall X_2.X_2) \to (X_3 \times \bot)))$ est associé l'arbre syntaxique suivant :



Son ensemble d'occurrences est donc :

$$\mathcal{O}_A = \{\star\!\downarrow\!0\ ,\ \star\!\uparrow\downarrow\star 0\ ,\ \star\!\uparrow\uparrow\! l3\ ,\ \star\!\uparrow\uparrow\! r0\}$$

Et sa fonction de connexion est donnée par :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_A(\star\!\downarrow\!0) & = & \star 0 \\ \mathcal{L}_A(\star\!\uparrow\downarrow\star 0) & = & \star\!\uparrow\downarrow\star 0 \\ \mathcal{L}_A(\star\!\uparrow\uparrow\! l3) & = & \dagger \\ \mathcal{L}_A(\star\!\uparrow\uparrow\! r0) & = & \dagger \end{cases}$$

Définition 23 (arène) *Une* ***arène*** *(du second ordre) A est définie par un ensemble fini $\mathcal{O}_A \subseteq \mathbb{A}$ et une fonction de* ***connexion*** *$\mathcal{L}_A : \mathcal{O}_A \to \mathbb{A} \cup \{\dagger\}$, avec les conditions suivantes :*

- *$\mathcal{O}_A$ est* ***non-ambigu*** *: $\forall a, a' \in \mathcal{O}_A$, si $a \sqsubseteq^p a'$ alors $a = a'$*
- *$\mathcal{L}_A$ est* ***valide*** *: pour tout $a \in \mathcal{O}_A$, soit $\mathcal{L}_A(a) = \dagger$, soit $\mathcal{L}_A(a) = a'[\star 0] \sqsubseteq^p a$*
- *$\mathcal{L}_A$ est* ***liante*** *: pour tout $a \in \mathcal{O}_A$, si $\sharp(a) \neq 0$ alors $\mathcal{L}_A(a) = \dagger$*

L'ensemble des arènes est noté $\mathcal{G}$.

On note $FTV(A) = \{X_i \in \mathcal{X} \mid\ \exists a \in \mathcal{O}_A, \sharp(a) = i\}$.

5.1.2 Interprétation alternative, inductive, d'une formule

On définit les constructions suivantes sur les arènes :

(atomes) $\top = (\emptyset, \emptyset)$ $\quad \bot = (\{0\}, 0 \mapsto \dagger)$ $\quad X_i = (\{i\}, i \mapsto \dagger)$ pour $i > 0$

(produit) si $A, B \in \mathcal{G}$, on définit $A \times B$ par :

- $\mathcal{O}_{A\times B} = \{la \mid\ a \in \mathcal{O}_A\} \cup \{rb \mid\ b \in \mathcal{O}_B\}$
- $\mathcal{L}_{A\times B}(la) = \begin{cases} \dagger & \text{si } \mathcal{L}_A(a) = \dagger \\ l\mathcal{L}_A(a) & \text{sinon} \end{cases} \qquad \mathcal{L}_{A\times B}(rb) = \begin{cases} \dagger & \text{si } \mathcal{L}_B(b) = \dagger \\ r\mathcal{L}_B(b) & \text{sinon} \end{cases}$

(flèche) si $A, B \in \mathcal{G}$, on définit $A \to B$ par :

- $\mathcal{O}_{A\to B} = \{\downarrow\! a \mid\ a \in \mathcal{O}_A\} \cup \{\uparrow\! b \mid\ b \in \mathcal{O}_B\}$
- $\mathcal{L}_{A\to B}(\downarrow\! a) = \begin{cases} \dagger & \text{si } \mathcal{L}_A(a) = \dagger \\ \downarrow\!\mathcal{L}_A(a) & \text{sinon} \end{cases} \qquad \mathcal{L}_{A\to B}(\uparrow\! b) = \begin{cases} \dagger & \text{si } \mathcal{L}_B(b) = \dagger \\ \uparrow\!\mathcal{L}_B(b) & \text{sinon} \end{cases}$

(quantification) si $A \in \mathcal{G}$ et $i > 0$, on définit $\forall X_i.A$ par :

- $\mathcal{O}_{\forall X_i.A} = \{\star a[0] \mid\ a \in A \wedge \sharp(a) = i\} \cup \{\star a \mid\ a \in A \wedge \sharp(a) \neq i\}$
- $\mathcal{L}_{\forall X_i.A}(\star a) = \begin{cases} \dagger & \text{si } \mathcal{L}_A(a) = \dagger \\ \star\mathcal{L}_A(a) & \text{sinon} \end{cases}$

  $\mathcal{L}_{\forall X_i.A}(\star a[0]) = \star 0$

Ces constructions engendrent une interprétation inductive des formules du second ordre : le lecteur pourra vérifier, par induction sur l'arbre syntaxique, qu'elle coïncide avec la définition précédente.

Finalement, on définit une opération de substitution :

Définition 24 (substitution) *Soient $A, B \in \mathcal{G}$. La* ***substitution*** *de X_i par B dans A est l'arène $A[B/X_i]$ donnée par :*

- $\mathcal{O}_{A[B/X_i]} = \{a \in \mathcal{O}_A \mid \ \sharp(a) \neq i\} \cup \{a[b] \mid \ a \in \mathcal{O}_A \wedge \sharp(a) = i \wedge b \in \mathcal{O}_B\}$
- $\mathcal{L}_{A[B/X_i]}(a) = \mathcal{L}_A(a) \qquad \mathcal{L}_{A[B/X]}(a[b]) = \begin{cases} \dagger & si\ \mathcal{L}_B(b) = \dagger \\ a[\mathcal{L}_B(b)] & sinon \end{cases}$

On peut vérifier par induction sur A que cette opération coïncide avec la substitution sur les formules.

5.2 Jeux du second ordre

5.2.1 Coups, parties et stratégies

On va maintenant décrire la façon dont **O** et **P** peuvent jouer sur une arène donnée.

On introduit une grammaire des **coups (du second ordre)** :

$$m ::= \uparrow m \mid \ \downarrow m \mid \ rm \mid \ lm \mid \ \star^B m \mid \ i \qquad (B \in \mathcal{G}, i \in \mathbb{N})$$

Ces coups forment l'ensemble $\mathbb{M}$.

Un lien évident entre coups et occurrences est donné par l'opération d'**anonymité** $\mathcal{A} : \mathbb{M} \to \mathbb{A}$:

- $\mathcal{A}(i) = i$ pour $i \geq 0$
- $\mathcal{A}(\star^A m) = \star\mathcal{A}(m)$
- $\mathcal{A}(\alpha m) = \alpha\mathcal{A}(m)$ pour $\alpha \in \{r, l, \uparrow, \downarrow\}$.

On peut étendre la fonction $\mathcal{A}$ aux suites justifiées : $\mathcal{A}(m_1 \dots m_n) = \mathcal{A}(m_1) \dots \mathcal{A}(m_n)$.

On considère aussi une opération d'**extraction** $\frac{m}{a}$ définie partiellement pour $m \in \mathbb{M}$, $a \in \mathbb{A}$:

- $\frac{\star^B m}{\star 0} = B$
- si $\frac{m}{a}$ est défini, $\frac{\star^B m}{\star a} = \frac{\beta m}{\beta a} = \frac{m}{a}$ si $\beta \in \{\uparrow, \downarrow, r, l\}$.

Étant donnée une arène A, on remarque que la propriété de validité de $\mathcal{L}_A$ implique que $\frac{m_1}{\mathcal{L}_A(c)}$ est défini lorsque $c = \mathcal{A}(m_1)$.

On peut maintenant expliquer comment on joue sur une arène :

Définition 25 (coup dans une arène) *Soit A une arène. Son ensemble de coups $\mathcal{M}_A \subseteq \mathbb{M}$ est donné par la relation $m \in \mathcal{M}_A$ définie par induction sur m :*

- *si $\mathcal{A}(m) = a \in \mathcal{O}_A$ et $\mathcal{L}_A(a) = \dagger$ alors $m \in \mathcal{M}_A$*

– *si* $m = m_1[m_2]$, *avec* $\mathcal{A}(m_1) = a \in \mathcal{O}_A$, $\mathcal{L}_A(a) \neq \dagger$ *et* $m_2 \in \mathcal{M}_B$ *où* $B = \frac{m_1}{\mathcal{L}_A(a)}$, *alors* $m \in \mathcal{M}_A$.

La relation $m \in \mathcal{M}_A$ est bien définie, car dans le second cas de la définition on a nécessairement au moins un symbole $\star^B$ dans m_1, donc la taille de m_2 est strictement plus petite que la taille de $m_1[m_2]$. On a donc bien une définition inductive.

Exemple : Reprenons le type $A = \forall X_1.(X_1 \to ((\forall X_2.X_2) \to (X_3 \times \bot)))$ de l'exemple précédent. Une des façons de "jouer un coup" dans cette arène[1] consiste à instancier la variable X_1 par un type B (prenons par exemple $B = \bot \times X_3$), d'aller ensuite à gauche de la flèche et de jouer un coup dans B.

Cela donne par exemple le coup $m = \star^B{\downarrow}r3$. On peut vérifier, que ce coup appartient bien à $\mathcal{M}_A$: $m = m_1[m_2]$ avec $m_1 = \star^B{\downarrow}0$ et $m_2 = r3$. On a bien $\mathcal{A}(m_1) = \star{\downarrow}0 \in \mathcal{O}_A$, $\mathcal{L}_A(\star{\downarrow}0) = \star 0$ et $\frac{\star^B{\downarrow}0}{\star 0} = B$. Par ailleurs, $\mathcal{A}(m_2) = r3 \in \mathcal{O}_B$ et $\mathcal{L}_B(m_2) = \dagger$ donc $m_2 \in \mathcal{M}_B$ (première instance de la définition). D'où $m \in \mathcal{M}_B$ (deuxième instance de la définition).

Intuitivement, la situation est la suivante :
- m_1 est la portion du coup jouée dans A, et $c = \mathcal{A}(m_1)$ est l'occurrence correspondante
- $\mathcal{L}_a(c)$ indique à quel endroit le quantificateur associé à c a été **instancié** par une arène
- $\frac{m_1}{\mathcal{L}_A(c)} = B$ indique par quelle arène il a été instancié
- m_2 est la portion du coup jouée dans B.

Définition 26 (suite justifiée, partie sur une arène) *Soient A une arène et s une partie (resp. une suite justifiée) sur la grammaire $\mathbb{M}$. On dit que s est une partie (resp. une suite justifiée) sur l'arène A si chaque coup de s appartient à $\mathcal{M}_A$. L'ensemble des parties sur l'arène A est noté $\mathcal{P}_A$.*

Exemple : Considérons la partie $s = \star^B{\uparrow\uparrow}l3{\cdot}\star^B{\downarrow}r3$ où $B = \bot \times X_3$, avec pour pointeur la fonction $f : \{2\} \to \mathbb{N}$ telle que $f(2) = 1$ (c'est-à-dire que le deuxième coup est justifié par le premier). s est bien une partie dans $A = \forall X_1.(X_1 \to (\forall X_2.X_2) \to (X_3 \times \bot))$.

À noter que, si par exemple $C = X_3 \times \bot$, alors la suite $s' = \star^C{\uparrow\uparrow}l3 \cdot \star^B{\downarrow}r3$ n'est pas une partie car ce n'est pas une suite justifiée : en effet, on doit avoir $B = C$ si l'on veut que $m_2 = \star^B{\downarrow}r3$ soit justifié par $m_1 = \star^C{\uparrow\uparrow}l3$.

Plus généralement, pour tout coup m dans une partie s qui contient le symbole $\star^B$, il existe une suite de coups $m_1, \ldots, m_n$ qui contiennent le symbole $\star^B$ à la même place, avec $m_n = m$ et m_i justifie m_{i+1} pour $1 \leq i < n$. Si cette suite est choisie de taille maximale, alors m_1 est le plus petit justificateur héréditaire de m qui contient aussi le symbole $\star^B$: c'est la première fois que ce symbole apparaît (à la bonne place) dans s. On dira que B est **joué par** $\lambda(m_1)$ au **niveau** de m_1.

[1] C'est précisément l'idée de **jeu évolutif** introduite par Murawski et Ong [MO01] et réutilisée dans [dL07b].

On peut formaliser cette définition :

Définition 27 (niveau) *Si un coup m dans une partie $s \in \mathcal{P}_A$ contient le symbole $\star^B$, alors il peut être écrit sous la forme $m = m_0[\star^B m_1]$. On dit que B est* ***jouée par*** *$\lambda(m_0)$ au* ***niveau*** *de m si m_1 ne contient pas le symbole $\downarrow$ (autrement dit $\vdash m_1$).*

On notera $\mathcal{G}(s)$ l'ensemble des arènes jouées dans une partie s, et $FTV(s) = \{FTV(A) \mid A \in \mathcal{G}(s)\}$.

Définition 28 (polarité auxiliaire) *Soit A une arène et $c \in \mathcal{O}_A$. On définit sa* ***polarité auxiliaire*** *comme une fonction partielle $paux_A : \mathcal{O}_A \rightharpoonup \{\mathbf{O}, \mathbf{P}\}$ donnée par : $paux_A(c) = \lambda(\mathcal{L}_A(c))$ si $\mathcal{L}_A(c) \neq \dagger$, sinon $paux_A(c)$ n'est pas défini.*

La polarité auxiliaire a pour intérêt de définir, dès la donnée d'une arène, quel joueur joue une certaine arène :

Proposition 5 *Soit $m = m_1[m_2]$ un coup dans une partie $s \in \mathcal{P}_A$, avec $\mathcal{A}(m_1) = c \in \mathcal{O}_A$ et $\frac{m_1}{\mathcal{L}_A(c)} = B$. Alors l'arène B est jouée par $paux_A(c)$.*

Démonstration : Il suffit de regarder le coup $m' = m_0[\star^B m_1']$ dans s qui justifie héréditairement m et tel que $\vdash m_1$. Alors B est joué par $\lambda(m')$. Comme m' justifie héréditairement m, on a aussi $m = m_0[\star^B m_1'']$, et comme $\frac{m_1}{\mathcal{L}_A(c)} = B$ cela implique $\mathcal{L}_A(c) = \mathcal{A}(m_0)[\star 0]$. D'où $paux_A(c) = \lambda(m_0) = \lambda(m')$. $\square$

Définition 29 (stratégie sur une arène) *Soit σ une stratégie sur la grammaire $\mathbb{M}$, on dit que σ est une stratégie sur A, et on note $\sigma : A$, si toute partie de σ est dans $\mathcal{P}_A$.*

Définition 30 (stratégie totale) *Soit σ une stratégie sur l'arène A, σ est dite* ***totale*** *si, pour toute partie $s \in \sigma$, si $sm \in \mathcal{P}_A$ alors il existe n tel que $smn \in \mathcal{P}_A$.*

5.2.2 Catégorie des jeux du second ordre

Proposition 6 *Si $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to C$ alors $\sigma; \tau : A \to C$.*

Démonstration : On rappelle que

$$\sigma; \tau = \{u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \mid u \in \mathbf{Int},\ u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tau \text{ et } u\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma\}$$

Pour toute partie s dans $\sigma; \tau$, et pour tout coup m dans s, m est donc de format $\uparrow$ ou $\downarrow$. Dans le premier cas, puisque $s = u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ avec $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tau$, on a bien que m est un coup de format $\uparrow$ dans $B \to C$, donc m est un coup dans $A \to C$. Dans le deuxième cas, puisque $s = u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ avec $u\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma$, on a bien que m est un coup de format $\downarrow$ dans $A \to B$, donc m est un coup dans $A \to C$. $\square$

Pour donner une structure catégorique à nos jeux, on a aussi besoin d'une identité. On définit donc :

$$id_A = \{s \in \mathcal{P}_{A \to A} \cap \mathbb{E} \mid \ \forall t \in \mathbb{E}, t \preceq s \Rightarrow t\upharpoonright_{\uparrow} = t\upharpoonright_{\downarrow}\}$$

Et on a bien :

Proposition 7 *id_A est une stratégie innocente sur $A \to A$. Si $\sigma : A \to B$ alors $id_A; \sigma = \sigma; id_B = \sigma$.*

DÉMONSTRATION : On va utiliser la méthode de traduction vers les jeux HO. $\mathcal{M}_A$ peut être vue comme une arène au sens du chapitre 3, et id_A comme une stratégie HO sur l'arène $\mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A$, moyennant un renommage des coups $\uparrow x$ en x et $\downarrow x$ en x. On a donc $id_A^{HO} : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A$, et on constate que $id_A^{HO} = id_{\mathcal{M}_A}$.

On sait que $id_{\mathcal{M}_A}$ est innocente donc id_A l'est aussi, et si $\sigma : A \to B$ alors on peut lui associer $\sigma^{HO} : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$, avec $id_{\mathcal{M}_A}; \sigma^{HO} = \sigma^{HO}; id_{\mathcal{M}_B} = \sigma^{HO}$ donc $id_A; \sigma = \sigma; id_B = \sigma$. $\square$

On note $\mathcal{C}_0$ la catégorie définie de la manière suivante :
- les objets sont les arènes
- un morphisme de A vers B est une stratégie innocente $\sigma : A \to B$
- l'identité sur A est $id_A : A \to A$
- la composée de $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to C$ est $\sigma; \tau : A \to C$.

On notera $\mathcal{C}_0(X_1, \dots, X_n)$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}_0$ dont les objets sont les arènes A telles que

$$FTV(A) \subseteq \{X_1, \dots, X_n\}$$

et les morphismes de A vers B sont les stratégies innocentes de $\mathcal{C}_0(A, B)$ telles que

$$\forall sm \in \sigma,\ FTV(sm) \subseteq \{X_1, \dots, X_n\} \cup FTV(s)$$

Proposition 8 *$\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_0(X_1, \dots, X_n)$ sont des catégories cartésiennes closes.*

DÉMONSTRATION : On construit explicitement les morphismes associés à la structure cartésienne close :
- stratégie triviale :
$$\diamond = \{\epsilon\} : A \to \top$$
- projections :
$$\pi_r = \{s \in \mathcal{P}_{A \times B \to B} \cap \mathbb{E} \mid \ \forall t \in \mathbb{E}, t \preceq s \Rightarrow t\restriction_{\uparrow} = t\restriction_{\downarrow r}\} : A \times B \to B$$
$$\pi_l = \{s \in \mathcal{P}_{A \times B \to A} \cap \mathbb{E} \mid \ \forall t \in \mathbb{E}, t \preceq s \Rightarrow t\restriction_{\uparrow} = t\restriction_{\downarrow l}\} : A \times B \to A$$
- paire : si $\sigma : A \to B$ et $\tau : A \to C$,
$$\langle \sigma, \tau \rangle = \{s \in \mathcal{P}_{A \to (B \times C)} \cap \mathbb{E} \mid \ s\restriction_{\uparrow l, \downarrow} \in \sigma \text{ et } s\restriction_{\uparrow r, \downarrow} \in \tau\} : A \to (B \times C)$$
- évaluation :
$$eval = \{s \in \mathcal{P}_{(A \to B) \times A \to B} \cap \mathbb{E} \mid \ \forall t \in \mathbb{E}, t \preceq s \Rightarrow t\restriction_{\uparrow} = t\restriction_{\downarrow l \uparrow} \wedge t\restriction_{\downarrow r} = t\restriction_{\downarrow l \downarrow}\} : (A \to B) \times A \to B$$
- abstraction : si $\sigma : A \times B \to C$,
$$\Lambda(\sigma) = \{\ s\{\ \uparrow\uparrow(-)/\uparrow(-)\ ,\ \uparrow\downarrow(-)/\downarrow r(-)\ ,\ \downarrow(-)/\downarrow l(-)\ \} \mid \ s \in \sigma\} : A \to (B \to C)$$

L'unicité requise pour certains morphismes est assurée par traduction vers les jeux HO. Par exemple dans le cas du produit, on a :

$$h; \pi_l^{HO} = \sigma^{HO} \ \wedge \ h; \pi_r^{HO} = \tau^{HO} \ \Rightarrow \ h = \langle \sigma^{HO}, \tau^{HO} \rangle^{HO}$$

donc :

$$h; \pi_l = \sigma \ \wedge \ h; \pi_r = \tau \ \Rightarrow \ h = \langle \sigma, \tau \rangle$$

□

5.2.3 Traduction fonctorielle vers les jeux HO

Maintenant que notre structure catégorique est bien établie, on peut donner un statut plus formel à notre traduction $\sigma \mapsto \sigma^{HO}$: il s'agit en fait d'un foncteur des jeux du second ordre vers les jeux HO.

On commence par se restreindre aux jeux HO dont les arènes sont de la forme $A = (E_A, \lambda_A, \vdash_A, D_A)$ avec $E_A \subseteq \mathbb{M}$, $\vdash_A = \vdash$, $\lambda_A = \lambda$ et $D_A = \sharp$. Le produit et la flèche sont alors donnés par :

$$E_{A \times B} = \{lm \mid \ m \in E_A\} \cup \{rm \mid \ m \in E_B\}$$

$$E_{A \to B} = \{\uparrow m \mid \ m \in E_A\} \cup \{\downarrow m \mid \ m \in E_B\}$$

La composition entre deux stratégies $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to C$ doit bien sûr être réécrite en conséquence, en identifiant les arènes correspondant à B dans $A \to B$ et $B \to C$.

Soit $\mathcal{D}$ la catégorie des jeux HO dans cette formulation. On définit l'opération $\_^{HO}$: $\mathcal{C}_0 \mapsto \mathcal{D}$ par :

$$A^{HO} = \mathcal{M}_A$$
$$\sigma^{HO} = \sigma$$

Les résultats qu'on a déjà donnés sur la traduction $\sigma \mapsto \sigma^{HO}$ se formalisent de la manière suivante :

Proposition 9 $\_^{HO}$ *est un foncteur strict, plein et fidèle.*

5.3 Uniformité

Toutes les constructions sur les stratégies définies jusqu'ici sont les mêmes que celles qui peuvent être définies dans le cadre des jeux HO. Pour pouvoir parler de quantification du second ordre, il nous faut disposer d'une notion de substitution, dans les arènes (ce qui a déjà été défini) comme dans les stratégies.

La substitution dans les stratégies n'est pas une notion totalement triviale : par exemple, étendre la stratégie $id_{X_1} : X_1 \to X_1$ en $id_B : B \to B$ pour $B \in \mathcal{G}$ revient à réaliser une stratégie copycat[2] entre les coups $\uparrow 1$ et $\downarrow 1$, c'est-à-dire qu'à tout coup de la forme $\downarrow m$ on répond $\uparrow m$, et à tout coup $\uparrow m$ on répond $\downarrow m$. C'est exactement l'idée incarnée par la notion d'**extension copycat** définie ci-après.

Par ailleurs, une stratégie $\sigma : \forall X.A$ doit, intuitivement, contenir exactement les informations portées par les stratégies $\sigma_0[B/X] : A[B/X]$ avec $B \in \mathcal{G}$, pour une certaine stratégie $\sigma_0 : A$. σ sera donc obtenue à partir de σ_0 par toutes les extensions copycat possibles : c'est ce que l'on appellera une stratégie **uniforme**. Pour obtenir une hyperdoctrine, on considérera donc une sous-catégorie de $\mathcal{C}_0$ dans laquelle les morphismes sont des stratégies uniformes.

L'intuition qui sous-tend cette définition est déjà présente dans les travaux de Hughes [Hug00] et Murawski-Ong [MO01], mais la présentation en est différente.

Remarque : Dans [dL07b], le modèle de base ne fait intervenir aucune restriction sur les stratégies. La raison en est qu'une partie est définie dans ce modèle de telle sorte que toutes les variables libres sont substituées dès le coup initial. En conséquence, une stratégie du type $id_{X_1} : X_1 \to X_1$ ressemble déjà beaucoup à une stratégie sur $\forall X_1.X_1 \to X_1$. L'extension copycat n'a donc pas de rôle à jouer à ce niveau. Cependant, pour retrouver les isomorphismes à la Church, une propriété d'uniformité (qu'on appellera par la suite *régularité*) était nécessaire dans le modèle de [dL07b]. On y reviendra à la section 5.6.

5.3.1 Extension copycat

Dans la définition suivante, $\mathcal{BV}(A)$ désigne l'ensemble des bi-vues dans un jeu A, et $m[B/j]$ (resp. $s[B/j]$) est obtenu à partir du coup m (resp. de la partie s) en remplaçant chaque symbole de la forme $\star^A$ par $\star^{A[B/X_j]}$. Notons que $s[B/j]$ est une partie sur la grammaire $\mathbb{M}$, mais n'appartient pas nécessairement à un ensemble de coup $\mathcal{M}_A$ pour un certain A : en fait, cette partie n'est qu'une construction intermédiaire.

Définition 31 (extension copycat) *Soient $s = m_1 \dots m_n$ une partie sur l'arène A, $B \in \mathcal{G}$ et $j > 0$.*

*On définit tout d'abord l'**extension plate** de s : étant donnée une suite de coups initiaux $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}_B$, $Fl^s_{j,B}(r)$ est obtenue à partir de $s[B/X_j]$ en remplaçant chaque séquence $m'_i m'_{i+1}$ telle que $m'_i = m_i[B/j]$, $m'_{i+1} = m_{i+1}[B/j]$, $\sharp(m_i) = j$ et $\lambda(m_i) = \mathbf{O}$ par $m'_i[r_i]m'_{i+1}[r_i]$ et, si $\sharp(m_n) = j$ et $\lambda(m_n) = \mathbf{O}$, en remplaçant $m'_n = m_n[B/j]$ par $m'_n[r_n]$.*

Soit m_i un coup Opposant de s tel que $\sharp(m_i) = j$. Supposons que

$$Fl^s_{j,B}(r) = s_1 m'_i[r_i] m'_{i+1}[r_i] s_2$$

*avec $m'_i = m_i[B/j]$ et $m'_{i+1} = m_{i+1}[B/j]$, et soit $v = n_1 \dots n_p \in \mathcal{BV}(B)$. L'**extension copycat** de s sur B à la position i le long de j (avec paramètres v, r) est la partie $s' = CC^s_{j,B}(i, v, r)$ définie par :*

[2] Cette procédure fait écho à l'η-expansion de la syntaxe, qui permet par exemple de voir l'identité $\lambda x.x$ comme équivalente à une identité expansée telle que $\lambda x \lambda y.x(y)$. La notion de copycat a été introduite dans [AJ94] pour définir la stratégie identité.

- $s = s_1$ *si* $p = 0$ *(i.e.* $v = \epsilon$*)*
- $s' = s_1 m'_i[n_1] m'_{i+1}[n_1] s_2$ *si* $p = 1$
- $s' = s_1 m'_i[n_1] m'_{i+1}[n_1] m'_{i+1}[n_2] m'_i[n_2] \ldots m'_{i+1}[n_p] m'_i[n_p]$ *si p pair*
- $s' = s_1 m'_i[n_1] m'_{i+1}[n_1] m'_{i+1}[n_2] m'_i[n_2] \ldots m'_i[n_p] m'_{i+1}[n_p]$ *si* $p > 1$ *et p impair.*

Enfin, si $i = n$, $Fl^s_{j,B}(r) = s_1 m'_n[r_n]$ *et* $v = n_1 \ldots n_p$ *alors*

$$CC^s_{j,B}(n, v, r) = \begin{cases} s_1 & \text{si } p = 0 \\ s_1 m'_n[n_1] & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 32 (affectation) *Soient* σ *une stratégie innocente sur l'arène* A *et* $j > 0$. *L'**affectation** de* X_j *par* B *dans* σ, *dénotée* $\sigma[B/X_j]$ *est la plus petite stratégie innocente contenant toutes les extensions copycat sur* B *d'une partie de* σ *suivant l'indice* j.

Notons que la fermeture par innocence nous assure que l'affectation donne bien la stratégie attendue. Ainsi, si on veut faire à la suite deux extension copycat sur B suivant j, la partie obtenue sera contenue dans $\sigma[B/X_j]$ puisque les deux vues qui la constituent seront elles-mêmes dans $\sigma[B/X_j]$.

Soient $\vec{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ et $\vec{B} = \langle B_1, \ldots, B_n \rangle$. On note :

$$A[\vec{B}/\vec{X}] = (\ldots (A[B_1/X_1])[B_2/X_2] \ldots)[B_n/X_n]$$
$$\sigma[\vec{B}/\vec{X}] = (\ldots (\sigma[B_1/X_1])[B_2/X_2] \ldots)[B_n/X_n]$$

5.3.2 Stratégie uniforme

Définition 33 (variable de copycat, stratégie symboliques) *Soit* $s = s_1 m$ *une partie sur l'arène* A *avec* $\lambda(m) = \mathbf{O}$, *et* X_i *une arène variable jouée au niveau de* m. X_i *est appelée **variable de copycat** de* s *si* $X_i \notin FTV(\ulcorner s_1 \urcorner) \cap FTV(A)$.

Une vue s *sur l'arène* A *est dite **symbolique** si, pour tout coup* m *de* s *tel que* $\lambda(m) = \mathbf{O}$, *les arènes jouées au niveau de* m *sont des variables de copycat* $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$ *toutes distinctes.*

Une partie (resp. une stratégie) est dite symbolique si toutes les vues qu'elle contient sont symboliques.

Définition 34 (stratégie uniforme) *Soit* σ *une stratégie sur l'arène* A. σ *est appelée uniforme si il existe une stratégie symbolique innocente* $\bar{\sigma}$ *sur* A *telle que :* σ *est la plus petite stratégie innocente contenant* $\bar{\sigma}$ *et stable par extension copycat le long d'une variable de copycat.*

Remarques :

1. Étant donnée une stratégie symbolique innocente $\bar{\sigma}$, la "plus petite stratégie innocente contenant $\bar{\sigma}$ et stable par extension copycat le long d'une variable de copycat" existe toujours : c'est l'intersection de toutes les stratégies vérifiant ces conditions, ce qui nous donne bien une stratégie innocente.

2. Une stratégie uniforme contient toutes les affectations des variables de copycat de sa stratégie symbolique. Mais elle contient plus, car il est possible d'avoir plusieurs vues dans une même partie qui correspondent à des affectations différentes. Si l'on voyait une stratégie innocente simplement comme un ensemble de vues, alors la stratégie uniforme serait la clôture de la stratégie symbolique par extension copycat le long d'une variable de copycat.
3. Selon la définition, il est a priori possible d'avoir plusieurs stratégies symboliques générant une même stratégie uniforme σ. En fait, ces différentes stratégies ne diffèrent que par le choix des variables de copycat : en effet, comme elles sont toutes contenues dans σ, il est possible de les déduire les unes des autres par des extensions copycat. On s'autorisera donc, par un léger abus de langage, de parler de *la* stratégie symbolique associée à une stratégie uniforme.

Par la suite, on dira que s' est une **extension** de s si elle est obtenue à partir de s par une série d'extensions copycat le long de variables de copycat. Une stratégie uniforme est donc stable par extension.

Comme on le verra à la section 5.4.2, l'ensemble des vues de la stratégie symbolique est la représentation directe de la syntaxe, tandis que la stratégie uniforme associée est l'extension de cette stratégie, conçue pour pouvoir composer normalement avec les autres stratégies.

5.3.3 Catégorie des jeux uniformes

En se restreignant aux stratégies uniformes, on va obtenir une sous-catégorie de $\mathcal{C}_0$. Pour le montrer, le résultat central est le suivant :

Proposition 10 *Si $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to C$ sont deux stratégies uniformes alors $\sigma;\tau : A \to C$ est uniforme.*

DÉMONSTRATION : Considérons la stratégie suivante :

$$\bar{\rho} = \{u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \mid \ u \in \mathbf{Int} \wedge u\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma \wedge u\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tau \wedge u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \text{ partie symbolique}\}$$

C'est une stratégie innocente sur $A \to C$ (car elle restreint $\sigma;\tau$ qui est elle-même innocente) et symbolique. On note ρ la stratégie uniforme obtenue à partir de cette stratégie symbolique, et on veut montrer que $\rho = \sigma;\tau$.

On prouve d'abord que $\rho \subseteq \sigma;\tau$, c'est-à-dire que $\sigma;\tau$ contient toutes les extension copycat de $s \in \bar{\rho}$ le long d'une variable de copycat X_j.

Considérons la partie $s' = Fl^s_{j,D}(r)$ pour $s = m_1 \ldots m_n \in \bar{\rho}$, $D \in \mathcal{G}$ et r suite de coups initiaux dans $\mathcal{M}_D$. Il existe une suite justifiée u et deux parties $s_1 \in \sigma$ et $s_2 \in \tau$ telles que $u\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} = s_1$, $u\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow} = s_2$ et $u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} = s$. s_1 (resp. s_2) n'est pas nécessairement symbolique, mais d'une part ses vues sont des extensions copycat de parties symboliques, et d'autre part **O** joue de façon symbolique pour les coups de format $\downarrow\downarrow$ (resp. $\uparrow$).

Considérons la suite justifiée U_0 obtenue à partir de u en remplaçant chaque suite de coups $m_i b_1 \dots b_q m_{i+1}$ avec $\sharp(m_i) = j$ par $m_i[r_i]b_1[r_i]\dots b_q[r_i]m_{i+1}[r_i]$, et posons $U = U_0[D/j]$. Alors $U\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} = s'_1 \in \sigma$ car toutes les vues de s'_1 sont des extensions plates des vues de s_1 le long de variables de copycat. De même $U\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tau$, et donc $U\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow} = s' \in \sigma;\tau$.

Considérons maintenant un coup m_i de s tel que $\sharp(m_i) = j$ et une bi-vue $v = n_1 \dots n_p$ dans l'arène D, posons $S = CC^s_{j,D}(i, v, r)$. Si $U = U_1 m'_i[r_i]b_1[r_i]\dots b_q[r_i]m'_{i+1}[r_i]U_2$ avec $m'_i = m_i[D/j]$ et $m'_{i+1} = m_{i+1}[D/j]$, on construit une autre suite justifiée U', définie comme suit :

- si $p = 1$, $U' = U_1 m'_i[n_1]b_1[n_1]\dots b_q[n_1]m'_{i+1}[n_1]U_2$
- si p pair,

$$\begin{aligned} U' &= U_1 m'_i[n_1]b_1[n_1]\dots b_q[n_1]m'_{i+1}[n_1]m'_{i+1}[n_2]b_q[n_2]\dots b_1[n_2]m'_i[n_2] \\ &\quad \dots\dots m'_{i+1}[n_p]b_q[n_p]\dots b_1[n_p]m'_i[n_p] \end{aligned}$$

- si p impair et $p > 1$,

$$\begin{aligned} U' &= U_1 m'_i[n_1]b_1[n_1]\dots b_q[n_1]m'_{i+1}[n_1]m'_{i+1}[n_2]b_q[n_2]\dots b_1[n_2]m'_i[n_2] \\ &\quad \dots\dots m'_i[n_p]b_1[n_p]\dots b_q[n_p]m'_{i+1}[n_p] \end{aligned}$$

$U'\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est une extension copycat de s_1 (s'_1 était l'extension plate) donc $U'\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma$, et de la même façon $U'\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tau$. $U'\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est bien une partie donc $U'\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow} = S \in \sigma;\tau$.

Il faut maintenant prouver que $\sigma;\tau \subseteq \rho$. On suppose que σ et τ sont associées aux stratégies symboliques $\bar{\sigma}$ et $\bar{\tau}$ respectivement. Considérons une vue $s \in \sigma;\tau$, il existe une suite justifiée U telle que $U\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma$, $U\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tau$ et $U\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow} = s$. On s'autorisera ici à identifier un coup de U avec sa projection suivant $\{\uparrow, \downarrow\downarrow\}$, $\{\uparrow, \downarrow\uparrow\}$ ou $\{\downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow\}$.

Notre but est de prouver que s est obtenue à partir de $\bar{\rho}$ par un certain nombre d'extensions copycat. On va construire coup par coup une suite justifiée $\overline{u}$ telle que s soit une extension de $\overline{u}\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \rho$.

Soit une suite justifiée u préfixe de U, on va définir par induction une suite justifiée $\overline{u}$ telle que :

- $\overline{u}\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ partie symbolique
- $\ulcorner u\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}\urcorner$ extension de $\ulcorner \overline{u}\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}\urcorner$
- $\ulcorner u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}\urcorner$ extension de $\ulcorner \overline{u}\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}\urcorner$
- $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ extension de $\overline{u}\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$.

Si $u = \epsilon$, on pose $\overline{u} = \epsilon$.

Si $u = u_0 m$, comme le mécanisme d'interaction est le même que dans les jeux HO, on peut utiliser les résultats liés aux automates d'états (cf [Har99]). On a donc trois cas :

- Cas n°1 : $u_0\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$, $u_0\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}$ et $u_0\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ sont de longueur paire. Alors m est de format $\uparrow$ ou $\downarrow\downarrow$. Dans le cas où m est de format $\uparrow$, on a alors $\ulcorner u_0\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}\urcorner mn \in \tau$ pour un certain n, et comme τ est uniforme il existe une partie symbolique $s_2\bar{m}\bar{n}$ dont $\ulcorner u_0\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}\urcorner mn$ est une extension. Comme on a aussi par induction une partie $\ulcorner \overline{u_0}\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}\urcorner$ dont $\ulcorner u_0\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}\urcorner$ est l'extension, cela signifie que $\ulcorner \overline{u_0}\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}\urcorner$ est une extension de s_2. Appliquons à $s_2\bar{m}$ toutes les extensions copycat nécessaires pour passer de

s_2 à $\ulcorner\overline{u_0}\urcorner\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}$, on obtient alors la partie $\ulcorner\overline{u_0}\urcorner\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow} m'$, on pose $\overline{u} = \overline{u_0}m'$ et on peut vérifier que $\overline{u}$ vérifie toutes les propriétés demandées. Le cas où m est de format $\downarrow\downarrow$ est similaire.

- Cas n°2 : $u_0\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}$ est de longueur paire, $u_0\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$ et $u_0\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ sont de longueur impaire. Alors m est de format $\downarrow\uparrow$ ou $\downarrow\downarrow$. Dans les deux cas, on a $u_0 = u_1 n$ avec $u_1\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} nm \in \sigma$ pour un certain n, on pose $\ulcorner u_1\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} n\urcorner = s_0 n$. Comme σ est uniforme il existe une partie symbolique $s_1\bar{m}$ dont $s_0 nm$ est une extension. Comme on a aussi par induction une partie $\ulcorner\overline{u_0}\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}\urcorner$ dont $s_0 n$ est l'extension, cela signifie que $\ulcorner\overline{u_0}\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}\urcorner$ est une extension de s_1. Appliquons à $s_1\bar{m}$ toutes les extensions copycat nécessaires pour passer de s_1 à $\ulcorner\overline{u_0}\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}\urcorner$, on obtient alors la partie $\ulcorner\overline{u_0}\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}\urcorner m'$, on pose $\overline{u} = \overline{u_0}m'$ et on peut vérifier que $\overline{u}$ vérifie toutes les propriétés demandées.
- Cas n°2 : $u_0\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est de longueur paire, $u_0\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}$ et $u_0\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ sont de longueur impaire. Alors m est de format $\uparrow$ ou $\downarrow\uparrow$. Dans les deux cas, on a $u_0 = u_1 n$ avec $u_1\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow} nm \in \tau$ pour un certain n, on pose $\ulcorner u_1\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow} n\urcorner = s_0 n$. Comme τ est uniforme il existe une partie symbolique $s_1\bar{m}$ dont $s_0 nm$ est une extension. Comme on a aussi par induction une partie $\ulcorner\overline{u_0}\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}\urcorner$ dont $s_0 n$ est l'extension, cela signifie que $\ulcorner\overline{u_0}\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}\urcorner$ est une extension de s_1. Appliquons à $s_1\bar{m}$ toutes les extensions copycat nécessaires pour passer de s_1 à $\ulcorner\overline{u_0}\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}\urcorner$, on obtient alors la partie $\ulcorner\overline{u_0}\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}\urcorner m'$, on pose $\overline{u} = \overline{u_0}m'$ et on peut vérifier que $\overline{u}$ vérifie toutes les propriétés demandées.

$\square$

Lemme 4 *Les stratégies $\diamond : A \to \top$, $id_A : A \to A$, $\pi_r : A \times B \to B$, $\pi_l : A \times B \to A$, et $eval : (A \to B) \times A \to B$ sont uniformes. Si $\sigma : \Gamma \to A$ et $\tau : \Gamma \to B$ sont uniformes alors $\langle\sigma,\tau\rangle : \Gamma \to (A \times B)$ est uniforme. Si $\sigma : \Gamma \times A \to B$ est uniforme alors $\Lambda(\sigma) : \Gamma \to (A \to B)$ est uniforme.*

Démonstration : Si l'on prend par exemple id_A, on peut lui associer la partie symbolique suivante :

$$\rho = \{s \in \mathcal{P}_{A\to A} \cap \mathbb{E} \mid \ s \text{ symbolique } \wedge \forall t \in \mathbb{E}, t \preceq s \Rightarrow t\upharpoonright_{\uparrow} = t\upharpoonright_{\downarrow}\}$$

Toute vue de id_A peut être obtenue par une série d'extensions copycat à partir de ρ, et par ailleurs id_A est stable par extension plate ou copycat le long d'une variable de copycat, donc elle est uniforme.

Si $\sigma : \Gamma \to A$ et $\tau : \Gamma \to B$ sont uniformes, avec $\bar{\sigma}$ et $\bar{\tau}$ pour stratégies symboliques associées, alors $\langle\sigma,\tau\rangle$ contient $\langle\bar{\sigma},\bar{\tau}\rangle$ et est stable par extension plate ou copycat le long d'une variable de copycat. Enfin, toute vue de $\langle\sigma,\tau\rangle$ peut être obtenue par une série d'extensions copycat à partir de $\langle\bar{\sigma},\bar{\tau}\rangle$. Donc $\langle\sigma,\tau\rangle$ est bien uniforme.

De même, si $\sigma : \Gamma \times A \to B$ est uniforme, avec $\bar{\sigma}$ pour stratégie symbolique associée, alors $\Lambda\sigma$ est uniforme avec $\Lambda(\bar{\sigma})$ pour stratégie symbolique associée. $\square$

En conséquence, on peut définir $\mathcal{C}(X_1,\ldots,X_n)$, la sous-catégorie de $\mathcal{C}_0(X_1,\ldots,X_n)$ pleine sur les objets et dont les morphismes sont les stratégies innocentes uniformes. Cette catégorie est elle aussi cartésienne close.

Proposition 11 *Soient $A, B \in \mathcal{G}$ et $j > 0$. Si $\sigma : A$ est uniforme, alors $\sigma[B/X_j] : A[B/X_j]$ est uniforme.*

DÉMONSTRATION : Soit $\bar{\sigma}$ la stratégie symbolique associée à σ. Alors $\bar{\sigma}[B/X_j]$ est contenue dans σ. De même que toute vue de σ peut être obtenue à partir d'une vue de $\bar{\sigma}$ par un certain nombre d'extensions copycat, toute vue de $\sigma[B/X_j]$ peut être obtenue à partir d'une vue de $\bar{\sigma}[B/X_j]$ par les mêmes extensions copycat.

Notons que le cas où X_j est utilisé comme variable de copycat dans $s \in \bar{\sigma}$ (ce qui implique en particulier $X_j \notin FTV(A)$) ne pose pas de problème spécifique. □

5.4 Modélisation du système F

5.4.1 Hyperdoctrine des jeux du second ordre

On rappelle la définition d'une hyperdoctrine :

Définition 35 (hyperdoctrine) *Une **hyperdoctrine** $\mathbf{H}$ est définie par :*
- *une catégorie de base $|\mathbf{H}|$ munie d'une structure cartésienne, c'est-à-dire d'un objet terminal 1 et du produit binaire*
- *un objet distingué U dans $|\mathbf{H}|$ tel que, pour tout $I \in |\mathbf{H}|$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I = U^n$ (avec la convention $U^0 = 1$) ; on note $P_n^i : U^n \to U$ la projection sur la $i$ème composante, et $P_{n+1} = \langle P_{n+1}^1, \ldots, P_{n+1}^n \rangle : U^{n+1} \to U^n$*
- *un foncteur $F : |\mathbf{H}|^{op} \to \boldsymbol{CCC}$ tel que, si on compose F avec le foncteur d'oubli $fff : \boldsymbol{CCC} \to \boldsymbol{Set}$, on obtient le foncteur $|\mathbf{H}|(-, U)$*
- *pour tout $I \in |\mathbf{H}|$, un foncteur $\Pi_I : F(I \times U) \to F(I)$ tel que :*
  - *Π_I est adjoint à droite au foncteur $G_I : F(I) \to F(I \times U)$ défini par $G_I = F(P_{n+1})$ pour $I = U^n$*
  - *Π_I est naturel en I : pour tout $\alpha : I \to J$, $F(\alpha) \circ \Pi_J = \Pi_I \circ F(\alpha \times id_U)$*
  - *pour tout $\alpha : I \to J$, pour tout objet A de $F(J \times U)$, le morphisme $(F(\alpha) \circ \Pi_J)(A) \to (\Pi_I \circ F(\alpha \times id_U))(A)$ généré par l'adjonction est une identité.*

Nous allons à présent nous attacher à mettre en relief une structure d'hyperdoctrine dans les jeux du second ordre.

On définit tout d'abord la catégorie de base $\mathbb{B}$ dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes $n \to m$ sont les m-uplets $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$ où $A_i \in \mathcal{G}$, $FTV(A_i) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}$. La composition dans cette catégorie est la substitution : si

$$\vec{A} = \langle A_1, \ldots, A_m \rangle : n \to m$$
$$\vec{B} = \langle B_1, \ldots, B_n \rangle : k \to n$$

alors

$$\vec{A} \circ \vec{B} = \langle A_1[\vec{B}/\vec{X}], \ldots, A_m[\vec{B}/\vec{X}] \rangle : k \to m$$

Il faut ensuite construire un foncteur $\mathcal{C} : \mathbb{B}^{op} \to \mathbf{CCC}$. On choisit

$$\mathcal{C}(k) = \mathcal{C}(X_1, \ldots, X_k)$$

et, pour tout $\vec{B} : n \to m$, on définit $\mathcal{C}(\vec{B}) : \mathcal{C}(m) \to \mathcal{C}(n)$ comme suit (pour $\vec{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$) :

– pour tout $A \in \mathcal{C}(m)$,
$$\mathcal{C}(\vec{B})(A) = A[\vec{B}/\vec{X}]$$

– pour tout $\sigma : A \to B$,
$$\mathcal{C}(\vec{B})(\sigma) = \sigma[\vec{B}/\vec{X}]$$

On obtient bien un foncteur $\mathcal{C} : \mathbb{B}^{op} \to \mathbf{CCC}$: en effet, $\mathcal{C}(\vec{B}) : \mathcal{C}(m) \to \mathcal{C}(n)$ est un morphisme strict de cccs ($(A_1 \times A_2)[\vec{B}] = A_1[\vec{B}] \times A_2[\vec{B}]$, $(A_1 \to A_2)[\vec{B}] = A_1[\vec{B}] \to A_2[\vec{B}]$, $(\sigma \times \tau)[\vec{B}] = \sigma[\vec{B}] \times \tau[\vec{B}]$, $(\sigma ; \tau)[\vec{B}] = \sigma[\vec{B}] ; \tau[\vec{B}]$, etc...) et la composition coïncide avec la substitution : $\mathcal{C}(\vec{B}) \circ \mathcal{C}(\vec{B}') = \mathcal{C}(\vec{B}'[\vec{B}])$.

Par construction, la composée de $\mathcal{C}$ avec le foncteur d'oubli $\mathit{fff} : \mathbf{CCC} \to \mathbf{Set}$ est bien le foncteur $\mathbb{B}(-, 1)$: en effet, $E_n = \mathit{fff}(\mathcal{C}(U^n))$ est l'ensemble des arènes A telles que $FTV(A) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}$, donc c'est bien l'ensemble $\mathbb{B}(U^n, 1)$; quant à la fonction $h = \mathit{fff}(\mathcal{C}(\vec{B})) : E_n \to E_m$ pour $\vec{B} : U^m \to U^n$, elle est donnée par $f(A) = A[\vec{B}]$, donc $f = \mathbb{B}(\vec{B}, 1)$.

Dans la catégorie $\mathbb{B}$, la projection est $\vec{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle : n + 1 \to n$. Cela nous donne un foncteur $\mathcal{C}(\vec{X}) : \mathcal{C}(n) \to \mathcal{C}(n+1)$. Il nous faut trouver un adjoint à droite pour $\mathcal{C}(\vec{X})$, et pour cela on introduit la notion de **quantification de stratégie** :

Définition 36 (quantification de stratégie) *Soient $A, B \in \mathcal{C}(n+1)$ et $\sigma : A \to B$. On définit la stratégie $\forall \sigma : (\forall X_{n+1}.A) \to (\forall X_{n+1}.B)$ comme la plus petite stratégie innocente contenant toutes les vues s sur $(\forall X_{n+1}.A) \to (\forall X_{n+1}.B)$ telles qu'il existe $C \in \mathcal{G}$ et $t \in \sigma[C/X_{n+1}]$ vérifiant :*

$$s = t\{ \star^C \uparrow(-)/\uparrow(-) \ , \ \star^C \downarrow(-)/\downarrow(-) \ \}$$

Lemme 5 *Si $\sigma : A \to B$ est uniforme alors $\forall \sigma : (\forall X_{n+1}.A) \to (\forall X_{n+1}.B)$ est uniforme.*

Démonstration : Soit $\bar{\sigma}$ est la stratégie symbolique dont est issue σ. On définit $\bar{\sigma}'$ comme la plus petite stratégie innocente contenant toutes les vues s sur $(\forall X_{n+1}.A) \to (\forall X_{n+1}.B)$ telles qu'il existe $C \in \mathcal{G}$ et $t \in \bar{\sigma}[C/X_{n+1}]$ vérifiant :

$$s = t\{ \star^C \uparrow(-)/\uparrow(-) \ , \ \star^C \downarrow(-)/\downarrow(-) \ \}$$

Alors $\forall \sigma$ est bien la stratégie uniforme issue de $\bar{\sigma}'$. □

On définit le foncteur $\Pi_n : \mathcal{C}(n+1) \to \mathcal{C}(n)$ par $\Pi_n(A) = \forall X_{n+1}.A$ et $\Pi_n(\sigma) = \forall \sigma$.

Lemme 6 *Π_n est adjoint à droite de $\mathcal{C}(\vec{X})$.*

Démonstration : Il nous faut définir une bijection

$$\kappa : \mathcal{C}(n+1)(\mathcal{C}(\vec{X})(\Gamma), A) \to \mathcal{C}(n)(\Gamma, \Pi_n(A))$$

On la construit comme suit : si Γ est un objet de $\mathcal{C}(n)$ et A un objet de $\mathcal{C}(n+1)$, un morphisme $\sigma : \mathcal{C}(\vec{X})(\Gamma) \to A$ est simplement une stratégie innocente $\sigma : \Gamma \to A$. $\kappa(\sigma) : \Gamma \to \forall X_{n+1}.A$ est alors la plus petite stratégie innocente telle que, pour tout $B \in \mathcal{G}$, pour toute partie $s \in \sigma[B/X_{n+1}]$, $s\{\uparrow \star^B (-)/\uparrow(-)\} \in \kappa(\sigma)$.

On vérifie comme précédemment que que si σ est uniforme alors $\kappa(\sigma)$ l'est aussi : si σ est issue de la stratégie symbolique $\bar{\sigma}$, $\kappa(\sigma)$ est issue de la plus petite stratégie innocente $\bar{\sigma}'$ telle que, pour tout $B \in \mathcal{G}$, pour toute partie $s \in \bar{\sigma}[B/X_{n+1}]$, $s\{\uparrow \star^B (-)/\uparrow(-)\} \in \bar{\sigma}'$.

L'inverse de κ peut être directement explicité : si $\sigma : \Gamma \to \forall X_{n+1}.A$, $\kappa^{-1}(\sigma)$ est la plus petite stratégie innocente telle que : si $s \in \sigma$ est de format $\{\downarrow, \uparrow\star^{X_{n+1}}\}$ alors $s\{\uparrow(-)/\uparrow \star^{X_{n+1}} (-)\} \in \kappa^{-1}(\sigma)$. La fonction κ^{-1} préserve bien elle aussi l'uniformité.

Les vues de $\kappa^{-1}(\kappa(\sigma))$ sont de la forme $s\{\uparrow(-)/\uparrow\star^{X_{n+1}} (-)\}\{\uparrow\star^{X_{n+1}} (-)/\uparrow(-)\}$ avec $s \in \sigma$, donc $\kappa^{-1}(\kappa(\sigma)) = \sigma$.

Pour montrer que $\kappa(\kappa^{-1}(\sigma)) = \sigma$, il faut utiliser l'uniformité : toute vue de $\kappa^{-1}(\sigma)$ est de la forme $s' = s\{\uparrow(-)/\uparrow \star^{X_{n+1}} (-)\}$ avec s vue symbolique dans σ. Donc toute vue dans $\kappa(\kappa^{-1}(\sigma))$ est de la forme $s''\{\uparrow \star^B (-)/\uparrow(-)\}$ avec $s'' = s'[B/X_{n+1}]$. Cela correspond bien à la définition de l'extension copycat d'une stratégie symbolique, d'où $\kappa(\kappa^{-1}(\sigma)) = \sigma$.

Il reste à montrer la naturalité de cette bijection, c'est-à-dire :

$$\kappa(\sigma;\tau) = \kappa(\sigma);\Pi_n(\tau)$$
$$\sigma;\kappa(\tau) = \kappa(\mathcal{C}(\vec{X})(\sigma);\tau)$$

On suppose que s est une vue, on a alors :

$$\begin{array}{rcl}
s \in \kappa(\sigma;\tau) & \Leftrightarrow & \exists u \in \mathbf{Int}, B \in \mathcal{G},\ u\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma \wedge u\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tau \wedge s = u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \{\uparrow \star^B (-)/\uparrow(-)\} \\
& \Leftrightarrow & \exists u \in \mathbf{Int}, B \in \mathcal{G},\ u\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \{\uparrow(-)/\uparrow \star^B (-)\} \in \sigma \\
& & \wedge\ u\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \{\uparrow(-)/\uparrow \star^B (-), \downarrow(-)/\downarrow \star^B (-)\} \in \tau \\
& & \wedge\ s = u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \\
& \Leftrightarrow & s \in \kappa(\sigma);\Pi_n(\tau)
\end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rl}
s \in \sigma;\kappa(\tau) & \Leftrightarrow \exists u \in \mathbf{Int}, B \in \mathcal{G},\ u\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma \wedge u\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \{\uparrow(-)/\uparrow \star^B (-)\} \in \tau \wedge s = u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \\
& \Leftrightarrow \exists u \in \mathbf{Int}, B \in \mathcal{G},\ u\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma \wedge u\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tau \wedge s = u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \{\uparrow(-)/\uparrow \star^B (-)\} \\
& \Leftrightarrow s \in \kappa(\sigma;\tau) \\
& \Leftrightarrow s \in \kappa(\mathcal{C}(\vec{X})(\sigma);\tau)
\end{array}$$

□

Lemme 7 *Π_n est naturel en n : si $\vec{B} = \langle B_1, \dots, B_n\rangle$ avec B_i objet de $\mathcal{C}(m)$,*

$$\mathcal{C}(\vec{B}) \circ \Pi_n = \Pi_m \circ \mathcal{C}(\vec{B}, X_{m+1})$$

De plus,

$$\kappa((\kappa^{-1}(id_{\forall X_n.A}))[\vec{B}/\vec{X}]) = id_{(\forall X_n.A)[\vec{B}/\vec{X}]}$$

DÉMONSTRATION : Ce résultat est immédiat sur les arènes : soit $\vec{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$, on peut vérifier par induction sur A, objet de $\mathcal{C}(n+1)$, que

$$(\forall X_n.A)[\vec{B}/\vec{X}] = \forall Y.(A[\vec{B}/\vec{X}, X_{m+1}/X_{n+1}])$$

Ce n'est pas plus difficile à prouver sur les stratégies : soit $\sigma : A_1 \to A_2$ et s une vue, $s \in (\mathcal{C}(\vec{B}) \circ \Pi_n)(\sigma)$ si il existe $D \in \mathcal{G}$ et $t \in \sigma[D/X_{n+1}]$ tels que :

$$s = (t\{\ \star^D\!\uparrow\!(-)/\!\uparrow\!(-)\ ,\ \star^D\!\downarrow\!(-)/\!\downarrow\!(-)\ \})[\vec{B}/\vec{X}]$$

ce qui revient à trouver $D \in \mathcal{G}$ et $t \in \sigma[\vec{B}/\vec{X}, D/X_{n+1}]$ tels que :

$$s = t\{\ \star^D\!\uparrow\!(-)/\!\uparrow\!(-)\ ,\ \star^D\!\downarrow\!(-)/\!\downarrow\!(-)\ \}$$

Cela revient exactement à dire que $s \in (\Pi_m \circ \mathcal{C}(\vec{B}, X_{m+1}))(\sigma)$.

Enfin, l'égalité

$$\kappa((\kappa^{-1}(id_{\forall X_n.A}))[\vec{B}/\vec{X}]) = id_{(\forall X_n.A)[\vec{B}/\vec{X}]}$$

découle de la définition de κ. □

On peut alors conclure, en utilisant le théorème 1 :

Théorème 2 *La structure* **H** *définie par la catégorie de base* $\mathbb{B}$ *et le foncteur* $\mathcal{C} : \mathbb{B}^{op} \to$ **CCC** *est une hyperdoctrine, et donc* $\mathcal{W}(H)$ *est un modèle du système F à la Church.*

L'interprétation d'un type A dans ce modèle est l'arène $(\mathcal{O}_A, \mathcal{L}_A)$ et l'interprétation d'une dérivation de typage se terminant par le séquent $\vec{X}; x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t : A$ est une stratégie uniforme $\sigma_t : A_1 \times \cdots \times A_n \to A$.

5.4.2 Complétude

Même si la complétude n'est pas une propriété qui nous intéresse particulièrement dans notre travail sur les isomorphismes de types, c'est une question intéressante si l'on veut situer notre modèle par rapport à la syntaxe. On va montrer ici que le modèle défini ci-dessus est complet modulo quelques restrictions : on aura donc retrouvé la même précision que dans le modèle de Hughes [Hug00][3].

Pour arriver à la complétude, il faut restreindre l'ensemble des arènes :

Définition 37 (arène exacte) *Une arène $A = (\mathcal{O}_A, \mathcal{L}_A)$ est dite* ***exacte*** *si elle respecte la condition suivante :*

soient $a, b \in \mathcal{O}_A$ tels que $a = a_1[a_2]$ et $b = a_1[b_2]$, alors :

- *si $a_2 = j$ avec $j \in \mathbb{N}$ alors $b_2 = j$*
- *si a_2 est de format r ou l alors b_2 est de format r ou l*

[3] En réalité, nos stratégies symboliques peuvent être vues comme une reformulation des stratégies de Hughes.

- *si a_2 est de format $\uparrow$ ou $\downarrow$ alors b_2 est de format $\uparrow$ ou $\downarrow$*
- *si a_2 est de format $\star$ alors b_2 est de format $\star$.*

On note $\mathcal{G}^e$ l'ensemble des arènes exactes.

Lemme 8 *$A \in \mathcal{G}^e$ si et seulement si A est l'interprétation d'une formule du second ordre.*

Démonstration : Exceptionnellement dans cette preuve, on distinguera la formule F du jeu A qui en découle.

Si A provient d'une formule F alors on vérifie par induction sur F que A est exacte :

- si $F = \top$ ou $F = \bot$ ou $F = X_i$ le résultat est immédiat
- si $F = \forall X_i.F_0$ alors pour tout $a, b \in \mathcal{O}_A$, $a = \star a'[0]$ et $b = \star b'[0]$ où a', b' sont deux occurrences du jeu correspondant à F_0, donc a' et b' vérifient la condition d'exactitude, par hypothèse d'induction, donc a et b aussi
- si $F = F_1 \times F_2$ alors pour tout $a, b \in \mathcal{O}_A$:
  - soit $a = ra'$ et $b = rb'$, et dans ce cas a' et b' vérifient la condition d'exactitude par hypothèse d'induction donc a et b aussi
  - soit $a = la'$ et $b = lb'$, et dans ce cas a' et b' vérifient la condition d'exactitude par hypothèse d'induction donc a et b aussi
  - soit a est de format r (resp. de format l) et b de format l (resp. de format r) et la condition d'exactitude est vérifiée.
- si $F = F_1 \to F_2$ alors on fait le même raisonnement en remplaçant r par $\downarrow$ et l par $\uparrow$.

Réciproquement, supposons que A soit exacte. Si $\mathcal{O}_A$ est vide alors A provient de la formule $\top$, sinon on raisonne par induction sur la taille n de la plus grande occurrence de $\mathcal{O}_A$ (c'est-à-dire le nombre de symboles dont elle est constituée) :

- si $n = 1$ alors $\mathcal{O}_A = \{j_1, \ldots, j_p\}$ mais par exactitude de A, $j_1 = j_2 = \cdots = j_p = j$ et A provient de la formule X_j
- si $n > 1$ alors il existe $a \in \mathcal{O}_A$ de format $\star$, l, r, $\uparrow$ ou $\downarrow$, et la propriété de correction permet de classer les éléments de $\mathcal{O}_A$:
  - si a est de format $\star$, on choisit $j \in \mathbb{N}$ tel que $\forall b \in \mathcal{O}_A,\ \sharp(b) \neq j$ et on pose

$$\mathcal{O} = \{b \mid \ \star b \in \mathcal{O}_A \wedge \mathcal{L}_A(\star b) \neq \star 0\} \cup \{b[j] \mid \ \star b \in \mathcal{O}_A \wedge \mathcal{L}_A(\star b) = \star 0\}$$

  et

$$\mathcal{L}(b) = \begin{cases} c & \text{si } \mathcal{L}_A(\star b) = \star c \neq \star 0 \\ \dagger & \text{si } \mathcal{L}_A(\star b) = \dagger \text{ ou } \mathcal{L}_A(\star b) = \star 0 \end{cases}$$

  Alors $A_0 = (\mathcal{O}_0, \mathcal{L}_0)$ est une arène exacte donc elle provient d'une formule F_0, et on a $A = \forall X_j.A_0$ donc A provient de $\forall X_j.F_0$

– si a est de format r ou l, on définit :

$$\mathcal{O}_1 = \{b \mid \ lb \in \mathcal{O}_A\}$$
$$\mathcal{O}_2 = \{b \mid \ rb \in \mathcal{O}_A\}$$
$$\mathcal{L}_1(b) = \begin{cases} c & \text{si } \mathcal{L}_A(lb) = lc \\ \dagger & \text{si } \mathcal{L}_A(lb) = \dagger \end{cases} \qquad \mathcal{L}_2(b) = \begin{cases} c & \text{si } \mathcal{L}_A(rb) = rc \\ \dagger & \text{si } \mathcal{L}_A(rb) = \dagger \end{cases}$$

Alors $A_1 = (\mathcal{O}_1, \mathcal{L}_1)$ et $A_2 = (\mathcal{O}_2, \mathcal{L}_2)$ sont des arènes exactes donc elles proviennent respectivement des formules F_1 et F_2, et on a $A = A_1 \times A_2$ (grâce à la propriété d'exactitude) donc A provient de $F_1 \times F_2$

– si a est de format $\uparrow$ ou $\downarrow$ alors on fait le même raisonnement en remplaçant r par $\downarrow$ et l par $\uparrow$, et on obtient que A provient d'une formule $F = F_1 \rightarrow F_2$.

$\square$

Définition 38 (stratégie exacte) *Soit σ la stratégie uniforme engendrée dans le modèle par la stratégie symbolique $\bar{\sigma}$. On dit que σ est* ***exacte*** *si :*
- *$\bar{\sigma}$ est totale*
- *l'ensemble des vues que contient $\bar{\sigma}$ est fini*
- *pour toute partie $s \in \bar{\sigma}$, si s contient le symbole $\star^B$ dans un de ses coups alors B est exacte.*

Théorème 3 (complétude) *Soit σ une stratégie exacte sur l'arène exacte $\top \rightarrow A$. Alors σ est l'interprétation d'un terme t du système F à la Church tel que*

$$\vec{X}; \vdash t : A$$

Notons que, bien qu'on n'ait pas montré la composition des stratégies totales finies, ce résultat de complétude implique indirectement qu'en se restreignant à ces stratégies on a bien un modèle du système F. On s'en servira au chapitre 6.

Le fait que σ soit une stratégie sur $\top \rightarrow A$ correspond au fait que $\vec{X}; \vdash t : A$ est un séquent dont la partie gauche est vide. Dans la démonstration, on identifiera $\top \rightarrow A$ avec A pour plus de lisibilité.

Démonstration : On commence par appliquer au type A les règles de réduction suivantes :

$$\begin{gathered} A \times (B \times C) \Rightarrow (A \times B) \times C \\ A \rightarrow (B \times C) \Rightarrow (A \rightarrow B) \times (A \rightarrow C) \\ A \rightarrow (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \times B) \rightarrow C \\ \forall X.(A \times B) \Rightarrow (\forall X.A) \times (\forall X.B) \\ A \rightarrow \forall X.B \Rightarrow \forall X.(A \rightarrow B) \\ A \times \top \Rightarrow A \\ \top \times A \Rightarrow A \\ A \rightarrow \top \Rightarrow \top \\ \forall X.\top \Rightarrow \top \\ \top \rightarrow A \Rightarrow A \end{gathered}$$

Dans le modèle, ces règles correspondent à des renommages des nœuds, tandis que dans la syntaxe ce sont des isomorphismes. Toute stratégie exacte sur un type A quelconque peut être traduite par renommage en une stratégie exacte σ' sur le type A' réduit de A par le système de réécriture ci-dessus. Si on arrive à associer à σ' un terme t de type A', alors par les isomorphismes on peut construire un terme u de type A associé à σ. On peut donc se restreindre au cas où A est en forme normale. On a donc soit $A = \top$, et dans ce cas $t = \star$, soit :

$$\begin{array}{rcl} A & = & (\forall X_1^1 \dots \forall X_{n_1}^1 . B_1 \to Y_1) \times ((\forall X_1^2 \dots \forall X_{n_2}^2 . B_2 \to Y_2) \\ & & \times (\cdots \times (\forall X_1^p \dots \forall X_{n_p}^p . B_p \to Y_p) \dots)) \end{array}$$

On construit le terme $t = \langle t_1, T_1 \rangle$ avec $T_n = \langle t_n, T_{n+1} \rangle$ pour $1 \leq n < p$ et $T_p = t_p$, de la façon suivante : soit $1 \leq n < p$, on peut lui associer des symboles $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ avec $\alpha_i \in \{r, l\}$ correspondant à la partie t_n du terme. Supposons pour simplifier que $\{X_1, \dots, X_N\} \cap FTV(A) = \emptyset$, considérons le coup $m_1 = \alpha_1 \dots \alpha_k \star^{X_1} \cdots \star^{X_N} \uparrow j$ et la vue $m_1 m_2 \in \bar{\sigma}$ (elle existe par totalité de $\bar{\sigma}$). On a alors $B_n \neq \top$ car sinon m_2 ne peut exister, donc

$$B_n = (\forall X_1'^1 \dots \forall X_{n_1}'^1 . C_1 \to Z_1) \times (\cdots \times (\forall X_1'^p \dots \forall X_{n_p}'^p . C_p \to Z_p) \dots)$$

On a de plus $m_2 = M_1[M_2]$ avec d'une part $M_1 = \alpha_1 \dots \alpha_k \star^{X_1} \cdots \star^{X_N} \downarrow \beta_1 \dots \beta_K \downarrow \star^{D_1} \cdots \star^{D_{N'}} \uparrow j' \in \mathcal{O}_A$ où les $\beta_i \in \{r, l\}$ correspondent au choix d'un des éléments du produit, et d'autre part soit $M_2 = j' = j$, soit $M_2 \in \mathcal{M}_E$ où E est donné par une des arènes jouées auparavant (i.e. $E \in \{D_1, \dots, D_{N'}\}$).

Dans ce deuxième cas, en utilisant le même raisonnement que précédemment, on peut se permettre, modulo renommage des coups et application des isomorphismes, de considérer que E est sous forme normale pour le système de réécriture donné ci-dessus ; le coup $M_2 \in \mathcal{M}_E$ s'écrit donc lui aussi $M_2 = M_1'[M_2']$ avec $M_1' = \gamma_1 \dots \gamma_L \star^{D_1'} \cdots \star^{D_{N''}'} \uparrow j'' \in \mathcal{O}_E$ et soit $M_2 = j'' = j$ soit $M_2 \in \mathcal{M}_F$ avec $F \in \{D_1', \dots, D_{N''}'\}$

Ce processus peut être itéré un certain nombre de fois, mais comme un coup est une suite finie de symboles cela finit par s'arrêter.

Cette vue correspond au début du terme t_n : dans le cas $M_2 = j$ on pourra écrire

$$t_n = \Lambda X_1 \dots \Lambda X_N . \lambda x^{B_n} . \overline{\pi}(x)\{D_1\} \dots \{D_{N'}\}(t')$$

où $\overline{\pi}$ est une suite de symboles π_1 et π_2 correspondant au choix des β_i. Dans le cas $M_2 \in \mathcal{M}_E$ et $M_2' = j$ on écrit

$$t_n = \Lambda X_1 \dots \Lambda X_N . \lambda x^{B_n} . \overline{\pi}'(\overline{\pi}(x)\{D_1\} \dots \{D_{N'}\}\ )\{D_1'\} \dots \{D_{N''}'\}(t')$$

où $\overline{\pi}'$ est une suite de symboles π_1 et π_2 correspondant au choix des γ_i. Dans le cas $M_2 \in \mathcal{M}_E$ et $M_2' \in \mathcal{M}_F$ on continue de la même façon…

Il nous reste alors à définir le terme t'. Cela va se faire de la même façon, modulo le choix de la variable de tête : en effet, jusqu'à prśent on n'avait pas d'autre choix que la variable x, mais à l'itération suivante on aura une deuxième variable qui rentrera en jeu. Ce sera alors la donnée du pointeur de justification qui nous permettra de décider de la variable à choisir (pour une meilleure compréhension du problème, cf. les termes de Kierstead, analysés dans [Lau04]).

Soit donc G le type du terme t' (déterminé à partir de B_n et m_2. On a soit $G = \top$, et dans ce cas $t' = \star$, soit :

$$\begin{array}{rcl} G & = & (\forall U_1^1 \ldots \forall U_{n_1}^1 . H_1 \to V_1) \times ((\forall U_1^2 \ldots \forall U_{n_2}^2 . H_2 \to V_2) \\ & & \times (\cdots \times (\forall U_1^q \ldots \forall U_{n_q}^q . H_q \to V_q) \ldots)) \end{array}$$

On construit $t' = \langle t'_1, T'_1 \rangle$ avec $T'_n = \langle t'_n, T'_{n+1} \rangle$ pour $1 \leq n < p$ et $T'_p = t'_p$, de la façon suivante : soit $1 \leq n < p$, on peut lui associer des symboles $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k$ avec $\alpha'_i \in \{r, l\}$ correspondant à la partie $t_{\bar{n}}$ du terme. Considérons la vue $m_1 m_2 m_3 m_4 \in \bar{\sigma}$ avec $m_3 = M[\downarrow \alpha'_1 \ldots \alpha'_k \star^{\bar{X}_1} \cdots \star^{\bar{X}_N} \uparrow i]$, où M est le coup m_2 privé du dernier suffixe $\uparrow$ (ainsi $m_2 \vdash m_3$) et $\bar{X}_1 \ldots \bar{X}_N$ est un choix de variables fraîches. Deux cas peuvent se produire :

- soit m_4 est justifié par m_1 : dans ce cas en suivant le même raisonnement que précédemment on montre que

$$t'_n = \Lambda \bar{X}_1 \ldots \Lambda \bar{X}_N . \lambda y^{H_n} . \overline{\pi}(u_1)\{J_1\} \ldots \{J_{N'}\}(t'')$$

  où u_1 est soit x, soit de la forme $u_1 = \overline{\pi}'(u_2)\{J'_1\} \ldots \{J'_{N''}\}$ où u_2 est soit x, soit de la même forme
- soit m_4 est justifié par m_3 : dans ce cas on a $H_{\bar{n}} \neq \top$ et $m_4 = M_3[M_4]$ avec $M_3 = M[\downarrow \alpha'_1 \ldots \alpha'_k \star^{\bar{X}_1} \cdots \star^{\bar{X}_N} \downarrow \beta'_1 \ldots \beta'_K \star^{J_1} \cdots \star^{J_{N'}} \uparrow i'] \in \mathcal{O}_A$ et soit $M_4 = i' = i$, soit $M_4 \in \mathcal{M}_L$ où L est une des arènes données dans M_3. M_4 peut à nouveau être écrite de façon récursive, et finalement on montre que

$$t'_n = \Lambda \bar{X}_1 \ldots \Lambda \bar{X}_N . \lambda y^{H_n} . \overline{\pi}(u_1)\{J_1\} \ldots \{J_{N'}\}(t'')$$

  où u_1 est soit y, soit de la forme $u_1 = \overline{\pi}'(u_2)\{J'_1\} \ldots \{J'_{N''}\}$ où u_2 est soit y, soit de la même forme. La seule différence avec le cas précédent est donc l'utilisation de la variable y plutôt que x.

Quant au terme t'', il est construit en prolongeant la vue $m_1 m_2 m_3 m_4$ et en suivant la même mécanique. Comme la stratégie contient un ensemble fini de vues, la taille d'une vue est bornée et donc ce processus finit par s'arrêter.

Le lecteur assidu (voire acharné) pourra vérifier que l'interprétation dans le modèle du terme t ainsi construit est bien la stratégie exacte σ dont on est parti. □

5.5 Hyperforêts

Dans cette section on va introduire la notion d'**hyperforêt**, une structure arborescente qui peut être construite à partir d'une arène. Cette notion a été introduite par Hughes [Hug00], et dans [dL07b] on a conservé l'approche consistant à interpréter les types du second ordre directement par des hyperforêts (aussi appelées arènes polymorphes). Mais la substitution était difficile à définir dans ce contexte, notamment parce qu'il fallait vérifier les égalités du type

$$(A \to B)[C/X] = A[C/X] \to B[C/X]$$

nécessaires à la construction d'une hyperdoctrine (cf. section 5.4.1). D'autre part, la formulation des coups dans une hyperforêt était loin d'être triviale ; c'est la raison pour laquelle on a choisi ici, comme dans [dL07a], de n'introduire les hyperforêts que dans un second temps.

Les hyperforêts constitueront la structure fondamentale pour notre travail sur les isomorphismes de types.

5.5.1 Définition d'une hyperforêt

On va utiliser dans ce qui suit la notion de multi-ensemble. On rappelle qu'un multi-ensemble sur E peut être décrit comme une fonction $R : E \to \mathbb{N}$. L'ensemble des multi-ensembles sur E sera noté $\mathbb{P}_{mult}(E)$. Pour $S \in \mathbb{P}_{mult}(E)$, on note $s \in S$ si $S(s) > 0$. On note aussi R^+ l'ensemble obtenu à partir du multi-ensemble R en considérant des copies $(b, 1), \dots, (b_k)$ pour chaque $b \in R$ tel que $R(b) = k$.

Si R est un multi-ensemble sur E et f une fonction de E dans F, $f(R)$ est un multi-ensemble sur F défini par :

$$(f(R))(c) = \sum_{e \in E \wedge f(e) = c} R(e)$$

Définition 39 (hyperforêt) *Une **hyperforêt** $H = (F, \mathcal{R}, \mathcal{D})$ est une forêt finie $F = (\mathcal{F}, \leq)$ munie d'un multi-ensemble fini d'**hyperarêtes** $\mathcal{R} \in \mathbb{P}_{mult}(\mathcal{F} \times \mathbb{P}(\mathcal{F}))$ et d'une fonction partielle de **décoration** $\mathcal{D} : \mathcal{F} \rightharpoonup \mathcal{X}$, tels que :*

- *pour tout $(t, S) \in \mathcal{R}$, si $s \in S$ alors $t \leq s$ et $\mathcal{D}(s)$ n'est pas défini*
- *pour tous $b = (t, S) \in \mathcal{R}$ et $b' = (t', S') \in \mathcal{R}$, $S \cap S' \neq \emptyset \Rightarrow b = b' \wedge \mathcal{R}(b) = 1$.*

On remarque que, par définition d'une hyperforêt, le cas $\mathcal{R}_A((t, S)) \geq 2$ ne peut se produire que lorsque $S = \emptyset$. En-dehors de ce cas particulier, on peut donc considérer $\mathcal{R}_A$ comme un ensemble (ce qui ne sera pas le cas au chapitre 7).

Soit $H = (F, \mathcal{R}, \mathcal{D})$ une hyperforêt. On note $\mathcal{T}^H = \{t \in \mathcal{F} \mid \ \exists S \subseteq \mathcal{F},\ (t, S) \in \mathcal{R}\}$ et $\mathcal{S}^H = \{s \in \mathcal{F} \mid \ \exists (t, S) \in \mathcal{R},\ s \in S\}$. Si $b = (t, S)$ est une hyperarête, sa **cible** est $\mathcal{T}(b) = t$ et sa **source** est $\mathcal{S}(b) = S$. Enfin, le multi-ensemble $quant^H(c) \in \mathbb{P}_{mult}(\mathcal{F})$ des **quantificateurs** liés à un nœud $c \in \mathcal{F}_a$ est défini par :

$$quant^H(c)(b) = \begin{cases} \mathcal{R}(b) & \text{si } \mathcal{T}^H(b) = c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 40 (référence, amis) *Soit $H = (F, \mathcal{R}, \mathcal{D})$ une hyperforêt, avec $F = (\mathcal{F}, \leq)$. Pour tout $s \in \mathcal{F}$, si $s \in \mathcal{S}^H$ alors il existe un unique couple $(t, S) \in \mathcal{R}$ tel que $s \in S$: la **référence** de s est donnée par $ref^H(s) = t$ et l'ensemble des **amis** de s est $fr^H(s) = S \backslash \{s\}$. Si $s \notin \mathcal{S}^H$, ref^H et fr^H ne sont pas définis en s.*

On va maintenant exhiber la structure d'hyperforêt associé à une arène A.

5.5.2 Des ordres partiels aux forêts

Soit $(E, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. La relation de justification $\vdash \subseteq E \cup (E \times E)$ est donnée par :

$$\begin{cases} \vdash e & \text{si } e' \leq e \Rightarrow (e' = e) \\ e \vdash e' & \text{si } e \leq e' \wedge \forall f,\ e \leq f \leq e' \Rightarrow (e = f \vee e' = f) \end{cases}$$

On note $\mathit{Chem}(E)$ l'ensemble des **chemins** dans $(E, \leq)$, c'est-à-dire l'ensemble des suites $e_1 e_2 \ldots e_n$ d'éléments de E tels que $\vdash e_1$ et $e_i \vdash e_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Si on considère l'ordre préfixe $\preceq$ sur $\mathit{Chem}(E)$ ($e_1 \ldots e_n \preceq e_1 \ldots e_n e'_1 \ldots e'_p$) alors $(\mathit{Chem}(E), \preceq)$ est une forêt.

On définit aussi l'opération $or : \mathit{Chem}(E) \to E$ par : $or(f) = e_n$ si $f = e_1 \ldots e_n$. $or(f)$ est appelée l'**origine** de f. On notera que si $f, g \in \mathit{Chem}(E)$,

$$f \preceq g \Leftrightarrow or(f) \leq or(g)$$

5.5.3 Des arènes aux hyperforêts

Si A est une arène, $\mathcal{O}_A$ est un ensemble fini partiellement ordonné, auquel on peut associer, par la construction décrite ci-dessus, une forêt finie $F_A = (\mathcal{F}_A, \preceq)$ avec $\mathcal{F}_A = \mathit{Chem}(\mathcal{O}_A)$. Les éléments de $\mathcal{F}_A$ seront généralement appelés des **nœuds**.

Par ailleurs, on déduit de $\mathcal{L}_A$ le multi-ensemble $\mathcal{R}_A \in \mathbb{P}_{mult}(\mathcal{F}_A \times \mathbb{P}(\mathcal{F}_A))$ de la façon suivante : on définit

$$\mathcal{L} = \{a[\star 0] \in \mathbb{A} \mid\ \exists a' \in \mathcal{O}_A, a[\star 0] \sqsubseteq^p a'\}$$

La valeur de $\mathcal{R}_A$ en (r, S) est égale au nombre d'occurrences $y \in \mathcal{L}$ telles que :
- $y \sqsubseteq^p or(t)$
- pour tout $t' \leq t$, si $y \sqsubseteq^p or(t')$ alors $t' = t$
- $S = \{s \in \mathcal{F}_A \mid\ t \preceq s \wedge \mathcal{L}_A(or(s)) = y\}$

On définit enfin la fonction partielle $\mathcal{D}_A : \mathcal{F}_A \rightharpoonup \mathcal{X}$ par : $\mathcal{D}_A(x) = X_i$ ssi $\sharp(or(x)) = i$ $(i > 0)$.

Proposition 12 *Si A est une arène, alors $H_A = (F_A, \mathcal{R}_A, \mathcal{D}_A)$ est une hyperforêt.*

Démonstration : Soit $(t, S) \in \mathcal{R}_A$. Par construction de $\mathcal{R}_A$ on a bien $t \preceq s$ pour tout $s \in S$. De plus $\mathcal{D}_A(s)$ n'est pas défini pour $s \in S$ car $\mathcal{L}_A(s) \neq \dagger$.

Soient $(t, S), (t', S') \in \mathcal{R}_A$, supposons qu'il existe $s \in S \cap S'$. Alors $y = \mathcal{L}_A(or(s))$ est tel que : pour tout $t' \leq t$, si $y \sqsubseteq^p or(u)$ alors $u = t$, et d'autre part $y \sqsubseteq^p or(t')$ d'où $t' = t$. Cela implique :

$$\begin{aligned} S &= \{v \in \mathcal{F}_A \mid\ t \preceq v \wedge \mathcal{L}_A(or(v)) = y\} \\ &= \{v \in \mathcal{F}_A \mid\ t' \preceq v \wedge \mathcal{L}_A(or(v)) = y\} \\ &= S' \end{aligned}$$

ce qui fait bien de H_A une hyperforêt. □

Exemple : Considérons le type $A = \forall X_1.((X_1 \times X_2) \to (X_1 \times \bot))$. On a :

$$\mathcal{O}_A = \{\star{\downarrow}l0, \star{\downarrow}r2, \star{\uparrow}l0, \star{\uparrow}r0\}$$

et :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_A(\star{\downarrow}l0) & = & \star 0 \\ \mathcal{L}_A(\star{\downarrow}r2) & = & \dagger \\ \mathcal{L}_A(\star{\uparrow}l0) & = & \star 0 \\ \mathcal{L}_A(\star{\uparrow}r0) & = & \dagger \end{cases}$$

Les chemins de $\mathcal{O}_A$ sont : $a = \star{\uparrow}l0$, $b = \star{\uparrow}l0 \cdot \star{\downarrow}l0$, $c = \star{\uparrow}l0 \cdot \star{\downarrow}r2$, $d = \star{\uparrow}r0$, $e = \star{\uparrow}r0 \cdot \star{\downarrow}l0$ et $f = \star{\uparrow}r0 \cdot \star{\downarrow}r2$. Par ailleurs, $\mathcal{L} = \{\star 0\}$.

L'hyperforêt H_A est donc définie par :

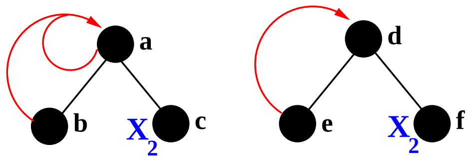
$$\mathcal{F}_A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$\mathcal{R}_A = \{(a, \{a, b\}), (d, \{e\})\}$$

$$\mathcal{D}_A(c) = \mathcal{D}_A(f) = X_2$$

(ici $\mathcal{R}_A$ est vu comme un ensemble).

Tout cela est résumé dans la représentation graphique de H_A :



Soit A une arène, on note :

$$fr_A = fr^{H_A} \qquad ref_A = ref^{H_A} \qquad \mathcal{S}_A = \mathcal{S}^{H_A} \qquad \mathcal{T}_A = \mathcal{T}^{H_A} \qquad quant_A = quant^{H_A}$$

On peut étendre la notion de polarité aux nœuds de l'hyperforêt H_A : si $a \in \mathcal{F}_A$ on définit $\lambda(a) = \lambda(or(a))$. Cela coÃ¯ncide avec une définition alternative de la polarité, plus usuelle dans les jeux d'arènes : $\lambda(a) = \mathbf{O}$ (resp. $\lambda(a) = \mathbf{P}$) si l'ensemble $\{a' \in \mathcal{F}_A \mid a' \leq a\}$ est de cardinal impair (resp. de cardinal pair). Notons aussi que $paux_A(or(a)) = \lambda(ref_A(a))$.

Intuitivement, les nœuds de la forêt $\mathcal{F}_A$ contiennent *plus d'information* que les occurrences de $\mathcal{O}_A$. En effet, étant donné un nœud $c \in \mathcal{F}_A$, on est capable de donner la liste totalement ordonnée de ses ancêtres, alors que pour une occurrence il peut exister plusieurs ancêtres non comparables par la relation d'ordre.

Cependant, lorsqu'on considère une partie de $\mathcal{P}_A$, la relation de justification attribue à chaque coup non initial $m_1[m_2]$ (donc à l'occurrence $a = \mathcal{A}(m_1)$ correspondante) un coup qui le justifie, lui-même héréditairement justifié par d'autres coups. Cela revient donc à attribuer à a une liste d'occurrences qui le justifient héréditairement. Dans ces conditions, considérer a comme un nœud de $\mathcal{F}_A$ revient au même.

On s'autorisera donc, à partir de maintenant, à considérer qu'une partie de $\mathcal{P}_A$ est une suite de coups de la forme m_1 ou $m_1[m_2]$, avec $\mathcal{A}(m_1) \in \mathcal{F}_A$.

On conclut cette section par la définition d'un isomorphisme entre hyperforêts, notion naturelle mais fondamentale pour la suite de notre travail.

Définition 41 (isomorphisme d'hyperforêts) *Soient $H_1 = (F_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{D}_1)$ et $H_2 = (F_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{D}_2)$ deux hyperforêts avec $F_1 = (\mathcal{F}_1, \leq_1)$ et $F_2 = (\mathcal{F}_2, \leq_2)$. On dit que H_1 et H_2 sont **isomorphes** ($H_1 \simeq H_2$) s'il existe une bijection $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ qui préserve la structure d'hyperforêt, i.e. telle que :*
- *$a \leq_1 a'$ ssi $f(a) \leq_2 f(a')$*
- *$\mathcal{R}_2 = f(\mathcal{R}_1)$*
- *$\mathcal{D}_2 \circ f = \mathcal{D}_1$*

5.6 Isomorphismes de types à la Church

On va à présent s'attacher à redémontrer la caractérisation, donnée par Roberto Di Cosmo dans [DC95], des isomorphismes de types pour le système F à la Church, en utilisant notre modèle de jeux pour en donner une preuve géométrique.

On définit un isomorphisme dans le modèle de la façon suivante :

Définition 42 (isomorphisme de jeux) *Soient $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to A$. On dit que (σ, τ) est un **isomorphisme de jeux** entre A et B si $\sigma;\tau = id_A$ et $\tau;\sigma = id_B$.*

L'idée fondamentale de la preuve est que la structure d'hyperforêt est l'invariant géométrique conservé par tout isomorphisme. Le théorème central qu'il s'agit de prouver est donc le suivant :

Théorème 4 *S'il existe un isomorphisme de jeux (σ, τ) entre deux arènes A et B, avec σ et τ uniformes, alors H_A et H_B sont isomorphes.*

La preuve de ce théorème fait l'objet des quatre premières sections. Dans la dernière section, on montrera que ce théorème nous permet de retrouver le système équationnel de Roberto Di Cosmo.

5.6.1 Parties zig-zag

La première étape de la démonstration consiste à adapter certains résultats d'Olivier Laurent dans le cadre des jeux HO [Lau05] à notre contexte de jeux du second ordre.

Définition 43 (partie zig-zag) *Une partie $s \in \mathcal{P}_{A \to B}$ est appelée **zig-zag** si*
- *chaque coup Joueur qui suit un coup Opposant de format $\uparrow$ (resp. $\downarrow$) est de format $\downarrow$ (resp. $\uparrow$)*

– *chaque coup Joueur qui suit un coup Opposant initial est justifié par ce dernier*
– $s\restriction_\downarrow$ *et* $s\restriction_\uparrow$ *ont les mêmes pointeurs.*

Si s est une partie zig-zag de longueur paire dans $A \to B$, on note $\breve{s}$ l'unique partie zig-zag dans $B \to A$ telle que $\breve{s}\restriction_\downarrow = s\restriction_\uparrow$ et $\breve{s}\restriction_\uparrow = s\restriction_\downarrow$.

Lemme 9 *S'il existe un isomorphisme de jeux (σ, τ) entre A et B alors :*
– *toute partie de σ ou τ est zig-zag*
– $\tau = \{\breve{s} \mid s \in \sigma\}$
– *σ et τ sont totales.*

Démonstration : Par traduction vers les jeux HO, on a $\sigma^{HO} : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$ et $\tau^{HO} : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_A$, mais aussi : $\sigma^{HO};\tau^{HO} = id_{\mathcal{M}_A}$ et $\tau^{HO};\sigma^{HO} = id_{\mathcal{M}_B}$. On peut alors utiliser les résultats d'Olivier Laurent [Lau05] dans le cadre des jeux HO, qui nous permettent de dire :
– toute partie de σ^{HO} ou τ^{HO} est zig-zag
– $\tau^{HO} = \{\breve{s} \mid s \in \sigma^{HO}\}$
– σ^{HO} et τ^{HO} sont totales.

ce qui implique que σ et τ satisfont les mêmes propriétés. □

5.6.2 Régularité

Dans cette section on va introduire la notion de **régularité**[4] comme une conséquence de l'uniformité. Par la suite, suivant la démonstration de [dL07b], on utilisera la régularité plutôt que l'uniformité pour raisonner sur notre isomorphisme, afin de conserver l'aspect géométrique de la démonstration. Notons qu'une démonstration directe à partir de l'uniformité serait aussi possible, dans l'esprit de ce qui sera fait au chapitre 6.

On notera que dans [dL07b] la régularité est une propriété ajoutée à notre modèle pour obtenir un sous-modèle de celui-ci, dans lequel on peut caractériser les isomorphismes. En particulier, on peut montrer que les stratégies régulières composent. Ici, la régularité étant déduite de l'uniformité, on n'a pas besoin d'un sous-modèle régulier.

Définition 44 (rang) *Soient A une arène et $m \in \mathcal{M}_A$. m s'écrit $m = m_1[m_2]$ avec $\mathcal{A}(m_1) = a \in \mathcal{O}_A$. Supposons que m contienne une occurrence de $\star^B$ pour $B \in \mathcal{G}$. On définit le **rang** de cette occurrence de B dans m, noté $rang_A^m(B) \in \{1,2\}$, par : $rang_A^m(B) = 1$ (resp. $rang_A^m(B) = 2$) ssi $\star^B$ apparaît dans m_1 (resp. dans m_2).*

On note $\llcorner m \lrcorner_i$, pour $i \in \{1,2\}$ la liste des occurrences d'arènes de rang i dans m, ordonnées suivant leur apparition dans m.

Dans la définition suivante, on note $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ l'ensemble des parties construites sur la grammaire $\mathbb{A}$.

Définition 45 (stratégie régulière) *Soit A une arène. Une stratégie σ est dite **régulière** si il existe un ensemble dénombrable d'entiers I et des fonctions partielles*

[4]Dans [dL07b] c'est une variante de cette propriété qui est appelée uniformité. Mais la notion d'uniformité définie dans la présente thèse est plus fondamentale.

$f : \mathcal{P}(\mathbb{A}) \rightharpoonup \mathcal{P}(\mathbb{A})$ et $F_j : \mathbb{A}^* \rightharpoonup \mathcal{C}^*$ pour $j \in \{1,2\}$, tels que : si $s \in \sigma$ et $sm \in \mathcal{P}_A$, alors $smm' \in \sigma$ ssi $\mathcal{A}(smm') = f(\mathcal{A}(sm))$ et $\llcorner m' \lrcorner_j = F_j(\mathcal{A}(sm))[\llcorner sm \lrcorner_j / I]$ pour $j \in \{1,2\}$.

Dans cette définition, la notation $F_j(\mathcal{A}(sm))[\llcorner sm \lrcorner_j / I]$ signifie que, à chaque arène de la liste $F_j(\mathcal{A}(sm))$, on applique successivement les substitutions $\_ \mapsto \_[A_k/X_{i_k}]$, où A_k est la k-ième arène de la liste $F_j(\mathcal{A}(sm))$, et i_k le k-ième plus petit élément de I.

Pour des raisons peu fondamentales liées à l'existence de I, il n'est pas tout-à-fait exact que l'uniformité implique la régularité telle qu'elle est définie ici. Cependant cette affirmation est presque exacte : on en donne ici une version légèrement affaiblie, qui nous suffira pour la preuve.

On note $|s|$ la longueur d'une partie s.

Proposition 13 *Si $\sigma : A$ est uniforme alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\{s \in \sigma \mid |s| \leq N\}$ est régulière.*

Démonstration : Soit $\bar{\sigma}$ la stratégie uniforme la plus petite possible telle que :

- la stratégie engendrée par extension à partir de $\bar{\sigma}$ contient $\sigma_N = \{s \in \sigma \mid |s| \leq N\}$
- dès qu'on doit choisir une variable de copycat X_i, on choisit i le plus petit possible mais supérieur aux précédents choix de variables de copycat (ce choix est toujours possible par uniformité).

On remarque que $\bar{\sigma}$ est un ensemble fini de parties. On peut donc définir un ensemble dénombrable $I = \{i \in \mathbb{N} \mid i > i_0\}$ où i_0 est le plus grand entier tel qu'un symbole $\star^A$, avec $X_{i_0} \in FTV(A)$, apparaisse dans une partie de $\bar{\sigma}$.

Pour toute partie $smn \in \bar{\sigma}$, on définit $f(\mathcal{A}(sm)) = \mathcal{A}(smn)$ (c'est bien défini par uniformité) et pour tout $j > 0$, si G_j est la suite des arènes de rang j dans n et $X_{p_1}, \ldots, X_{p_l}$ la suite des variables de copycat apparaissant dans G_j, alors $F_j(\mathcal{A}(sm)) = G_j[X_{i_0+q_k}/X_{p_k}]_k$ où q_k est la position de la première occurrence de X_{p_k} dans la liste $\llcorner m \lrcorner_j$.

On étend maintenant f aux parties non symboliques. Supposons que cette fonction soit définie pour la suite $u = a_1 \ldots a_r \in \mathbb{A}^*$ et notons $a_1 \ldots a_r a_{r+1} = f(a_1 \ldots a_r)$. Par définition de $\bar{\sigma}$, il existe une unique partie $s \in \bar{\sigma}$ telle que $\mathcal{A}(s) = u$, et on note $X_{p_1}, \ldots, X_{p_K}$ les variables de copycat de s. Soient $B_1, \ldots, B_K \in \mathcal{G}$, on définit $f(a'_1 \ldots a'_r) = a'_1 \ldots a'_r a'_{r+1}$ où $a'_j = a_j[\mathcal{A}(r_i)]$ avec $r_i \in \mathcal{M}_{B_i}$ initial si $\sharp(a_j) = p_i$ et $a'_j = a_j$ sinon. Si $\sharp(a_r) = p_i$, on définit aussi :

$$f(S) = Sa_{r+1}[m_k]$$

pour $S = a'_1 \ldots a'_{r_1} a_r[m_1] a_{r+1}[m_1] a_{r+1}[m_2] a_r[m_2] \ldots a_r[m_k]$ avec $m_1 \ldots m_k = \mathcal{A}(v)$, v bi-vue dans $\mathcal{M}_{B_i}$ de longueur impaire et $r + 2 * k \leq N$, et

$$f(S') = S' a_r[m_k]$$

pour $S' = a'_{r_1} a_r[m_1] a_{r+1}[m_1] a_{r+1}[m_2] a_r[m_2] \ldots a_{r+1}[m_k]$ avec $m_1 \ldots m_k = \mathcal{A}(v)$, v bi-vue dans $\mathcal{M}_{B_i}$ de longueur paire et $r + 2 * k \leq N$.

Il faut aussi étendre F_j aux parties non symboliques. Supposons que F_j soit définie pour la suite $u = a_1 \dots a_r \in \mathbb{A}^*$ et notons $S = F_j(a_1 \dots a_r)$. Par définition de $\bar{\sigma}$, il existe une unique partie $s \in \bar{\sigma}$ telle que $\mathcal{A}(s) = u$, et on note $X_{p_1}, \dots, X_{p_K}$ les variables de copycat de s. Soient $B_1, \dots, B_K \in \mathcal{G}$, on définit $S' = F_j(a'_1 \dots a'_r)$, où $a'_j = a_j[\mathcal{A}(r_i)]$ avec $r_i \in \mathcal{M}_{B_i}$ initial si $\sharp(a_j) = p_i$ et $a'_j = a_j$ sinon, de la façon suivante :

- si $j = 1$, $S' = S$
- si $j = 2$ et $\sharp(a_j) = p_i$, il faut d'une part décaler les indices des arènes X_{i_0+k} apparaissant dans S, et d'autre part ajouter à cette liste les arènes $X_{p_1}, \dots, X_{p_M}$ dont les indices correspondent à la place des arènes de r_i dans la liste $\llcorner s \lrcorner_2$ (c'est-à-dire les M dernières places, où M est le nombre de symboles $\star$ dans $\mathcal{A}(r_i)$)
- si $j = 2$ et $\sharp(a_j) \neq p_i$ pour $i \in [1, K]$, on se contente de décaler les indices des arènes X_{i_0+k} déjà présentes dans S, en fonction des nouveaux symboles $\star$ apparaissant dans $a'_1 \dots a'_r$.

Si $\sharp(a_r) = p_i$, on définit de la même façon, lorsque $r + 2 * k \leq N$, la suite S_k donnée par $S_k = F_j(a'_1 \dots a'_{r_1} a_r[m_1] a_{r+1}[m_1] a_{r+1}[m_2] a_r[m_2] \dots a_r[m_k])$ pour k impair et $S_k = F_j(a'_1 \dots a'_{r_1} a_r[m_1] a_{r+1}[m_1] a_{r+1}[m_2] a_r[m_2] \dots a_{r+1}[m_k])$ pour k pair :

- si $j = 1$, $S_k = S$
- si $j = 2$, il faut d'une part décaler les indices des arènes X_{i_0+k} apparaissant dans S, et d'autre part ajouter à cette liste les arènes $X_{p_1}, \dots, X_{p_M}$ dont les indices correspondent à la place des arènes de m_k dans la liste $\llcorner s \lrcorner_2$ (c'est-à-dire les M dernières places, où M est le nombre de symboles $\star$ dans $\mathcal{A}(m_k)$).

Enfin, on étend f et F_j aux parties non innocentes : si $f(\ulcorner u \urcorner) = \ulcorner u \urcorner a$, on définit $f(u) = ua$ et $F_j(u) = F_j(\ulcorner u \urcorner)$.

On vérifie aisément que f et F_j pour $j \in \{1, 2\}$ sont bien définies comme des fonctions, c'est-à-dire que $f(a_1 \dots a_r)$ et $F_j(a_1 \dots a_r)$ ne dépendent que de leur argument. Par ailleurs, étant donnée la façon dont ces fonctions sont définies, on a bien : si $s \in \sigma_N$ et $sm \in \mathcal{P}_A$, alors $smm' \in \sigma_N$ ssi $\mathcal{A}(smm') = f(\mathcal{A}(sm))$ et $\llcorner m' \lrcorner_j = F_j(\mathcal{A}(sm))[\llcorner sm \lrcorner_j / I]$ pour $j \in \{1, 2\}$. $\square$

5.6.3 Construction de la bijection entre forêts

Étant donnés ces résultats préliminaires, on considère maintenant un isomorphisme de jeux (σ, τ) entre deux arènes A et B, avec σ et τ uniformes, donc régulières, et on va construire la bijection $g : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$. On lui associera une bijection $\Psi : \mathcal{R}_A \to \mathcal{R}_B$ telle que $g(\mathcal{T}(b)) = \mathcal{T}(\Psi(b))$ pour tout $b \in \mathcal{R}_A$.

Ce n'est qu'ensuite qu'on prouvera que $g(\mathcal{S}(b)) = \mathcal{S}(\Psi(b))$ et $\mathcal{D}_A(c) = \mathcal{D}_B(g(c))$ pour $c \in \mathcal{F}_A$, ce qui achèvera de montrer que g est bien un morphisme pour la structure d'hyperforêt.

Dans cette section, comme dans la suivante, on identifiera les occurrences de $\mathcal{O}_A$ avec les nœuds de $\mathcal{F}_A$: comme on l'a dit dans la section 5.5, cette identification fait sens dès qu'on raisonne sur des suites justifiées, car nœuds et occurrences recouvrent alors la même information.

On s'autorisera aussi à identifier les nœuds de $\mathcal{F}_A$ et $\mathcal{F}_B$ avec les nœuds correspondants de $\mathcal{F}_{A \to B}$ et $\mathcal{F}_{B \to A}$.

On définit quelques notations :

- si J est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, $\rho_j(J)$ est le j-ième plus petit entier appartenant à J
- soit $m \in \mathbb{M}$ et $C \in \mathcal{G}$, $m\{j := C\}$ est le coup obtenu en remplaçant $\star^{D_j}$, le j-ième symbole de la forme $\star^D$ où $D \in \mathcal{G}$, par $\star^C$. Dans le cas où $m \in \mathcal{M}_E$ pour un certain $E \in \mathcal{G}$, on notera que si $\mathcal{O}_{D_j} \subseteq \mathcal{O}_C$ et $\mathcal{L}_C, \mathcal{L}_{D_j}$ coïncident sur $\mathcal{O}_{D_j}$, alors $m[j := C] \in \mathcal{M}_E$
- soit $a \in \mathcal{F}_A$, on note $[a]$ l'unique coup de $\mathcal{M}_A$ tel que : $\mathcal{A}([a]) = a[k]$ avec $k \in \mathbb{N}$, et pour tout symbole $\star^D$ apparaissant dans $[a]$, on a $D = \top \to \bot$.

Pour un choix de N_0 assez grand, les stratégies $\sigma_{N_0} = \{s \in \sigma \mid \ |s| \le N_0\}$ et $\tau_{N_0} = \{s \in \sigma \mid \ |s| \le N_0\}$ sont régulières, déterminées respectivement par les ensembles I et I', et les fonctions f, F_1, F_2 et f', F'_1, F'_2. Pour la suite il suffit de choisir $N_0 \ge 2(\mathit{Card}(\mathcal{O}_A) + \mathit{Card}(\mathcal{O}_B)) + 1$ car on n'utilisera aucune partie de longueur supérieure.

Lemme 10 *Soit a un nœud de $\mathcal{F}_A$ et $a_1 \ldots a_p$ la suite de nœuds de $\mathcal{F}_A$ tels que : $\vdash a_1$, $a_i \vdash a_{i+1}$ pour $1 \le i \le p-1$ et $a_p = a$. On peut construire une fonction $g : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ telle que :*

- $[g(a_1)][a_1][a_2][g(a_2)][g(a_3)][a_3] \cdots \in \sigma$
- *il existe une bijection $\psi : \mathit{quant}^+_A(a_p) \to \mathit{quant}^+_B(g(a_p))$.*

La démonstration de ce lemme figue ci-après, mais on va d'abord en donner une explication intuitive. Notons que les fonctions g et ψ devraient dépendre de a, et donc s'écrire g_a et ψ_a. Mais en réalité, par construction, si a' est un ancêtre de a alors $g_a(a') = g_{a'}(a') = g(a')$, et il en est de même pour ψ.

La construction va se faire par induction. L'idée intuitive est la suivante : considérons par exemple la composition $\sigma; \tau = id_A$. Pour chaque p, la situation peut être décrite de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccc} [a_p] & & m & & [a_p] \\ \bullet & \xleftarrow{\tau} & \bullet & \xleftarrow{\sigma} & \bullet \\ \underbrace{\forall\ldots\forall}_{n} & & \underbrace{\forall\ldots\forall}_{n'} & & \underbrace{\forall\ldots\forall}_{n} \end{array}$$

où les quantificateurs indiquent la présence d'arènes de rang 1.

La question qui se pose alors est la suivante : a-t-on $n' = n$?

On prouve d'abord que $n' \ge n$, l'argument étant le suivant : les arènes de droite doivent retrouver l'information contenue dans les arènes de gauche, à partir des arènes du milieu uniquement. Donc les arènes du milieu doivent contenir l'information des arènes de gauche, à travers des variables X_i leur correspondant dans l'image de F_2.

Par ailleurs, si une seule arène du milieu contient l'information correspondant à deux arènes de gauche, alors l'utilisation de cette arène résultera à droite en une arène plus grosse que l'arène de gauche dont on est parti. Donc, chaque arène de gauche doit avoir au moins une arène du milieu qui lui correspond exactement, d'où $n' \ge n$.

On prouve de la même façon que $n \geq n'$, et cela nous indique au passage que $m = [g(a_p)]$ pour un certain nœud $g(a_p)$.

Passons maintenant à la preuve formelle :

Démonstration : On raisonne par induction sur p.

Si $p = 0$ il suffit de dire que $\epsilon \in \sigma$ et $\epsilon \in \tau$.

Si $p = p' + 1$ avec p' pair, on note $s_1 = [a_1][g(a_1)][g(a_2)][a_2]...[g(a_{p'})][a_{p'}] \in \tau$ et $s_2 = [g(a_1)][a_1][a_2][g(a_2)]...[a_{p'}][g(a_{p'})] \in \sigma$. Par totalité, il existe un unique coup m, joué dans B, tel que $s_1[a_p]m \in \tau$, et on fixe $g(a_p) \in \mathcal{O}_B$ tel que $\mathcal{A}(m) = g(a_p)[m']$. Dans ce qui suit, on va montrer que $m = [g(a_p)]$.

On pose $quant^+(a_p) = \{b_1, \ldots, b_n\}$ et $quant^+(g(a_p)) = \{b'_1, \ldots, b'_{n'}\}$. Soit $L' = F'_1(\mathcal{A}(s_1[a_p])) \in \mathcal{C}^*$, on note $G'_1, \ldots, G'_{n'}$ les n' dernières arènes de la liste L'. Par régularité de τ, on a $\llcorner m \lrcorner_1 = L'[S_1]$ où S_1 est une série de substitutions. $G'_1[S_1], \ldots, G'_{n'}[S_1]$ sont les instantiations de $b'_1, \ldots, b'_{n'}$ dans m car ce sont les n' dernières instantiations. On note $N' + n'$ le nombre total d'arènes dans L'.

Soit $L = F_1(\mathcal{A}(s_2 m)) \in \mathcal{C}^*$, on note $G_1, \ldots, G_n$ les n dernières arènes de la liste L. Par régularité de σ, on a $\llcorner [a_p] \lrcorner_1 = L[S_2]$ où S_2 est une série de substitutions. $G_1[S_1], \ldots, G_n[S_1]$ sont les instantiations de $b_1, \ldots, b_n$ dans $[a_p]$ car ce sont les n dernières instantiations. D'où $G_i[S_1] = \top \to \bot$ pour $1 \leq i \leq n$. On note $N + n$ le nombre total d'arènes dans L.

Fixons un indice $N + 1 \leq i \leq N + n$, et supposons que :

$$\forall 1 \leq j \leq n', \forall c \in \mathcal{O}_{G'_j},\ \sharp(c) \neq \rho_i(I')$$

Cela signifie que la substitution $\_ \mapsto \_[\top \to \bot / X_{\rho_i(I')}]$ n'intervient pas dans $L'[S_1]$. Soit H une arène telle que $\mathcal{O}_{\top\to\bot} \subseteq \mathcal{O}_H$, on a $s_1([a_p]\{i := H\})m' \in \tau$, avec $\llcorner m' \lrcorner_1 = F'_1(\mathcal{A}(s_1([a_p]\{i := H\})))[S'_1]$ où S'_1 est une série de substitutions. D'après ce qui précède $F'_1(\mathcal{A}(s_1([a_p]\{i := H\})))[S'_1] = F'_1(\mathcal{A}(s_1([a_p]\{i := H\})))[S_1]$, et de plus on constate que $\mathcal{A}(s_1([a_p]\{i := H\})) = \mathcal{A}(s_1[a_p])$. D'où $m' = m$, mais alors $s_2 m([a_p]\{i := H\}) \in \sigma$, ce qui implique que $[a_p]\{i := H\} = [a_p]$ par déterminisme de σ, et c'est absurde.

Il existe donc au moins une arène G'_j parmi $G'_1, \ldots, G'_{n'}$ telle que : $\exists c \in \mathcal{O}_{G'_j},\ \sharp(c) = \rho_i(I')$. Appelons $G'_{j_1}, \ldots, G'_{j_l}$ les arènes vérifiant cette propriété. Supposons maintenant que :

$$\forall j \in \{N' + j_1, \ldots, N' + j_l\}, \forall c \in \mathcal{O}_{G_{i-N}},\ \sharp(c) \neq \rho_j(I)$$

En reprenant l'arène H ci-dessus, on a $s_1([a_p]\{i := H\})m' \in \tau$ avec $\mathcal{A}(m') = \mathcal{A}(m)$ et $\llcorner m' \lrcorner_1 = F'_1(\mathcal{A}(s_1([a_p]\{i := H\})))[S'_1]$ ne se distingue de $L'[S_1]$ que par les arènes $G'_{j_1}[S'_1], \ldots, G'_{j_l}[S'_1]$. On a donc $s_2 m'([a_p]\{i := H\}) \in \sigma$, avec $\mathcal{A}([a_p]\{i := H\}) = \mathcal{A}([a_p])$ et $\llcorner [a_p]\{i := H\} \lrcorner_1 = F_1(\mathcal{A}(s_2[a_p]))[S'_2] = L[S'_2]$ où S'_2 est une série de substitutions. Mais notre supposition implique que remplacer $G'_{j_1}[S_1], \ldots, G'_{j_l}[S_1]$ par $G'_{j_1}[S'_1], \ldots, G'_{j_l}[S'_1]$ n'affecte pas $G_i[S_2]$, donc $H = G_{i-N}[S'_2] = G_{i-N}[S_2] = \top \to \bot$, ce qui est absurde.

Finalement on obtient le résultat suivant :

$$\exists 1 \leq j \leq n', \exists c \in \mathcal{O}_{G'_j}, \exists c' \in \mathcal{O}_{G_{i-N}}, \sharp(c) = \rho_i(I') \wedge \sharp(c') = \rho_{N'+j}(I)$$

On a alors, si $k = i - N$: $\top \to \bot = G_k[S_2] = (G_k[G'_j[S_1]/X_{\rho_{N'+j}(I)}])[S_3]$ où S_3 est une série de substitutions (toutes celles de S_2 sauf $G'_j[S_1]/X_{\rho_{N'+j}(I)}$). Et donc $\top \to \bot = (G_k[(G'_j[\top \to \bot/X_{\rho_i(I')}])[S_4]/X_{\rho_{N'+j}(I)}])[S_3]$ où S_4 est une série de substitutions (toutes celles de S_1 sauf $\top \to \bot/X_{\rho_i(I')}$). On en déduit que nécessairement G_k et G'_j ne contiennent chacune qu'une seule occurrence, respectivement x et x' (car sinon on aurait plusieurs occurrences dans $\top \to \bot$), et que $\mathcal{L}_{G_k}(x) = \mathcal{L}_{G'_j}(x') = \dagger$ (car sinon $\mathcal{L}_{\top\to\bot}(0) \neq \dagger$). On a donc $x = y[\rho_{N'+j}(I)]$ et $x' = y'[\rho_i(I')]$, mais cela implique $0 = y[y'[0]]$ d'où $x = \rho_{N'+j}(I)$ (donc $G_k = X_{\rho_{N'+j}(I)}$) et $x' = \rho_i(I')$ (donc $G'_j = X_{\rho_i(I')}$).

Cela prouve en particulier que $n \leq n'$: à l'indice $N+1 \leq i \leq N+n$ on associe l'indice $\phi(i) = j$ correspondant, et $\phi : [1,n] \to [1,n']$ est injective car $G'_{\phi(i)} = X_{\rho_i(I')}$.

On peut montrer que $n' \leq n$ de façon similaire, en inversant les rôles de σ et τ : étant donné un indice $N'+1 \leq i \leq N'+n'$, on considère la $i$ème arène de m, H_0, et à l'aide d'une arène H_1 telle que : $\mathcal{O}_{H_0} \subsetneq \mathcal{O}_{H_1}$ et $\mathcal{L}_{H_1}$ coïncide avec $\mathcal{L}_{H_0}$ sur $\mathcal{O}_{H_0}$, on montre que, si $k = i - N'$:

$$\exists 1 \leq j \leq n, \exists c \in \mathcal{O}_{G_j}, \exists c' \in \mathcal{O}_{G'_k}, \sharp(c) = \rho_i(I) \wedge \sharp(c') = \rho_{N+j}(I')$$

On a alors : $H_0 = (G'_k[(G_j[H_0/X_{\rho_i(I)}])[S_4]/X_{\rho_{N+j}(I')}])[S_3]$. Comme précédemment, cela implique que $G'_k = X_{\rho_i(I')}$ et $G_j = X_{\rho_{N+j}(I)}$.

Finalement, on a bien que $n' = n$, ϕ est une bijection et $\llcorner m \lrcorner_1 = \top \to \bot \cdot \top \to \bot \ldots \top \to \bot$ donc $m = [g(a_p)]$. Par ailleurs comme on peut associer les arènes $G_1, \ldots, G_n$ aux hyperarêtes $b_1, \ldots, b_n$ et les arènes $G'_1, \ldots, G'_n$ aux hyperarêtes $b'_1, \ldots, b'_n$, on obtient une bijection $\psi : \mathit{quant}^+_A(a_p) \to \mathit{quant}^+_B(g(a_p))$.

Le cas $p = p'+1$ avec p' impair peut être traité exactement de la même façon, mais en échangeant les rôles de σ et τ. □

5.6.4 Conservation de la structure d'hyperforêt

Lemme 11 *Si $\mathcal{D}_A(a_p) = X_k$ alors $\mathcal{D}_B(g(a_p)) = X_k$.*

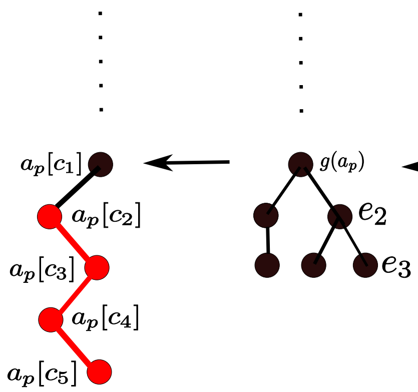
Démonstration : $[a_p]$ et $[g(a_p)]$ sont deux coups successifs dans une partie de $\mathcal{P}_{A\to B}$, donc $\sharp([a_p]) = \sharp([g(a_p)])$ d'où : $\mathcal{D}_A(a_p) = X_k$ ssi $\mathcal{D}_B(g(a_p)) = X_k$. □

On construit une fonction $\Psi : \mathcal{R}^+_A \to \mathcal{R}^+_B$ en étendant la fonction $\psi : \mathit{quant}^+_A(a_p) \to \mathit{quant}^+_B(g(a_p))$ définie dans la section précédente à tous les nœuds a_p. On a donc : $g(\mathcal{T}(b)) = \mathcal{T}(\Psi(b))$ pour tout $b \in \mathcal{R}_A$. Il reste à prouver :

Lemme 12 *Si $a_p \in \mathcal{S}(b_j)$ alors $g(a_p) \in \mathcal{S}(\Psi(b_j))$.*

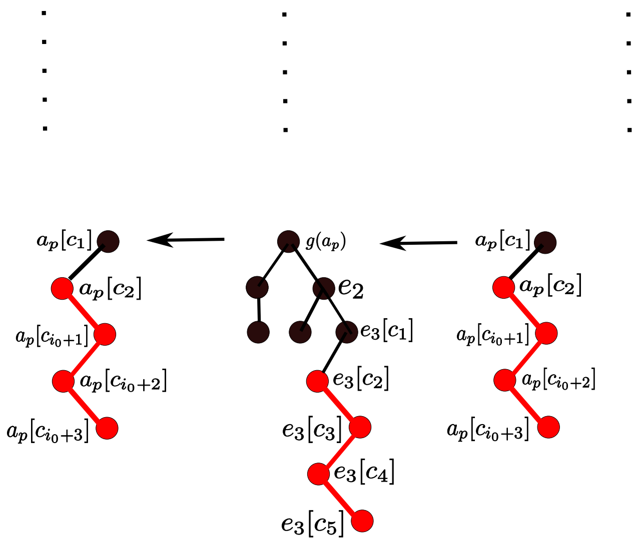
L'idée de la preuve est la suivante : on suppose que cette propriété n'est pas vraie, et on construit une arène H composée de N occurrences $c_1, \ldots, c_N$ avec $\vdash c_1$ et $c_i \vdash c_{i+1}$, pour un N suffisamment grand. On considère alors la partie dans laquelle on instancie b_j par H plutôt que par $\top \to \bot$.

La situation se présente sous la forme suivante :



On doit donc trouver, dans $\mathcal{F}_B$, un nœud e_i correspondant à chaque c_i, avec : $e_1 = g(a_p)$ et $e_i \vdash e_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq N-1$. Comme on a choisi N suffisamment grand et que $\mathcal{F}_B$ est fini, c'est impossible.

Il existe cependant une manière de s'en sortir : c'est le cas où un des nœuds e_i appartient lui-même à $\mathcal{S}(b_j)$. Mais dans ce cas la situation devient :



Il faut alors trouver un nœud c_{i+i_0} correspondant à chaque c_i : c'est à nouveau impossible !

Passons à la preuve formelle :

Démonstration : On va prouver ce lemme par l'absurde. On suppose donc $a_p \in \mathcal{S}(b_j)$, et $g(a_p) \notin \mathcal{S}(\Psi(b_j))$. Prenons par exemple le cas où p est pair et considérons les parties

$$s_1 = [a_1][g(a_1)][g(a_2)][a_2]...[g(a_p)][a_p] \in \tau$$
$$s_2 = [g(a_1)][a_1][a_2][g(a_2)]...[a_p][g(a_p)] \in \sigma$$

Soit N un entier naturel tel que $N \geq \mathit{Card}(\mathcal{O}_B) + 1$, et H l'arène définie par : $H = H_N$ avec $H_0 = \perp$ et $H_{n+1} = H_n \to \perp$.

Supposons enfin que b_j soit instancié dans $[a_p]$ par le J_1-ième symbole $\star^H$, et que le niveau de cette occurrence de H soit le coup $[a_k]$ (avec nécessairement $k \leq i$). Par construction de Ψ, $\Psi(b_j)$ est nécessairement instancié dans $[g(a_p)]$ par H, au niveau du coup $[g(a_k)]$. On suppose que $\Psi(b_j)$ est instancié dans $[g(a_p)]$ par le J_2-ième symbole $\star^H$. Alors on note T la partie obtenue à partir de s_1 de la manière suivante :

- chaque coup $[a_l]$ avec $l \geq k$ est remplacé par $[a_l]' = [a_l]\{J_1 := H_0\}$
- chaque coup $[g(a_l)]$ avec $l \geq k$ est remplacé par $[g(a_l)]' = [g(a_l)]\{J_1 := H_0\}$.

On a $\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(s_1)$, donc les valeurs prises par F_1 sur cette partie sont les mêmes que précédemment, et donc on a $T \in \tau$.

Notons $c_1, \dots, c_N$ les occurrences de H_0, avec $\vdash c_1$ et $c_i \vdash c_{i+1}$ si $1 \leq i < N$. On a $[a_p]' = M[c_1]$ avec $\mathcal{A}(M) = a_p$. Comme $TM[c_2] \in \mathcal{P}_{B \to A}$, il existe un coup m tel que $TM[c_2]m \in \tau$, avec $[a_p]' \vdash m$ par propriété des parties zig-zag. On peut prouver, comme précédemment, qu'il existe une bijection entre les ensembles d'arènes instanciées aux niveaux de $M[c_2]$ et de m. Comme il n'y a aucune arène instanciée au niveau de $M[c_2]$, on a : $m = [d]'$ avec $d \in \mathcal{O}_B$, $a_p \vdash d$ et $\mathit{quant}_B^+(d) = \emptyset$.

Soit $S = \check{T}$, on a $S\ [d]'M[c_2] \in \sigma$, $S\ [d]'M[c_2]M[c_3] \in \mathcal{P}_{A \to B}$ donc

$$S\ [d]'M[c_2]M[c_3]m' \in \sigma$$

pour un certain m'. On a alors deux cas :

- soit $m' = M'[c_2]$, avec $[d]' = M'[c_1]$: dans ce cas on avait nécessairement $d \in \mathcal{S}(\Psi(b_j))$. Mais alors on construit une suite de parties définies par :

$$\begin{gathered} T\ M[c_2]M'[c_1]M'[c_2]M[c_3] \in \tau \\ S\ M'[c_1]M[c_2]M[c_3]M'[c_2]M'[c_3]M[c_4] \in \sigma \\ T\ M[c_2]M'[c_1]M'[c_2]M[c_3]M[c_4]M'[c_3]M'[c_4]M[c_5] \in \tau \\ \dots \\ T\ M[c_2]M'[c_1] \dots M'[c_{2k}]M[c_{2k+1}] \in \tau \\ S\ M'[c_1]M[c_2] \dots M'[c_{2k+1}]M[c_{2k+2}] \in \sigma \\ \dots \end{gathered}$$

  Finalement, on en vient à devoir trouver un coup justifié par $M[c_N]$, ce qui est impossible.
- soit $m' = [e]'$ avec $e \in \mathcal{O}_B$, $d \vdash e$ et $\mathit{quant}_B^+(e) = \emptyset$. On peut alors construire une suite de parties de la façon suivante :
  - $S\ [d]'M[c_2]M[c_3][e]' \in \sigma$
  - $T\ M[c_2][d]'[e]'M[c_3]M[c_4]m'_4 \in \tau$ où $m'_4 = [e_4]'$ avec les conditions : $e_4 \in \mathcal{O}_B$, $e \vdash e_4$ et $\mathit{quant}_B^+(e_4) = \emptyset$: le cas $m'_4 = M'[c_2]$ est envisageable, mais on peut montrer qu'il mène à une contradiction, par le même raisonnement que ci-dessus
  - $\dots$
  - $T\ [d]'M[c_2] \dots M[c_{2k+1}][e_{2k+1}]' \in \sigma$ avec les conditions : $e_{2k+1} \in \mathcal{O}_B$, $e_{2k} \vdash e_{2k+1}$ et $\mathit{quant}_B^+(e_{2k+1}) = \emptyset$

- $S\ M[c_2][d]' \dots M[c_{2k+2}][e_{2k+2}]' \in \tau$ avec les conditions : $e_{2k+2} \in \mathcal{O}_B$, $e_{2k+1} \vdash e_{2k+2}$ et $quant^+_B(e_{2k+2}) = \emptyset$
- ...

Si on note $a_p = e_1$, $d = e_2$ et $e = e_3$, on obtient une suite d'occurrences de $\mathcal{O}_B$, de longueur N et telle que $e_i \vdash e_{i+1}$ pour $1 \leq i < N$: c'est impossible par définition de N.

□

Finalement, on a obtenu deux bijections $g : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ et $\Psi : \mathcal{R}^+_A \to \mathcal{R}^+_B$ telles que :
- $a \vdash a'$ ssi $g(a) \vdash g(a')$
- $\mathcal{D}_B \circ g = \mathcal{D}_A$
- $\mathcal{T} \circ \Psi = g \circ \mathcal{T}$
- $\mathcal{S} \circ \Psi = g \circ \mathcal{S}$

d'où $g(\mathcal{R}_A) = \mathcal{R}_B$, ce qui achève la preuve du théorème 4.

5.6.5 Caractérisation des isomorphismes de types

On définit le système équationnel suivant :

$$\begin{array}{rcll}
A \times \top & \simeq_\varepsilon & A & \\
\forall X.\top & \simeq_\varepsilon & \top & \\
\top \to A & \simeq_\varepsilon & A & \\
A \to \top & \simeq_\varepsilon & \top & \\
A \times B & \simeq_\varepsilon & B \times A & \\
A \times (B \times C) & \simeq_\varepsilon & (A \times B) \times C & \\
A \to (B \to C) & \simeq_\varepsilon & (A \times B) \to C & \\
A \to (B \times C) & \simeq_\varepsilon & (A \to B) \times (A \to C) & \\
\forall X.\forall Y.A & \simeq_\varepsilon & \forall Y.\forall X.A & \\
\forall X.(A \times B) & \simeq_\varepsilon & \forall X.A \times \forall X.B & \\
A \to \forall X.B & \simeq_\varepsilon & \forall X.(A \to B) & \text{si } X \notin FTV(A)
\end{array}$$

Le but de cette section est de montrer, en utilisant le théorème 4, que ce système caractérise exactement les isomorphismes de types du système F à la Church. On aura ainsi retrouvé les résultats de Roberto Di Cosmo dans [DC95].

Sur la grammaire des types du second ordre, on considère :
- des produits d'arité n : $\prod_{i=1}^{n} M_i = ((M_1 \times M_2) \times \dots) \times M_n$
- des quantifications d'arité n : $\overrightarrow{\forall X}_M = \forall X_{i_1} \dots \forall X_{i_n}$ si $M = \{i_1, \dots, i_n\}$.

Définition 46 (forme canonique) *Une formule A du second ordre est appelée* ***forme canonique non triviale*** *si elle s'écrit :*

$$A = \prod_{i=1}^{n} \overrightarrow{\forall X}_{M_i}.N_i$$

avec $n > 0$*, où chaque* N_i *est soit de la forme* $\alpha_i \in \mathcal{X} \cup \{\bot\}$*, soit de la forme* $A_i \to \alpha_i$ *avec* A_i *forme canonique non triviale et* $\alpha_i \in \mathcal{X} \cup \{\bot\}$*.*

*Une **forme canonique** est soit la formule* $\top$*, soit une forme canonique non triviale.*

Lemme 13 *Soit* A *une formule du second ordre. Il existe une forme canonique* A' *telle que* $A \simeq_\varepsilon A'$*.*

Démonstration : Par associativité de $\times$ et $\forall$ dans $\simeq_\varepsilon$, on peut se restreindre aux produits et quantifications d'arité n.

Modulo α-renommage des variables de type, les formes canoniques sont les formes normales du système de réécriture suivant :

$$\begin{gathered}
A \times (B \times C) \Rightarrow (A \times B) \times C \\
A \to (B \times C) \Rightarrow (A \to B) \times (A \to C) \\
A \to (B \to C) \Rightarrow (A \times B) \to C \\
\forall X.(A \times B) \Rightarrow (\forall X.A) \times (\forall X.B) \\
A \to \forall X.B \Rightarrow \forall X.(A \to B) \\
A \times \top \Rightarrow A \\
\top \times A \Rightarrow A \\
A \to \top \Rightarrow \top \\
\forall X.\top \Rightarrow \top \\
\top \to A \Rightarrow A
\end{gathered}$$

Ce système de réécriture est cohérent avec $\simeq_\varepsilon$, c'est-à-dire que si $A \Rightarrow A'$ alors $A \simeq_\varepsilon A'$. Pour montrer que ce système termine, on définit une fonction ψ qui associe à chaque type du second ordre A un entier naturel $\psi(A) \geq 2$:

$$\begin{gathered}
\psi(A \times B) = \psi(A) + 2\psi(B) + 1 \\
\psi(\forall X.A) = 2\psi(A) \\
\psi(A \to B) = \psi(A)\psi(B) + 1 \\
\psi(\top) = \psi(\bot) = \psi(Y) = 4
\end{gathered}$$

où Y est une variable de type.

Pour chaque règle de réécriture $A \Rightarrow A'$, on a bien $\psi(A) > \psi(A')$. $\square$

Proposition 14 *Si* A *et* B *sont deux formules du second ordre telles que* H_A *et* H_B *sont isomorphes, alors* $A \simeq_\varepsilon B$*.*

Démonstration : On note $g : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ et $\Psi : \mathcal{R}_A \to \mathcal{R}_B$ les deux bijections associé à l'isomorphisme entre H_A et H_B. On suppose que A et B sont déjà sous forme canonique, on va montrer que ces deux formes canoniques sont égales modulo $\simeq_\varepsilon$, par induction sur la structure de H_A :

- Si H_A est vide, alors H_B est vide et $A \simeq_\varepsilon B$.

- Si H_A est un arbre tel qu'aucune hyperarête n'ait la racine pour cible, alors il en est de même pour H_B. Dans ce cas, A est de la forme α ou $A' \to \alpha$ avec $\alpha \in \mathcal{X} \cup \{\bot\}$ et $H_{A'}$ non vide : en effet, si $A = A_1 \times A_2$ alors $\mathcal{O}_A$ contient au moins deux occurrences initiales, donc H_A n'est pas un arbre ; et si $A = \forall X_M.A' \to \alpha_i$ alors toutes les occurrences de $\mathcal{O}_A$ sont de la forme $\star a$, donc au moins une hyperarête de H_A pointe sur la racine.
  Donc nécessairement $B = \beta$ (dans le cas où $A = \alpha$) ou $B = B' \to \beta$ avec $H_{B'}$ non vide (dans le cas où $A = A' \to \alpha$), et le fait que g préserve l'ordre et les décorations nous assure que $\beta = \alpha$. Par ailleurs, dans le cas où $A = A' \to \alpha$, on peut construire à partir de g une bijection entre $H_{A'}$ et $H_{B'}$ qui respecte le structure d'hyperforêt. D'où par hypothèse d'induction $A' \simeq_\varepsilon B'$, donc $A \simeq_\varepsilon B$.
- Si H_A est un arbre, de racine r, avec $quant^+(r) = \{b_1, \ldots, b_n\}$, alors H_B est aussi un arbre, de racine r', avec $quant^+(r') = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$. Dans ce cas, on a $A = \forall X_1 \ldots \forall X_n.A'$ avec $A' = \alpha$ ou $A' = A'' \to \alpha$ pour $\alpha \in \mathcal{X} \cup \{\bot\}$ et $H_{A''}$ non vide : en effet, si $A = A_1 \times A_2$ alors H_A ne peut être un arbre, et par ailleurs si $A = \forall X_1 \ldots \forall X_k.\alpha$ ou $A = \forall X_1 \ldots \forall X_k.A' \to \alpha$ avec $\alpha \in \mathcal{X} \cup \{\bot\}$, alors l'unique occurrence initiale de $\mathcal{O}_A$ est nécessairement de la forme $\star \cdots \star i$ avec k symboles $\star$ et $i \geq 0$, donc on a k hyperarêtes de cible r, donc $k = n$; au passage cela nous permet de constater qu'on peut associer à chaque X_i une hyperarête b_i.
  On a aussi $B = \forall Y_1 \ldots \forall Y_n.B'$ avec $B' = \beta$ ou $B' = B'' \to \beta$ pour $\beta \in \mathcal{X} \cup \{\bot\}$ et $H_{B''}$ non vide (on choisit les X_i et les Y_i frais par rapport aux variables libres de A et celles de B). Par α-renommage, on peut choisir les variables Y_i telles que : si X_k est la variable associée à l'hyperarête b_i, alors la variables associée à $\Psi(b_i)$ est X_k.
  $H_{A'}$ (resp. $H_{B'}$) est obtenu à partir de H_A (resp. H_B) de la manière suivante : on supprime les hyperarêtes $b_1, \ldots, b_n$ (resp. $b'_1, \ldots, b'_n$) et la racine r (resp. r'), on renomme les autres nœuds, et enfin pour chaque nœud $c \in \mathcal{S}(b_i)$ (resp. $c \in \mathcal{S}(\Psi(b_i))$) on pose $\mathcal{D}_{A'}(c) = X_k$ (resp. $\mathcal{D}_{B'}(c) = X_k$) où X_k est la variable associée à l'hyperarête b_i. En utilisant l'égalité $\mathcal{S} \circ \Psi = g \circ \mathcal{S}$, on voit que $H_{A'}$ et $H_{B'}$ sont isomorphes. D'où par hypothèse d'induction $A' \simeq_\varepsilon B'$, donc $A \simeq_\varepsilon B$ par commutativité des quantificateurs.
- Si H_A contient $k \geq 2$ arbres, alors $A = ((A_1 \times A_2) \times \cdots \times A_{k-1}) \times A_k$ avec H_{A_i} arbre pour $1 \leq i \leq k$: en effet, si $A = ((A_1 \times A_2) \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$ avec H_{A_i} arbre alors H_A contient n racines, d'où $n = k$.
  On a donc aussi $B = ((B_1 \times B_2) \times \cdots \times B_{k-1}) \times B_k$. L'isomorphisme entre H_A et H_B nous assure qu'on peut trouver une permutation $\phi : [1, k] \to [1, k]$ telle que, pour tout $1 \leq i \leq k$, $H_{A_{\phi(i)}}$ et H_{B_i} soient isomorphes. Par hypothèse d'induction, cela implique $A_{\phi(i)} \simeq_\varepsilon B_i$, donc par commutativité du produit on a $A \simeq_\varepsilon B$.

□

Théorème 5 *Deux formules A et B sont isomorphes dans le système F à la Curry si et seulement si $A \simeq_\varepsilon B$.*

Démonstration : On montre facilement (cf. [DC95]) que si $A \simeq_\varepsilon B$ alors A et B sont isomorphes : il suffit de construire un terme qui réalise chaque isomorphisme.

Pour la réciproque, considérons deux termes $u : A \to B$ et $v : B \to A$ tels que $u \circ v = id_B$ et $v \circ u = id_A$. Leur interprétation dans le modèle des jeux du second ordre nous donne deux stratégies uniformes σ_u et σ_v telles que $\sigma_v ; \sigma_u = id_B$ et $\sigma_u ; \sigma_v = id_A$. On a donc un isomorphisme de jeux entre (les arènes) A et B, d'où $H_A \simeq H_B$. Donc $A \simeq_\varepsilon B$. $\square$

Chapitre 6

Système F à la Curry

Ce chapitre est consacré à la caractérisation des isomorphismes de types pour le système F à la Curry. On rappelle que le système considéré ne contient pas le type $\top$; les règles de typage et les égalités pour ce système peuvent être trouvées à la section 2.2.

Contrairement à ce qui se passe au chapitre précédent, l'interprétation que l'on va construire du système F à la Curry n'aura pas le statut de modèle. En clair, toutes les égalités de la syntaxe ne se traduiront pas par des égalités au niveau de l'interprétation : les jeux (ou, du moins, nos jeux) ne semblent pas suffisamment souples pour cela. De façon intéressante, on pourra en fait se contenter de modéliser la *réduction* : en orientant correctement les égalités du langage, on observera que toute réduction dans la syntaxe se traduit par une inclusion dans l'interprétation.

Cette modélisation partielle nous suffira pour attaquer la question des isomorphismes de types dans ce système ! Il va de soi que tout isomorphisme de types dans le système F à la Church est toujours un isomorphisme à la Curry ; mais l'inverse n'est pas vrai : par exemple, si $X \notin A$, les types A et $\forall X.A$ sont isomorphes dans le système à la Curry, mais pas à la Church.

Le principal apport de ce chapitre (et de [dL07a]) est de montrer que, pour capturer tous les isomorphismes à la Curry, il faut enrichir le système équationnel $\simeq_\varepsilon$ d'une nouvelle équation :

$$\forall X.A \simeq_\varepsilon A[\forall Y.Y/X] \quad \text{si } X \notin Neg_A \tag{6.1}$$

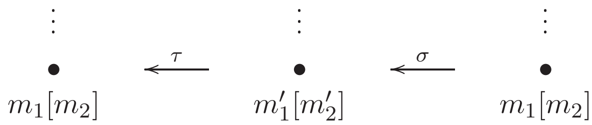
où Neg_A est l'ensemble des variables apparaissant négativement dans A. On tient là un exemple de logique dans laquelle (contrairement à ce qui se passe pour le système F à la Church) les isomorphismes de types ne sont pas uniquement ceux auxquels on s'attendait dès le départ, mais doivent être enrichis de façon non triviale.

De façon intéressante, la sémantique des jeux a non seulement été utilisée pour démontrer le résultat ci-dessus, mais aussi pour intuiter l'équation 6.1 ; c'est ce qu'on va illustrer dans la première section, informelle, de ce chapitre. On présentera ensuite une interprétation du λ-calcul non typé, inspirée par le travail de Juliusz Chroboczek [Chr03], et on montrera qu'on obtient bien un modèle de la réduction. Puis on décrira la façon dont on passe, dans le modèle, d'un monde non typé qui interprète les termes, à un monde typé qui interprète les séquents du système F à la Curry. La dernière section sera entièrement dédiée à la preuve de notre résultat sur les isomorphismes à la Curry.

6.1 Approche intuitive des isomorphismes à la Curry

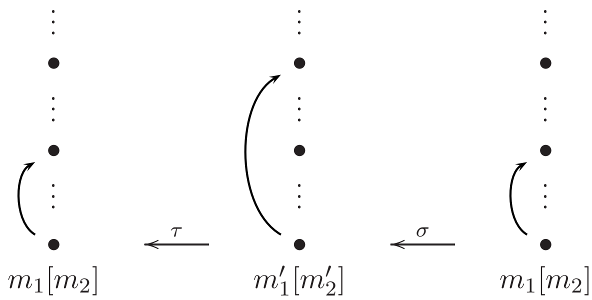
Même sans avoir de modèle proprement défini du système F à la Curry, on peut intuiter ce à quoi doivent ressembler les stratégies, et en particulier les stratégies réalisant un isomorphisme.

En admettant que les stratégies $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to A$ qui réalisent l'isomorphisme sont nécessairement zig-zag, considérons la situation suivante :



Le fait que σ et τ composent pour donner l'identité nous impose que les coups $m_1[m_2]$ et $m'_1[m'_2]$ sont égaux, mais modulo le choix des arènes car on est dans un système où les types (donc les arènes) ne sont pas explicites dans les termes (donc les stratégies).

La question cruciale est alors la suivante : est-il possible que les arènes dans lesquelles m_2 et m'_2 sont joués soient instanciées à des niveaux différents ? Cela reviendrait à la situation ci-dessous :



Plaçons-nous du point-de-vue de τ : on voit que c'est **P** qui doit jouer une arène en premier, et il ne peut pas deviner l'arène que jouera **O**. Impossible donc pour lui d'assurer que m'_2 pourra ressembler à m_2... à moins de repousser le moment du choix, en instanciant par l'arène $\forall Y.Y$! Cela correspond à l'égalité $\forall X.A \simeq_\varepsilon A[\forall Y.Y/X]$.

Mais dans ce cas il faut que le joueur qui jouera m'_2 soit aussi **P**, sinon **O** va pouvoir choisir n'importe quelle arène pour instancier $\forall Y.Y$. Cette manœuvre est donc possible uniquement dans le cas où n'_1 et m'_1 ont la même polarité : cela correspond précisément à la condition $X \notin Neg_A$.

On tient là une manière de réaliser un isomorphisme à la Curry qui ne correspond pas à un isomorphisme à la Church. Reste à vérifier qu'il n'existe pas d'autre manière subtile de construire un isomorphisme de cette espèce.

Pour ce faire, il suffit de trouver des invariants géométriques qui correspondent à l'équation 6.1, et de démontrer que ces invariants sont bien conservés par tout isomorphisme. Là encore, c'est la structure d'hyperforêt qui va être au centre de la caractérisation des invariants. En effet, la relation $A \simeq_\varepsilon B$, où $\simeq_\varepsilon$ est le système équationnel à la Church auquel on a jouté la nouvelle équation 6.1, se traduit au niveau des hyperforêts H_A et H_B de la façon suivante :

il existe une bijection $f : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ telle que :

(i) $a \leq a'$ ssi $f(a) \leq f(a')$

(ii) $\mathcal{S}^B = f(\mathcal{S}^A)$

(iii) pour tout $(t, S) \in \mathcal{R}_A$ (resp. $(t, S) \in \mathcal{R}_B$), s'il existe $s \in S$ telle que $\lambda(s) \neq \lambda(t)$, alors $(f(t), f(S)) \in \mathcal{R}_B$ (resp. $(f^{-1}(t), f^{-1}(S)) \in \mathcal{R}_A$)

(iv) $\mathcal{D}_B \circ f = \mathcal{D}_A$.

On constate que les conditions (ii) et (iii) sont moins contraignantes que la condition de préservation des hyperarêtes, que l'on impose dans le cas d'un isomorphisme d'hyperforêts : $f(\mathcal{R}_A) = \mathcal{R}_B$. En effet, dans le cas du système F à la Church, l'invariant géométrique était l'hyperforêt elle-même. Ici, il faut nécessairement laisser plus de liberté, puisqu'il y a plus d'isomorphismes.

La preuve de l'invariance de cette relation par isomorphisme, présentée à la section 6.6, concentrera l'essentiel du travail technique de ce chapitre.

6.2 Présentation générale

La modélisation que l'on va proposer du système F à la Curry, et l'étude des isomorphismes dans ce contexte, reposeront sur les ingrédients suivants :

- une interprétation des termes du λ-calcul non typé : c'est à ce niveau qu'on perdra la notion de modèle, car les égalités imposées par la syntaxe ne seront que partiellement conservées par l'interprétation
- une notion de typage des stratégies ainsi obtenues, qui fera usage du modèle du système F à la Church défini au chapitre précédent, et en particulier des stratégies exactes
- la notion d'hyperforêt, déjà définie au chapitre précédent et dans laquelle une fois de plus on ira chercher les invariants caractéristiques des isomorphismes.

On a résumé dans la figure 6.1 les principales constructions utilisées dans ce chapitre et leurs interactions. Ce diagramme est conçu comme un index permettant de localiser où sont définies chacune de ces opérations.

6.3 Interprétation du λ-calcul pur

La construction de notre interprétation du système F à la Curry commence par la la définition d'une interprétation du λ-calcul non typé avec produits, c'est-à-dire pour le langage des termes du système F à la Curry.

Arènes (pp. 55-58)

Interprétation des formules
Grammaire $a ::= \uparrow a \mid \downarrow a \mid ra \mid la \mid \star a \mid j$
$\Rightarrow$ occurrences $\mathbb{A}$
$\mathcal{O}_A$: ensemble d'occurrences
$\mathcal{L}_A$: fonction de connexion
$paux_A$: polarité auxiliaire
Arène exacte $\rightsquigarrow$ complétude

or

$A \mapsto H_A$

Hyperforêts (pp. 75-79)

Représentation arborescente des formules
$H_A = (\mathcal{F}_A, \mathcal{R}_A, \mathcal{D}_A)$
ref_A : référence
fr_A : amis

$\mathcal{E}$

$\mathcal{A}$

$A \mapsto \mathcal{M}_A$

Jeux typés (pp. 58-75)

Interprétation des termes à la Church
Grammaire $m ::= \uparrow m \mid \downarrow m \mid rm \mid lm \mid \star^B m \mid j$
$\Rightarrow$ coups typés $\mathbb{M}$
Stratégie typée $\tilde{\sigma} : A$
Stratégie symbolique $\bar{\sigma} : \mathbf{O}$ joue des arènes X_i
Uniformité : copycat typé
Niveau de B : coup où $\star^B$ apparaît pour la première fois
Stratégie exacte $\rightsquigarrow$ complétude

Jeux non typés (pp. 95-101)

Interprétation des λ-termes purs
Grammaire $x ::= \uparrow x \mid \downarrow x \mid rx \mid lx \mid j$
$\Rightarrow$ coups non typés $\mathbb{X}$
Stratégie non typée σ
Hyperuniformité : copycat non typé

$erase = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}$

réalisation

Jeux à la Curry (pp. 101-104)

$\sigma :: A$ si

- σ hyperuniforme
- $\exists\, \tilde{\sigma} :: A$ réalisation exacte de σ

Fig. 6.1 – Schéma général de la modélisation

Cette interprétation provient du travail de Juliusz Chroboczek dans sa thèse [Chr03]. Notre définition est formellement légèrement différente de celle de Chroboczek, mais en substance les idées sont les mêmes. L'idée intuitive consiste à considérer que, même si les coups ne sont pas joués dans une arène (car les termes de la syntaxe ne sont eux-mêmes pas typés), on peut supposer qu'il existe une structure d'arène implicite, qui transparaîtra dans l'expression des coups et permettra d'exprimer la λ-abstraction, le produit, etc.

Cette interprétation ne sera cependant pas un modèle du λ-calcul non typé : en effet, la règle d'égalité (η) n'étant pas vérifiée dans le modèle de Chroboczek, elle n'est pas vraie ici non plus. Mais elle n'est cependant pas complètement invalidée par le modèle : en fait, en orientant cette égalité comme une règle de réécriture, on constate que celle-ci se traduit dans notre interprétation par une inclusion.

On va donc commencer cette section par la définition d'un système de réécriture correspondant aux égalités du système. On montrera que ce système est confluent si on se restreint aux termes bien typés du système F à la Curry : ce résultat s'avérera fondamental dans la suite de notre travail.

6.3.1 Un calcul confluent

Sur les termes du système F à la Curry, on considère le système de réécriture $\twoheadrightarrow$ défini par les règles suivantes :

$$\begin{array}{rcll} (\lambda x.t)u & \twoheadrightarrow_\beta & t[u/x] & \\ \lambda x.tx & \twoheadrightarrow_\eta & t & \text{si } x \notin t \\ \langle \pi_1(t), \pi_2(t) \rangle & \twoheadrightarrow_\times & t & \\ \pi_1(\langle t, u \rangle) & \twoheadrightarrow_{\pi_1} & t & \\ \pi_2(\langle t, u \rangle) & \twoheadrightarrow_{\pi_2} & u & \end{array}$$

On sait [Klo78] que ce système n'est pas confluent sur les termes du λ-calcul avec produits. Mais on va montrer que, si on se restreint aux termes typés à la Curry, alors il s'agit bien d'un système confluent.

On commence par vérifier que si on a $\Gamma \vdash \langle t, u \rangle : A$ alors soit $A = B \times C$, soit $A = \forall X.B$. De même, si on a $\Gamma \vdash \lambda x.t : A$ alors soit $A = B \to C$, soit $A = \forall X.B$. Cela nous permet de conclure que les termes de la forme $\pi_1(\lambda x.t)$, $\pi_2(\lambda x.t)$ ou encore $(\langle t, u \rangle)v$ ne sont pas bien typés dans le système F à la Curry.

Le système $\twoheadrightarrow$ est localement confluent : les seules véritables paires critiques sont engendrées par les termes suivants :

- $(\lambda x.tx)u$ où $x \notin t$
- $\lambda x.(\lambda y.t)x$ où $x \notin t$
- $\pi_1(\langle \pi_1(t), \pi_2(t) \rangle)$
- $\pi_2(\langle \pi_1(t), \pi_2(t) \rangle)$

et elles se ferment trivialement.

On a par ailleurs :

Lemme 14 *Le système de réécriture $\twoheadrightarrow$ appliqué aux termes typés termine (fortement).*

Démonstration : Plutôt que d'utiliser une preuve à base de candidats de réductibilité, on va se ramener à des résultats connus.

On note $\twoheadrightarrow_{\beta\pi}$ l'union des règles $\twoheadrightarrow_\beta$, $\twoheadrightarrow_{\pi_1}$ et $\twoheadrightarrow_{\pi_2}$, et $\twoheadrightarrow_{\eta\times}$ l'union des règles $\twoheadrightarrow_\eta$ et $\twoheadrightarrow_\times$. On veut montrer que

$$\twoheadrightarrow^* = \twoheadrightarrow^*_{\beta\pi} \twoheadrightarrow^*_{\eta\times}$$

Il suffit pour cela de vérifier que toute règle $\twoheadrightarrow_\eta$ ou $\twoheadrightarrow_\times$ utilisée avant une règle $\twoheadrightarrow_\beta$, $\twoheadrightarrow_{\pi_1}$ ou $\twoheadrightarrow_{\pi_2}$ peut être reportée derrière une ou plusieurs règles de ce type, voire oubliée. Ainsi, $\pi_1(\langle\pi_1(t),\pi_2(t)\rangle) \twoheadrightarrow_\times \pi_1(t)$ peut être remplacée par $\pi_1(\langle\pi_1(t),\pi_2(t)\rangle) \twoheadrightarrow_{\pi_1} \pi_1(t)$, $(\lambda x.(\lambda y.t)x)u \twoheadrightarrow_\eta (\lambda y.t)u \twoheadrightarrow_\beta t[u/x]$ avec $x \notin t$ peut être remplacée par $(\lambda x.(\lambda y.t)x)u \twoheadrightarrow_\beta (\lambda y.t)u \twoheadrightarrow_\beta t[u/x]$, etc. Les seuls cas qui devraient normalement poser problème sont ceux où on a des termes de la forme $\langle\pi_1(\lambda x.t),\pi_1(\lambda x.t)\rangle u$ ou $\pi_1(\lambda x.\langle t,u\rangle x)$, mais comme on l'a vu ci-dessus de tels termes ne peuvent pas être bien typés.

Le système de réécriture $\twoheadrightarrow_{\eta\times}$ termine trivialement (la taille des termes décroît). Quant à $\twoheadrightarrow_{\beta\pi}$, sa terminaison pour le système F à la Curry est un résultat bien connu (cf. [Gir72]). □

La confluence locale et la terminaison permettent de conclure :

Corollaire 1 *Le système de réécriture $\twoheadrightarrow$ appliqué aux termes typés à la Curry est confluent.*

Ce résultat sera essentiel pour la suite de notre travail. En effet, le modèle que nous allons définir ci-après sera un modèle de la *réduction*, au sens où une réduction dans la syntaxe sera interprétée par une inclusion dans le modèle. Mais une égalité dans la syntaxe n'engendrera pas nécessairement une égalité dans le modèle. Or, lorsqu'on parle d'isomorphismes, ce qui est en jeu est bien une égalité entre deux termes $v = \lambda x.t(ux)$ et $w = \lambda x.x$. Heureusement, w est une forme normale pour le système $\twoheadrightarrow$. Par conséquent, la confluence nous permettra de dire que v se réduit en w, et donc que son interprétation est incluse dans celle de w.

6.3.2 Stratégies non typées

Pour décrire notre interprétation du *lambda*-calcul non typé, on utilise la grammaire des **coups non typés** :

$$x ::= \uparrow x \mid \ \downarrow x \mid \ rx \mid \ lx \mid \ j \qquad (j \in \mathbb{N})$$

L'ensemble des coups non typés est noté $\mathbb{X}$.

Les suites justifiées, parties et stratégies induites par cette grammaire seront elles aussi qualifiées de *non typées*.

On définit les stratégies suivantes :

- **identité** :

$$id = \{s \in \mathbb{E} \mid \ s \text{ de format flèche } \text{ et } \forall t \in \mathbb{E}, t \preceq s \Rightarrow t\upharpoonright_\uparrow = t\upharpoonright_\downarrow\}$$

- **projections** :

$$\pi_r = \{s \in \mathbb{E} \mid \ s \text{ de format } \{\uparrow, \downarrow r, \downarrow l\} \text{ et } \forall t \in \mathbb{E}, t \preceq s \Rightarrow t\upharpoonright_\uparrow = t\upharpoonright_{\downarrow r}\}$$

$$\pi_l = \{s \in \mathbb{E} \mid \ s \text{ de format } \{\uparrow, \downarrow r, \downarrow l\} \text{ et } \forall t \in \mathbb{E}, t \preceq s \Rightarrow t\upharpoonright_\uparrow = t\upharpoonright_{\downarrow l}\}$$

– **évaluation** :

$$eval = \{s \in \mathbb{E} \mid \ s \text{ de format } \{\uparrow, \downarrow l \uparrow, \downarrow l \downarrow, \downarrow r\} \text{ et } \forall t \in \mathbb{E}, t \preceq s \Rightarrow t\upharpoonright_{\uparrow} = t\upharpoonright_{\downarrow l \uparrow} \wedge t\upharpoonright_{\downarrow r} = t\upharpoonright_{\downarrow l \downarrow}\}$$

On définit aussi deux opérations de base sur les stratégies :

– **paire** :

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \{s \in \mathbb{E} \mid \ s \text{ de format } \{\uparrow r, \uparrow l, \downarrow\} \text{ et } s\upharpoonright_{\uparrow l, \downarrow} \in \sigma \text{ et } s\upharpoonright_{\uparrow r, \downarrow} \in \tau\}$$

– **abstraction** : $\Lambda(\sigma) = \{ \ s\{ \ \uparrow\uparrow(-)/\uparrow(-) \ , \ \uparrow\downarrow(-)/\downarrow r(-) \ , \ \downarrow(-)/\downarrow l(-) \ \} \mid \ s \in \sigma\}$

6.3.3 Hyperuniformité

On a d'ores et déjà assez de matière pour définir notre interprétation du λ-calcul non typé. Cependant, notre utilisation des stratégies non typées dans le modèle du système F à la Curry nous oblige à imposer de nouvelles propriétés : par exemple, considérons la formule $X_1 \to X_1$. À première vue, la stratégie innocente σ dont l'ensemble des vues est $\{\varepsilon, \uparrow 1 \cdot \downarrow 1\}$ doit avoir ce type. Mais, puisqu'on considère un modèle à la Curry, toute stratégie de type $X_1 \to X_1$ devrait aussi avoir le type $\forall X_1.X_1 \to X_1$, voire $A \to A$ pour tout A. Ce qui signifie que σ, pour être vraiment une stratégie sur $X_1 \to X_1$, devrait être capable de faire un copycat entre les parties gauche et droite de la flèche.

C'est le sens de la notion d'**hyperuniformité** définie ci-dessous. Comme son nom l'indique, on peut voir l'hyperuniformité comme une variante de l'uniformité pour les stratégies non typées.

Définition 47 (extension copycat d'une partie non typée) *Soient $s = x_1 \dots x_n$ une partie non typée de longueur paire, x_i un coup de s de polarité* **O** *et $v = y_1 \dots y_p \in \mathcal{BV}$. Supposons que $s = s_1 x_i x_{i+1} s_2$. L'**extension copycat** de s à la position i avec paramètre v est la partie non typée $s' = cc^s(i, v)$, définie par :*

– $s' = s_1 x_i[y_1] x_{i+1}[y_1] s_2$ *si $p = 1$*
– $s' = s_1 x_i[y_1] x_{i+1}[y_1] x_{i+1}[y_2] x_i[y_2] \dots x_{i+1}[y_p] x_i[y_p]$ *si p pair*
– $s' = s_1 x_i[y_1] x_{i+1}[y_1] x_{i+1}[y_2] x_i[y_2] \dots x_i[y_p] x_{i+1}[y_p]$ *si $p > 1$ et p impair.*

Définition 48 (stratégie hyperuniforme) *Une stratégie non typée σ est appelée **hyperuniforme** si elle est innocente et stable par extension copycat.*

Proposition 15 *La stratégie identité, les projections et la stratégie d'évaluation sont hyperuniformes. Si σ et τ sont hyperuniformes alors $\langle \sigma, \tau \rangle$ et $\Lambda(\sigma)$ sont hyperuniformes.*

Démonstration : Il suffit de regarder directement l'expression des stratégies en question. □

Proposition 16 *Si σ et τ sont hyperuniformes alors $\sigma; \tau$ est hyperuniforme.*

Démonstration : Considérons une partie $s = x_1 \dots x_n \in \sigma;\tau$, un coup x_i dans s de polarité **O** et une bi-vue $v = y_1 \dots y_p$. Il nous faut prouver que $s' = cc^s(i, v)$ appartient à $\sigma;\tau$.

Il existe une suite justifiée u telle que $u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} = s$, $u\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma$ et $u\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tau$. Si $u = t_1 x_i b_1 \dots b_q x_{i+1} t_2$, on construit une suite justifiée U de la façon suivante :

– si $p = 1$, $U = t_1 x_i[y_1] b_1[y_1] \dots b_q[y_1] x_{i+1}[y_1] t_2$

– si p pair,

$$\begin{array}{rcl} U & = & t_1 x_i[y_1] b_1[y_1] \dots b_q[y_1] x_{i+1}[y_1] x_{i+1}[y_2] b_q[y_2] \dots b_1[y_2] x_i[y_2] \\ & & \dots\dots x_{i+1}[y_p] b_q[y_p] \dots b_1[y_p] x_i[y_p] \end{array}$$

– si p impair et $p > 1$,

$$\begin{array}{rcl} U & = & t_1 x_i[y_1] b_1[y_1] \dots b_q[y_1] x_{i+1}[y_1] x_{i+1}[y_2] b_q[y_2] \dots b_1[y_2] x_i[y_2] \\ & & \dots\dots x_i[y_p] b_1[y_p] \dots b_q[y_p] x_{i+1}[y_p] \end{array}$$

$U\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est constituée d'une ou plusieurs vues, chacune étant obtenue à partir de $u\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$ par extension copycat, d'où $U\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma$. De même, $U\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tau$. Enfin, $U\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est bien une partie donc $U \in \mathbf{Int}$, d'où finalement $s' = U\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma;\tau$. □

6.3.4 Interprétation du λ-calcul non typé avec produits

On présente ici l'interprétation du λ-calcul pur avec produits. Plutôt que d'interpréter directement les termes, on interprète les séquents de la forme $\Gamma \vdash t$, où t est un terme et Γ est simplement une liste de variables qui contient toutes les variables apparaissant librement dans t.

L'interprétation est la suivante :

$$\begin{array}{rcll} [\![\Gamma, x \vdash x]\!] & = & \pi_r & \\ [\![\Gamma, y \vdash x]\!] & = & \pi_l ; [\![\Gamma \vdash x]\!] & \text{si } x \neq y \\ [\![\Gamma \vdash \lambda x.t]\!] & = & \Lambda([\![\Gamma, x \vdash t]\!]) & \\ [\![\Gamma \vdash (tu)]\!] & = & \langle [\![\Gamma \vdash t]\!], [\![\Gamma \vdash u]\!] \rangle ; \mathit{eval} & \\ [\![\Gamma \vdash \langle t, u \rangle]\!] & = & \langle [\![\Gamma \vdash t]\!], [\![\Gamma \vdash u]\!] \rangle & \\ [\![\Gamma \vdash \pi_1(t)]\!] & = & [\![\Gamma \vdash t]\!] ; \pi_l & \\ [\![\Gamma \vdash \pi_2(t)]\!] & = & [\![\Gamma \vdash t]\!] ; \pi_r & \end{array}$$

Les propositions 15 et 16 montrent que :

Proposition 17 *Soit t un terme dont toutes les variables libres sont contenues dans Γ, alors $[\![\Gamma \vdash t]\!]$ est une stratégie hyperuniforme.*

L'interprétation décrite ci-dessus ne nous donne pas un modèle extensionnel du λ-calcul. Elle modélise cependant correctement la réduction $\twoheadrightarrow$ (et même la β-égalité) :

Proposition 18 *Soient t et u deux termes dont les variables libres sont contenues dans la liste Γ. Si $t \twoheadrightarrow u$ alors $[\![\Gamma \vdash t]\!] \subseteq [\![\Gamma \vdash u]\!]$.*

Démonstration : la relation $\sigma \subseteq \tau$ est réflexive et transitive, et c'est une congruence pour toutes les constructions utilisées pour interpréter les termes : si $\sigma \subseteq \tau$ alors

– $\Lambda(\sigma) \subseteq \Lambda(\tau)$
– $\langle \sigma, \rho \rangle \subseteq \langle \tau, \rho \rangle$ pour toute stratégie ρ
– $\sigma; \rho \subseteq \tau; \rho$ et $\rho; \sigma \subseteq \rho; \tau$ pour toute stratégie ρ.

Si $t \twoheadrightarrow_\beta u$ alors $[\![\Gamma \vdash t]\!] = [\![\Gamma \vdash u]\!]$. En effet, dans la catégorie cartésienne des jeux HO, $\mathbb{X}$ définit une arène, et c'est un objet réflexif, au sens où il existe une rétraction entre $\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ et $\mathbb{X}$: en effet, on peut identifier $\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ avec un sous-ensemble de $\mathbb{X}$, et construire en conséquence des stratégies $\sigma : (\mathbb{X} \to \mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ et $\tau : \mathbb{X} \to (\mathbb{X} \to \mathbb{X})$ telles que $\sigma; \tau = id_{\mathbb{X} \to \mathbb{X}}$.

On a donc un modèle de la β-égalité (cf [Bar84][1]), et les constructions utilisées pour définir ce modèle sont bien les mêmes que ci-dessus.

Si $x \notin t$ alors $[\![\Gamma \vdash \lambda x.tx]\!]$ est la restriction de $[\![\Gamma \vdash t]\!]$ aux parties de format $\{\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\}$.

Si $t = \langle \pi_1(u), \pi_2(u) \rangle$ alors $[\![\Gamma \vdash t]\!]$ est la restriction de $[\![\Gamma \vdash u]\!]$ aux parties de format $\{\uparrow r, \uparrow l, \downarrow\}$.

Pour finir, si $t \twoheadrightarrow_{\pi_1} u$ ou $t \twoheadrightarrow_{\pi_2} u$ alors $[\![\Gamma \vdash t]\!] = [\![\Gamma \vdash u]\!]$. □

Corollaire 2 *Considérons la stratégie*

$$\alpha = \{s \in \mathbb{E} \mid \ s \text{ de format } \{\uparrow r, \downarrow\} \text{ et } \forall t \in \mathbb{E}, t \preceq s \Rightarrow t\upharpoonright_{\uparrow r} = t\upharpoonright_{\downarrow}\}$$

Si $t = \lambda x.t_0$ et $u = \lambda x.u_0$ sont deux termes clos, bien typés dans le système F à la Curry, tels que $\lambda x.t(ux) = \lambda x.x$ alors $\alpha; [\![x \vdash u_0]\!]; \alpha; [\![x \vdash t_0]\!] \subseteq id$.

La stratégie α est un simple renommage : lorsque $\sigma = [\![x \vdash u_0]\!]$, $\alpha; \sigma$ est simplement la stratégie σ dans laquelle chaque coup de format $\downarrow r$ a été remplacé par $\downarrow$. Comme l'interprétation d'un terme est toujours de format $\{\uparrow, \downarrow r, \downarrow l\}$, la précomposition par α permet d'en faire une stratégie de format $\{\uparrow, \downarrow\}$, et donc de la composer avec une autre interprétation de terme.

Démonstration : Si on note $\sigma = [\![x \vdash u_0]\!]; \alpha; [\![x \vdash t_0]\!]$, on a $[\![x \vdash t(ux)]\!] = \sigma$.

De plus, comme $\lambda x.x$ est une forme normale pour le système de réécriture $\twoheadrightarrow$, on a $\lambda x.t(ux) \twoheadrightarrow \lambda x.x$ par confluence de $\twoheadrightarrow$ pour les termes bien typés. Donc $\Lambda(\sigma) \subseteq \Lambda([\![x \vdash x]\!])$. Comme σ et $[\![x \vdash x]\!]$ sont de format $\{\uparrow, \downarrow r, \downarrow l\}$, cela implique que $\sigma \subseteq [\![x \vdash x]\!]$. D'où $\alpha; \sigma \subseteq \alpha; [\![x \vdash x]\!] = id$. □

6.4 Arènes et coups à la Curry

Les arènes du second ordre pour notre modélisation du système F à la Curry sont quasiment identiques aux arènes telles que définies dans le chapitre 5. On va cependant modifier deux conditions :

[1] [Bar84] utilise un lemme de substitution, donc pour être sûr que le résultat reste valable dans notre contexte il faut vérifier que ce lemme passe bien aux produits, ce qui est trivial.

- l'ensemble des occurrences initiales d'une arène doit être non vide : cette condition est liée à l'absence de type $\top$ dans notre syntaxe
- plutôt que de parler de non-ambiguïté, on va directement imposer que l'arène soit exacte : cette condition n'est pas indispensable en soi, mais elle nous simplifiera le travail par la suite, en nous permettant d'utiliser la complétude (cf. section 5.4.2). De plus elle implique une condition plus stricte que la non-ambiguïté, nécessaire pour notre preuve sur les isomorphismes (cf. théorème 6).

Définition 49 (arène à la Curry) *Une **arène à la Curry** est une arène **exacte** du second ordre $A = (\mathcal{O}_A, \mathcal{L}_A)$ telle que $\mathcal{O}_A$ est **habité** : $\exists a \in \mathcal{O}_A,\ \vdash a$.*

L'ensemble des arènes à la Curry est noté $\mathcal{G}_{Cu}$.

On définit une fonction de traduction $\mathcal{E}$ de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{X}$: $\mathcal{E}(a)$ est obtenue en effaçant tous les symboles $\star$ dans a, soit :
- $\mathcal{E}(i) = i$
- $\mathcal{E}(\star a) = \mathcal{E}(a)$
- $\mathcal{E}(\alpha a) = \alpha\mathcal{E}(a)$ if $\alpha \in \{\uparrow, \downarrow, r, l\}$.

De la propriété d'exactitude on tire une autre propriété, plus utile :

Lemme 15 *Si A est une arène à la Curry alors $\mathcal{O}_A$ est **strictement non-ambigu** : $\forall a, a' \in \mathcal{O}_A$, si $\mathcal{E}(a) \sqsubseteq^p \mathcal{E}(a')$ alors $a = a'$.*

Par ailleurs, on vérifie que :

Proposition 19 *Si A et B sont deux arènes à la Curry alors $\perp$, $A \times B$, $A \to B$, $\forall X_i.A$ et $A[B/X_i]$ sont des arènes à la Curry.*

L'interprétation d'une formule sans type $\top$ est donc toujours une arène à la Curry.

On rappelle qu'une description des arènes sous forme d'hyperforêts est possible, elle sera utilisée à la section 6.6.

Les coups et parties que l'on va considérer par la suite ne doivent faire usage que de ces arènes à la Curry. Ainsi, on va dorénavant appeler **coups typés** les coups de $\mathbb{M}$ construits sur la grammaire suivante :

$$m ::= \uparrow m \mid\ \downarrow m \mid\ rm \mid\ lm \mid\ \star^B m \mid\ i \qquad (B \in \mathcal{G}_{Cu}, i \in \mathbb{N})$$

Les suites justifiées, parties et stratégies définies sur cette grammaire seront elles aussi qualifiées de **typées**. La notion d'uniformité reste la même, mais doit bien sûr tenir compte du fait qu'on n'utilise plus que des arènes à la Curry.

6.5 Typage des stratégies

On est maintenant armé pour définir notre modélisation du système F à la Curry : l'idée-clé va être de relier les stratégies non typées aux stratégies typées, via une notion de **réalisation**.

6.5.1 Réalisation

On commence par relier les coups non typés aux coups typés par une fonction d'**effacement** *erase* : $\mathbb{M} \to \mathbb{X}$ définie par :

$$erase = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}$$

La fonction *erase* peut être étendue aux coups et stratégies de façon triviale :

$$erase(m_1 \dots m_n) = erase(m_1) \dots erase(m_n)$$
$$erase(\sigma) = \{erase(s) \mid \ s \in \sigma\}$$

Définition 50 (stratégie Curry-exacte) *Soit σ la stratégie uniforme engendrée dans par la stratégie symbolique $\bar{\sigma}$. On dit que σ est* ***Curry-exacte*** *si :*
- *$\bar{\sigma}$ est totale*
- *l'ensemble des vues que contient $\bar{\sigma}$ est fini*
- *pour toute partie $s \in \bar{\sigma}$, si s contient le symbole $\star^B$ dans un de ses coups alors B est une arène à la Curry.*

On note qu'une stratégie Curry-exacte est toujours exacte, donc c'est l'interprétation d'un terme du système F à la Church.

On dispose alors de tous les ingrédients pour définir le modèle :
- les **objets** sont les arènes à la Curry
- un **morphisme** entre A et B est une stratégie non typée telle que :
  - σ est hyperuniforme
  - il existe une stratégie Curry-exacte $\tilde{\sigma} : A \to B$ telle que $erase(\tilde{\sigma}) \subseteq \sigma$.

  Dans ce cas on note $\sigma :: A \to B$. La stratégie sera appelée **réalisation** de σ.

6.5.2 Correction du typage

On va maintenant vérifier que cette notion de typage est bien cohérente avec les constructions déjà définies.

Lemme 16 *Si $\sigma :: A \to B$ et $\tau :: B \to C$ alors $\sigma; \tau :: A \to C$.*

Démonstration : Notons $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ deux réalisations de σ et τ respectivement, on obtient une réalisation de $\sigma;\tau$ sur $A \to C$ en prenant la composée $\tilde{\sigma};\tilde{\tau}$ dans la grammaire $\mathbb{M}$. En effet, si $s \in \tilde{\sigma};\tilde{\tau}$ alors il existe une suite justifiée u telle que $u\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \tilde{\sigma}$, $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tilde{\tau}$ et $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow} = s$. Donc $U = erase(u)$ est telle que $U\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma$, $U\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tau$ et $U\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est une partie, d'où $erase(s) = U\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma;\tau$.

Par ailleurs, $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ sont Curry-exactes, donc par complétude (cf. section 5.4.2) elles sont l'interprétation de deux termes clos t et u du système F à la Church. $\tilde{\sigma};\tilde{\tau}$ est alors l'interprétation de $\lambda x.t(ux)$, et en conséquence elle est exacte. Par ailleurs, si $\star^B$ apparaît dans $s \in \tilde{\sigma};\tilde{\tau}$, B est obtenue à partir de substitutions d'arènes à la Curry, donc c'est une arène à la Curry. Donc $\tilde{\sigma};\tilde{\tau}$ est Curry-exacte.

Enfin, σ et τ sont hyperuniformes donc $\sigma;\tau$ est hyperuniforme par la proposition 16.
□

Lemme 17 *Si* $\sigma :: \Gamma \to A$ *et* $X_j \notin \Gamma$ *alors* $\sigma :: \Gamma \to \forall X_j.A$

DÉMONSTRATION : Considérons une réalisation uniforme $\tilde{\sigma} : \Gamma \to A$ de σ sur $\Gamma \to A$: si $\tilde{\sigma}$ est l'extension copycat de la stratégie symbolique $\bar{\sigma}$, on définit :

$$\bar{\sigma}' = \{s\{\uparrow \star^{X_j} (-)/\uparrow(-) \mid \ s \in \bar{\sigma}\}\}$$

C'est une stratégie sur $\Gamma \to \forall X_j.A$, elle est Curry-exacte, et son extension copycat $\tilde{\sigma}'$ est une réalisation de σ par hyperuniformité (en effet, la seule différence entre $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\sigma}'$ est la possibilité de faire des extensions copycat le long de X_i). □

Lemme 18 *Si* $\sigma :: \Gamma \to \forall X_j.A$ *et* $B \in \mathcal{G}_{Cu}$ *alors* $\sigma :: \Gamma \to A[B/X_j]$.

DÉMONSTRATION : Soit $\tilde{\sigma}$ une réalisation de σ sur $\Gamma \to \forall X_j.A$, une réalisation $\tilde{\sigma}'$ sur $\Gamma \to A[B/X_j]$ est obtenue en choisissant uniquement les parties dont chaque coup initial est de la forme $\uparrow \star^B m$, avec $B \in \mathcal{G}_{Cu}$, et en remplaçant chaque coup $\uparrow \star^B m$ par $\uparrow m$.

$\tilde{\sigma}'$ est bien Curry-exacte : si $\tilde{\sigma}$ est engendrée par la stratégie symbolique $\bar{\sigma}$, alors $\tilde{\sigma}'$ est engendrée par :

$$\bar{\sigma}' = \{s\{\uparrow(-)/\uparrow \star^B (-)\} \ \mid \ s \in \bar{\sigma}[B/X_j]\}\}$$

□

Lemme 19 *On a :*
- $id :: A \to A$
- $\pi_r :: \Gamma \times A \to A$
- *si* $\sigma :: \Gamma \to A$ *et* $\tau :: \Gamma \to B$ *alors* $\langle \sigma, \tau \rangle :: \Gamma \to (A \times B)$
- $eval :: (A \to B) \times A \to B$
- *si* $\sigma :: \Gamma \times A \to B$ *alors* $\Lambda(\sigma) :: \Gamma \to (A \to B)$

DÉMONSTRATION : Prenons par exemple le cas de l'identité : une réalisation de *id* sur $A \to A$ est

$$\rho = \{s \in \mathcal{P}_{A \to A} \mid \ s \text{ de format flèche et } \forall t \in \mathbb{E}, t \preceq s \Rightarrow t\restriction_{\uparrow} = t\restriction_{\downarrow}\}$$

Elle est Curry-exacte, la stratégie symbolique associée $\bar{\rho}$ est donnée par :

$$\bar{\rho} = \{s \in \mathcal{P}_{A \to A} \mid \ s \text{ de format flèche, } s \text{ symbolique et } \forall t \in \mathbb{E}, t \preceq s \Rightarrow t\restriction_{\uparrow} = t\restriction_{\downarrow}\}$$

□

Si Γ est un contexte de typage de la forme $\Gamma = x_1 : A_1, x_2 : A_2, \ldots, x_n : A_n$, on définit la suite de variables $\overline{\Gamma} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ et l'arène $|\Gamma| = \bot \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ($|\Gamma| = \bot$ si Γ est vide), et on a :

Proposition 20 *Si* $\vec{X}; \Gamma \vdash t : A$ *alors* $[\![\overline{\Gamma} \vdash t]\!] :: |\Gamma| \to A$.

On remarque qu'un contexte de typage est toujours interprété par une arène de la forme $\bot \times A_1 \times \cdots \times A_n$. En effet, comme on a $[\![x \vdash x]\!] = \pi_r$, toute interprétation de terme qui passe à gauche de la flèche n'atteint jamais l'arène la plus à gauche - autrement dit, tout coup de format $\downarrow$ contient au moins une occurrence de r. D'où la nécessité d'imposer une arène qu'on n'atteint jamais : ici on a choisi $\bot$.

6.6 Isomorphismes de types à la Curry

Dans cette section, on va s'atteler à la démonstration d'un des résultats principaux de cette thèse : la caractérisation des isomorphismes de types à la Curry.

On va utiliser notre modélisation, et tout particulièrement la représentation des types sous forme d'hyperforêts : comme annoncé dans la section 6.1, c'est sur cette structure que vont se trouver les invariants qui rendent possible une caractérisation équationnelle.

Ces invariants sont résumés dans la notion d'**isomorphisme à la Curry** :

Définition 51 (isomorphisme à la Curry) *Soient deux hyperforêts* $H_1 = (F_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{D}_1)$ *et* $H_2 = (F_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{D}_2)$ *avec* $F_1 = (\mathcal{F}_1, \leq_1)$ *et* $F_2 = (\mathcal{F}_2, \leq_2)$*. On dit que* H_1 *et* H_2 *sont* ***Curry-isomorphes*** *s'il existe une bijection* $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ *telle que :*
- $a \leq_1 a'$ *ssi* $f(a) \leq_2 f(a')$
- $\mathcal{S}^{H_2} = f(\mathcal{S}^{H_1})$
- *pour tout* $(t, S) \in \mathcal{R}_1$ *(resp.* $(t, S) \in \mathcal{R}_2$*), s'il existe* $s \in S$ *tel que* $\lambda(s) \neq \lambda(t)$*, alors* $(f(t), f(S)) \in \mathcal{R}_2$ *(resp.* $(f^{-1}(t), f^{-1}(S)) \in \mathcal{R}_1$*)*
- $\mathcal{D}_2 \circ f = \mathcal{D}_1$.

Définition 52 (isomorphisme de jeux non typé) *Un* ***isomorphisme de jeux non typé*** *entre deux arènes à la Curry* A *et* B *est un couple* (σ, τ) *de stratégies non typées tel que :* $\sigma :: A \to B$, $\tau :: B \to A$, $\sigma; \tau \subseteq id$ *et* $\tau; \sigma \subseteq id$.

On formule maintenant le théorème-clé de cette section. Ce théorème nous donne une caractérisation géométrique des isomorphismes dans les jeux , et est à la base de la caractérisation équationnelle des isomorphismes de la syntaxe.

Théorème 6 *Soient* $A, B \in \mathcal{G}_{Cu}$*. S'il existe un isomorphisme de jeux* (σ, τ) *entre* A *et* B *alors* H_A *et* H_B *sont Curry-isomorphes.*

Les prochaines sous-sections seront entièrement dédiées à la preuve de ce théorème. Celle-ci va se dérouler en plusieurs étapes :
- on commence par construire deux parties typées s_1^p et s_2^p dont les effacements respectifs sont des parties zig-zag

$$a_1[i_1]f(a_1)[i_1]f(a_2)[i_2]a_2[i_2] \cdots \in \sigma$$
$$f(a_1)[i_1]a_1[i_1]a_2[i_2]f(a_2)[i_2] \cdots \in \tau$$

  avec $i_1, i_2, \cdots \in \mathbb{N}$
- ces deux parties nous donnent une bijection $f : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ telle que

$$a_1[y_1]f(a_1)[y_1]f(a_2)[y_2]a_2[y_2] \cdots \in \sigma$$
$$f(a_1)[z_1]a_1[z_1]a_2[z_2]f(a_2)[z_2] \cdots \in \tau$$

  pour tout choix des coups y_i et z_i, par hyperuniformité

- on construira alors coup par coup des parties s_p et u_p, appartenant aux réalisations respectives de σ et τ, telles que leur effacement soit de la forme décrite ci-dessus pour un choix approprié des y_i et des z_i
- le choix des arènes et les conditions sur l'effacement de s_p et u_p nous permettront de conclure que f vérifie les propriétés d'un Curry-isomorphisme.

La dernière partie montrera comment ce théorème nous permet de déduire la caractérisation équationnelle des isomorphismes de types à la Curry

6.6.1 Construction de la bijection

Par souci de simplicité, on va identifier tout au long de cette preuve les occurrences de $\mathcal{O}_A$ (resp. de $\mathcal{O}_B$) avec les occurrences correspondantes de $\mathcal{O}_{A\to B}$.

On a besoin d'un premier lemme :

Lemme 20 *Soient $s_1 \in \mathcal{P}_{B\to A}$ et $s_2 \in \mathcal{P}_{A\to B}$ deux parties telles que :*
- *s_1 et s_2 sont des parties zig-zag de longueur paire*
- *$erase(s_1\upharpoonright_{\uparrow}) = erase(s_2\upharpoonright_{\downarrow})$*
- *les arènes jouées par **O** dans s_1 (resp. dans s_2) au niveau d'un coup de format $\uparrow$ (resp. $\downarrow$) sont des variables de copycat.*

Alors il existe une suite justifiée u telle que : $u\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$ extension plate de s_1, $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}$ extension plate de s_2 et $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est une partie.

Démonstration : On construit u par induction sur n où $2n$ est la longueur de la partie s_1.

Si $n = 0$, $u = \epsilon$.

Si $n = p + 1$ avec p pair, on a $s_2 = S_2m_2n_2$ et $s_1 = S_1n_1m_1$. On a déjà construit par induction une partie u_0 telle que $S'_1 = u_0\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$ extension plate de S_1 et $S'_2 = u_0\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}$ extension plate de S_2. On peut écrire $n_2 = n_0[M]$ et $n_1 = n'_0[M']$ avec $c = \mathcal{A}(n_0) = \mathcal{A}(n'_0) \in \mathcal{O}_B$.

Si $paux_{A\to B}(c) = \mathbf{O}$, on a $M = i$ pour un certain i. En appliquant à s_1 les extensions qui font passer de S_1 à S'_1, on obtient une extension plate $S'_1N^0_1M^0_1$. En appliquant ensuite les extensions qui font passer de n'_0 à n_0 on obtient une nouvelle extension plate $S'_1N_1M_1$. On applique alors à s_2 les extensions plates qui font passer de S_2 à S'_2 et celles qui font passer de i à M', et on obtient une extension plate $S'_2M_2N_1$. On pose alors $u = u_0M_2N_1M_1$.

Si $paux_{A\to B}(c) = \mathbf{P}$, on a $M' = i$ pour un certain i. En appliquant à s_2 les extensions qui font passer de S_2 à S'_2, on obtient une extension plate $S'_2M_2N_2$. On applique alors à s_1 les extensions plates qui font passer de S_1 à S'_1, celles qui font passer de n'_0 à n_0 et celles qui font passer de i à M, et on obtient une extension plate $S'_1N_2M_1$. On pose alors $u = u_0M_2N_2M_1$.

Enfin, si $paux_{A\to B}(c)$ n'est pas défini, on a $M' = M = i$. On applique à s_2 les extensions plates qui font passer de S_2 à S'_2, on obtient $S'_2M_2N_2$; on applique à s_1 les extensions plates qui font passer de S_1 à S'_1 et celles qui font passer de n'_0 à n_0, on obtient $S'_1N_2M_1$. On pose alors $u = u_0M_2N_2M_1$.

Si $n = p + 1$ avec p impair, on a $s_1 = S_1 m_1 n_1$ et $s_2 = S_2 n_2 m_2$. On a déjà construit par induction une partie u_0 telle que $S'_1 = u_0\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$ extension plate de S_1 et $S'_2 = u_0\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}$ extension plate de S_2. On peut écrire $n_1 = n_0[M]$ et $n_2 = n'_0[M']$ avec $c = \mathcal{A}(n_0) = \mathcal{A}(n'_0) \in \mathcal{O}_B$.

Si $paux_{A\to B}(c) = \mathbf{O}$, on a $M' = i$ pour un certain i. En appliquant à s_1 les extensions qui font passer de S_1 à S'_1, on obtient une extension plate $S'_1 M_1 N_1$. On applique alors à s_2 les extensions plates qui font passer de S_2 à S'_2, celles qui font passer de n'_0 à n_0 et celles qui font passer de i à M, et on obtient une extension plate $S'_2 N_1 M_2$. On pose alors $u = u_0 M_1 N_1 M_2$.

Si $paux_{A\to B}(c) = \mathbf{P}$, on a $M = i$ pour un certain i. En appliquant à s_1 les extensions qui font passer de S_1 à S'_1, on obtient une extension plate $S'_1 M_1^0 N_1^0$. En appliquant ensuite les extensions qui font passer de i à M' on obtient une nouvelle extension plate $S'_1 M_1 N_1$. On applique alors à s_2 les extensions plates qui font passer de S_2 à S'_2 et celles qui font passer de n'_0 à n_0, et on obtient une extension plate $S'_2 N_1 M_2$. On pose alors $u = u_0 M_1 N_1 M_2$.

Enfin, si $paux_{A\to B}(c)$ n'est pas défini, on a $M' = M = i$. On applique à s_2 les extensions plates qui font passer de S_2 à S'_2 et celles qui font passer de n'_0 à n_0, on obtient $S'_2 N_2 M_2$; on applique à s_1 les extensions plates qui font passer de S_1 à S'_1, on obtient $S'_1 M_1 N_2$. On pose alors $u = u_0 M_1 N_2 M_2$.

Pour montrer que $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est une partie, il suffit de constater que dans chaque cas de l'itération ci-dessus on a bien d'une part que $\sharp(M_2) = \sharp(M_1)$, et d'autre part que, dans $A \to A$, la polarité de M_2 est bien l'opposée de la polarité de M_1. □

Soit a un nœud de $\mathcal{F}_A$ et $a_1, \ldots, a_p$ la suite de nœuds de $\mathcal{F}_A$ tels que $\vdash a_1$, $a_i \vdash a_{i+1}$ et $a_p = a$. À partir de maintenant, on note a_i l'occurrence $or(a_i)$; de même, pour un nœud donné b de $\mathcal{F}_B$, on notera b l'occurrence $or(b)$.

On va construire, par induction sur p, une fonction $f : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ et deux parties zig-zag $s_1^p \in \tilde{\sigma}$ et $s_2^p \in \tilde{\tau}$ telles que[2] :

- $\vdash f(a_1)$ et $f(a_i) \vdash f(a_{i+1})$ pour $1 \leq i < n$
- $s_1^p\upharpoonright_{\uparrow} = s_2^p\upharpoonright_{\downarrow}$
- toute arène jouée par $\mathbf{O}$ dans s_1^p (resp. s_2^p) au niveau d'un coup de format $\downarrow$ (resp. $\uparrow$) est une variable de copycat
- $\mathcal{A}(s_2^p) = a_1[b_1]f(a_1)[c_1]f(a_2)[c_2]a_2[b_2]\ldots$
- $\mathcal{A}(s_1^p) = f(a_1)[c_1]a_1[d_1]a_2[d_2]f(a_2)[c_2]\ldots$
- $\vdash b_i$ et $\mathcal{E}(b_i) = \mathcal{E}(c_i) = \mathcal{E}(d_i) \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq i \leq n$.

Si $p = 0$ on pose $s_1^0 = s_2^0 = \epsilon$.

Si $p = p' + 1$ avec p' pair, $\mathcal{A}(s_2^{p'}) = a_1[b_1]f(a_1)[c_1]\ldots f(a_{p'})[c_{p'}]a_{p'}[b_{p'}]$ et $\mathcal{A}(s_1^{p'}) = f(a_1)[c_1]a_1[d_1]\ldots a_{p'}[d_{p'}]f(a_{p'})[c_{p'}]$.

On a différents cas :

[2]La dernière condition, la plus importante, est inspirée de la propriété de *généricité* de [AJ03]. Mais ici on va démontrer cette propriété pour les stratégies réalisant un isomorphisme, alors que dans [AJ03] elle est imposée à toutes les stratégies.

- Considérons d'abord le cas où $paux_{B\to A}(a_p) = \mathbf{O}$. Alors $s_2^{p'}m \in \mathcal{P}_{B\to A}$ avec $m = m_0[i]$ pour un certain i, $\mathcal{A}(m_0) = a_p$ et toute arène jouée au niveau de m est une variable de copycat. Par totalité de $\tilde{\tau}$, $s_2^{p'}mn \in \tilde{\tau}$ pour un certain n, on note $n = m_1[m_2]$, $\mathcal{A}(m_1) = b \in \mathcal{O}_B$ ($\mathcal{A}(m_1) \in \mathcal{O}_A$ contredirait le fait que $\sigma;\tau \subseteq id$) et $m_2 = M[i]$.
  Par totalité de $\tilde{\sigma}$ il existe m' tel que $s_1^{p'}nm' \in \tilde{\sigma}$. On note $m' = m'_1[m'_2]$ avec $\mathcal{A}(m'_1) \in \mathcal{O}_{A\to B}$.
  Est-il possible d'avoir $\mathcal{A}(m'_1) \in \mathcal{O}_B$? Dans ce cas, on prend les parties symboliques S_1 et S_2 dont proviennent respectivement $s_1^{p'}$ et $s_2^{p'}$. En utilisant le lemme 20, on peut construire la suite justifiée u telle que $u\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est une extension plate de S_2, $u\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow}$ est une extension plate de S_1 et $u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est une partie. Alors $u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow}\in \tilde{\tau};\tilde{\sigma}$, et $u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} NM' \in \tilde{\tau};\tilde{\sigma}$ où N et M' sont obtenus à partir de n et m' par extension plate, donc $u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} NM' \in id$. Mais cette partie contient deux coups successifs de format $\uparrow$, ce qui est impossible.
  Donc $\mathcal{A}(m'_1) \in \mathcal{O}_A$. Comme $\sigma;\tau \subseteq id$, on a $erase(m') = erase(m)$, donc $erase(m'_1) = \mathcal{E}(a_p)$, d'où $\mathcal{A}(m'_1) = a_p$ par non-ambiguïté stricte de $\mathcal{O}_A$, et en outre $erase(m'_2) = i$.
  Si $p = 1$ alors $\vdash b$. Si $p > 1$, m' est justifié dans $s_1^{p'}nm'$ par le coup n' tel que $\mathcal{A}(n') = a_{p'}[b_{p'}]$. Donc le coup qui justifie n ne peut pas être joué avant n', par innocence de $\tilde{\sigma}$, ce qui signifie que n est justifié par le coup n'' de $s_1^{p'}$ tel que $\mathcal{A}(n'') = f(a_{p'})[c_{p'}]$. Donc $f(a_{p'}) \vdash b$.
  On pose $s_1^p = s_1^{p'}nm'$ et $s_2^p = s_2^{p'}mn$, ce qui signifie : $f(a_p) = f(a_1)\dots f(a_{p'})b$ (de sorte que $or(f(a_p)) = b$), $b_p = i$, $c_p = \mathcal{A}(M[i])$ et $d_p = \mathcal{A}(m'_2)$. La preuve que $erase(M[i]) = i$ dépend de la polarité auxiliaire de b.
  Si $paux_{B\to A}(b) = \mathbf{O}$ alors la partie symbolique dont provient s_2^p est $S\tilde{a}[j]\tilde{b}[j] \in \tilde{\tau}$ avec $\mathcal{A}(\tilde{a}) = a$ et $\mathcal{A}(\tilde{b}) = b$. s_2^p étant une extension de cette partie, on a $M[i] = i$ donc $erase(M[i]) = i$.
  Si $paux_{B\to A}(b) = \mathbf{P}$ alors $paux_{A\to B}(b) = \mathbf{O}$. La partie symbolique dont provient s_1^p est $S\tilde{b}[j]\tilde{a}[M'[j]] \in \tilde{\tau}$ avec $\mathcal{A}(\tilde{b}) = b$ et $\mathcal{A}(\tilde{a}) = a_p$. Donc en réinstanciant par les bonnes extensions copycat on obtient $s_1^{p'}nm' = s_1^{p'}m_1[M[i]]m'_1[M'[M[i]]]$, donc $erase(M'[M[i]]) = i$, ce qui implique $erase(M[i]) = i$.
  Le cas où $paux_{B\to A}(b)$ n'est pas défini est impossible car dans ce cas $\sharp(b) = 0 \neq i$.
- Considérons maintenant le cas où $paux_{B\to A}(a_p) = \mathbf{P}$. Alors $s_2^{p'}m \in \mathcal{P}_{B\to A}$ avec $m = m_0[M]$ pour un certain coup M avec $\vdash M$, $\mathcal{A}(m_0) = a_p$ et toute arène jouée au niveau de m est une variable de copycat. Par totalité de $\tilde{\tau}$, $s_2^{p'}mn \in \tilde{\tau}$ pour un certain n, on note $n = m_1[m_2]$ et $\mathcal{A}(n) = b \in \mathcal{O}_B$ ($\mathcal{A}(n) \in \mathcal{O}_A$ contredirait le fait que $\sigma;\tau \subseteq id$).
  Par totalité de $\tilde{\sigma}$ il existe m' tel que $s_1^{p'}nm' \in \tilde{\sigma}$. On pose $m' = m'_1[m'_2]$ avec $\mathcal{A}(m'_1) \in \mathcal{O}_{A\to B}$.
  Là encore,est-il possible d'avoir $\mathcal{A}(m'_1) \in \mathcal{O}_B$? On fait le même raisonnement que précédemment : on suppose que c'est le cas, et on prend les parties symboliques S_1 et S_2 dont proviennent respectivement $s_1^{p'}$ et $s_2^{p'}$. En utilisant le lemme 20, on

peut construire la suite justifiée u telle que $u\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est une extension plate de S_2, $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}$ est une extension plate de S_1 et $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est une partie. Alors $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}\in \tilde{\tau};\tilde{\sigma}$, et $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow} NM' \in \tilde{\tau};\tilde{\sigma}$ où N et M' sont obtenus à partir de n et m' par extension plate, donc $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow} NM' \in id$. Mais cette partie contient deux coups successifs de format $\uparrow$, ce qui est impossible.
Donc $\mathcal{A}(m'_1) \in \mathcal{O}_A$. Comme $\sigma;\tau \subseteq id$, on a $erase(m') = erase(m)$, donc $erase(m'_1) = \mathcal{E}(a_p)$, d'où $\mathcal{A}(m'_1) = a_p$ par non-ambiguïté stricte de $\mathcal{O}_A$, et par ailleurs $erase(m'_2) = M$. Mais $paux_{A\to B}(a_p) = \mathbf{O}$, donc $m'_2 = i$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$.
m' est justifié dans $s_1^{p'}nm'$ par le coup n' tel que $\mathcal{A}(n') = a_{p'}[b_{p'}]$. Le coup qui justifie n ne peut donc être joué avant n', par innocence de $\tilde{\sigma}$, ce qui signifie que n est justifié par le coup n'' de $s_1^{p'}$ tel que $\mathcal{A}(n'') = f(a_{p'})[c_{p'}]$. Donc $f(a_{p'}) \vdash b$.
On pose $s_1^p = s_1^{p'}nm'$ et $s_2^p = s_2^{p'}mn$, ce qui signifie s : $f(a_p) = f(a_1)\dots f(a_{p'})b$ (de sorte que $or(f(a_p)) = b$), $b_p = \mathcal{A}(M)$, $c_p = \mathcal{A}(m_2)$ et $d_p = i$. La preuve que $erase(m_2) = i$ dépend de la polarité auxiliaire de b.
Si $paux_{B\to A}(b) = \mathbf{O}$ alors la partie symbolique dont provient s_2^p est $S\tilde{a}[M'[j]]\tilde{b}[j] \in \tilde{\tau}$ avec $\mathcal{A}(\tilde{b}) = b$ et $\mathcal{A}(\tilde{a}) = a_p$. Donc en retrouvant l'extension appropriée on obtient $M = M'[m_2]$, or $erase(M) = i$ donc $erase(m_2) = i$.
Si $paux_{B\to A}(b) = \mathbf{P}$ alors $paux_{A\to B}(b) = \mathbf{O}$ et $paux_{A\to B}(a_p) = \mathbf{O}$. La partie symbolique dont provient s_1^p est $S\tilde{b}[j]\tilde{a}[j] \in \tilde{\tau}$ avec $\mathcal{A}(\tilde{b}) = b$ et $\mathcal{A}(\tilde{a}) = a_p$. Donc en retrouvant l'extension copycat appropriée on a $m_2 = i$, d'où $erase(m_2) = i$.
Si $paux_{B\to A}(b)$ n'est pas défini alors la partie symbolique dont provient s_1^p est $S\tilde{b}\tilde{a}[i]$ avec $\mathcal{A}(\tilde{b}) = b$ et $\mathcal{A}(\tilde{a}) = a_p$. ce gui est impossible car dans ce cas $\sharp(b) = 0 \neq i$.

- Finalement, si $paux_{B\to A}(a_p)$ n'est pas défini on a $s_2^{p'}m \in \mathcal{P}_{B\to A}$ avec $\mathcal{A}(m) = a_p$ et toute arène jouée au niveau de m est une variable de copycat. Par totalité de $\tilde{\tau}$, $s_2^{p'}mn \in \tilde{\tau}$ pour un certain n, on note $n = m_1[m_2]$, $\mathcal{A}(n) = b \in \mathcal{O}_B$ ($\mathcal{A}(n) \in \mathcal{O}_A$ contredirait le fait que $\sigma;\tau \subseteq id$).
Par totalité de $\tilde{\sigma}$ on a $s_1^{p'}nm' \in \tilde{\sigma}$ pour $m' = m'_1[m'_2]$ avec $\mathcal{A}(m'_1) \in \mathcal{O}_{A\to B}$. On prouve une nouvelle fois que $\mathcal{A}(m'_1) \in \mathcal{O}_A$, $\mathcal{A}(m'_1) = a_p$ et $erase(m') = erase(m)$ donc $erase(m'_2) = 0$.
On pose $s_1^p = s_1^{p'}nm'$ et $s_2^p = s_2^{p'}mn$, ce qui signifie : $f(a_p) = f(a_1)\dots f(a_{p'})b$ (de sorte que $or(f(a_p)) = b$), $b_p = 0$, $c_p = \mathcal{A}(m_2)$ et $d_p = \mathcal{A}(m'_2)$. La preuve que $erase(m_2) = 0$ dépend de la polarité auxiliaire de b.
Si $paux_{B\to A}(b) = \mathbf{O}$ alors la partie symbolique dont provient s_2^p est $S\tilde{a}\tilde{b}[j] \in \tilde{\tau}$ avec $\mathcal{A}(\tilde{b}) = b$ et $\mathcal{A}(\tilde{a}) = a_p$. Mais c'est impossible car $\sharp(a) = 0$.
Si $paux_{B\to A}(b) = \mathbf{P}$ alors la partie symbolique dont provient s_1^p est $S\tilde{b}[j]\tilde{a} \in \tilde{\tau}$ avec $\mathcal{A}(\tilde{b}) = b$ et $\mathcal{A}(\tilde{a}) = a_p$. Mais c'est impossible car $\sharp(a) = 0$.
Donc $paux_{B\to A}(b)$ n'est pas défini, et $m_2 = 0$ d'où $erase(m_2) = 0$.

Si $p = p' + 1$ avec p' impair, le raisonnement est similaire à ceci près que l'on définit s_1^p avant s_2^p.

Pour voir que f est une bijection, considérons par exemple le cas $p = p' + 1$ avec p' pair.

Comme $S_1^{p'}m_1[i]m_0[i] \in \tilde{\sigma}$, on a $S_1\mathcal{E}(f(a_p))[i]\mathcal{E}(a_p)[i] \in \sigma$ avec $S_1 = erase(s_1^{p'})$, pour n'importe quel $i \in \mathbb{N}$ par hyperuniformité.

Si $f(a_p) = f(a'_p)$, on a $erase(s_1^p) = S_1\mathcal{E}(f(a_p))[i]\mathcal{E}(a_p)[i]$ pour un certain i, donc $S_1\mathcal{E}(f(a'_p))[i]\mathcal{E}(a_p)[i] \in \sigma$. Or on a aussi $S_1\mathcal{E}(f(a'_p))[j]\mathcal{E}(a'_p)[j] \in \sigma$ pour un certain j, donc $S_1\mathcal{E}(f(a'_p))[i]\mathcal{E}(a'_p)[i] \in \sigma$ par hyperuniformité, donc $a_p = a'_p$ par déterminisme de σ.

Considérons maintenant b tel que $f(a_{p'}) \vdash b$. Prenons les parties symboliques S_1 et S_2 dont proviennent respectivement $s_1^{p'}$ et $s_2^{p'}$. En utilisant le lemme 20, on peut construire la suite justifiée u telle que $S_2 = u\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est une extension plate de $s_2^{p'}$, $S_1 = u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}$ est une extension plate de $s_1^{p'}$ et $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ est une partie. Par totalité de $\tilde{\sigma}$ on a $S_1m_1[M]m_2[M'] \in \tilde{\sigma}$ avec $\mathcal{A}(m_1) = b$ et $\mathcal{A}(m_2) \in \mathcal{O}_A$. Par totalité de $\tilde{\tau}$ on a $S = S_2m_2[M']m' \in \tilde{\tau}$. Comme $\sigma;\tau \subseteq id$ on a $erase(m') = erase(m_1[M])$, et par innocence on montre que $a_{p'} \vdash a$. $erase(S)$ est une extension de $erase(s_1^p)$ donc $erase(m') = \mathcal{E}(f(a))$. D'où $b = f(a)$.

On considère maintenant les parties symboliques S_1^p et S_2^p dont proviennent respectivement s_1^p et s_2^p. On a toujours $\mathcal{A}(S_2^p) = a_1[b'_1]f(a_1)[c'_1]f(a_2)[c'_2]a_2[b'_2]\ldots$ et $\mathcal{A}(S_1^p) = f(a_1)[c'_1]a_1[d'_1]a_2[d'_2]f(a_2)[c'_2]\ldots$ avec $\mathcal{E}(b'_i) = \mathcal{E}(c'_i) = \mathcal{E}(d'_i) \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq i \leq n$: en effet, s_2^p (resp. s_1^p) est l'extension copycat de S_2^p (resp. S_1^p), donc si $\mathcal{E}(c'_i) \neq \mathcal{E}(b'_i)$ (resp. $\mathcal{E}(d'_i) \neq \mathcal{E}(c'_i)$) alors $\mathcal{E}(c_i) \neq \mathcal{E}(b_i)$ (resp. $\mathcal{E}(d_i) \neq \mathcal{E}(c_i)$).

On s'intéressera par la suite aux parties S_1^p et S_2^p : même si ces parties ne composent pas, le fait qu'elles soient symboliques nous permettra de les substituer comme on le désire.

6.6.2 Construction d'une partie typée

Á partir de maintenant on va identifier les nœuds a_i et $f(a_i)$ avec les coups non typés $\mathcal{E}(a_i)$ et $\mathcal{E}(f(a_i))$ respectivement : cela ne conduit à aucune confusion grâce à la non-ambiguïté stricte de $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{O}_B$.

Pour montrer que f satisfait aux conditions d'un isomorphisme à la Curry, on va étendre la partie S_1^p en une partie $s_p \in \tilde{\sigma}$, avec un choix approprié des arènes jouées par **O**. L'entier i tel que $S_1^p = S_0a_p[i]$ ou $S_1^p = S_0f(a_p)[i]$ sera remplacé par un coup non typé y_p, lui aussi choisi de façon appropriée.

Dans la partie s_p, on va utiliser les arènes $(C_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définies par : $C_1 = \bot \times \bot$ et $C_{j+1} = C_j \times C_j$. Notons que tout coup initial de C_j s'écrit $b_1(b_2(\ldots(b_j(0))\ldots))$, où chaque b_i est un symbole r ou l. On appelle r_j le coup initial de C_j dans lequel chaque b_i est égal à r. Ces arènes C_j vont être utilisées dans l'idée d'avoir des coups *frais*, c'est-à-dire qui ne peuvent provenir d'une arène jouée avant C_j. Dans ce qui suit, l'entier naturel n_p est justement présent pour assurer qu'aucune arène définie avant la p-ième étape ne peut appartenir à C_q pour $q \geq p$.

Par ailleurs, on se donne aussi une fonction $\mu\_ : \mathcal{G} \to \mathbb{A}$ qui attribue à toute arène $D \in \mathcal{G}$ un coup $\mu_D \in \mathcal{M}_D$ avec les conditions suivantes :

- $\vdash \mu_D$

- s'il existe $c \in \mathcal{O}_D$ tel que $\vdash c$ et $\mathcal{L}_D(c) \neq \dagger$, alors $\mu_D = m_1[m_2]$ avec $\mathcal{A}(m_1) = d$, $\mathcal{L}_D(d) \neq \dagger$, $\frac{m_1}{\mathcal{L}_D(c)} = \bot \times \bot$ et $m_3' = l0$.

On construit le triplet (s_p, y_p, n_p) par induction :

- Si $p = 1$, on définit le coup typé $M_1 = m_1[m_2]$ tel que : $\mathcal{A}(m_1) = f(a_1)$, les d_1 arènes jouées au niveau de m_1 sont $C_1, \ldots, C_{d_1}$ et on choisit $m_2 = \sharp(f(a_1))$ si $paux_{A\to B}(f(a_1))$ n'est pas défini et $m_2 = r_j$ si $\frac{m_1}{\mathcal{L}_{A\to B}(f(a_1))} = C_j$. Soit $s_1 = M_1 M_1'$ l'extension copycat de S_1^1 correspondant à ces choix, on a $erase(M_1 M_1') = f(a_1)[y_1]a_1[y_1]$ où $y_1 = erase(m_2)$. Soit N le plus grand nombre de symboles r dans toute occurrence initiale d'une arène D définie au niveau de M_1', on choisit $n_1 = max(d_1, N) + 1$.
- Si $p = p' + 1$ avec p' pair, on définit le coup typé $M_p = m_1[m_2]$ tel que : $erase(m_1) = f(a_p)$, les d_p arènes jouées au niveau de m_1 sont $C_{n_{p'}}, \ldots, C_{n_{p'}+d_p}$ et m_2 est choisi comme suit :
  - si $paux_{A\to B}(f(a_p))$ n'est pas défini, $m_2 = \sharp(f(a_p))$
  - si $paux_{A\to B}(f(a_p)) = \mathbf{O}$, $m_2 = r_j$ si $\frac{m_1}{\mathcal{L}_{A\to B}(f(a_p))} = C_j$
  - si $paux_{A\to B}(f(a_p)) = \mathbf{P}$, posons $D = \frac{m_1}{\mathcal{L}_{A\to B}(f(a_p))}$. On choisit $m_2 = \mu_D$, et on note $r_D = erase(m_2)$ [3].

  Soit $s_p = s_{p'} M_p M_p'$ l'extension copycat de S_1^p correspondant à ces choix, on a $erase(s_{p'} M_p M_p') = erase(s_{p'}) f(a_p)[y_p]a_1[y_p]$ si $y_p = erase(m_2)$. Soit N le plus grand nombre de symboles r dans toute occurrence initiale d'une arène D définie au niveau de M_p', on choisit $n_1 = max(d_1, N) + 1$.
- Si $p = p' + 1$ avec p' pair, on fait exactement les mêmes choix que précédemment, mais en remplaçant $f(a_p)$ par a_p, et inversement.

Supposons que $paux_{A\to B}(a_p)$ soit défini, alors $ref_{A\to B}(a_p) = b$ l'est aussi. Il est important pour la suite de comprendre le lien entre b et la partie s_p. D'abord, notons que $b = a_i$ pour un certain $i \in [1, p]$; ensuite, par définition de l'ensemble $\mathcal{R}_{A\to B}$ des hyperarêtes, on sait que a_i est l'occurrence minimale de $\mathcal{O}_{A\to B}$ telle que $\mathcal{L}_{A\to B}(a_p)$ soit un préfixe de a_i. En effet, si M_i (resp. M_p) est le coup dans s_p tel que $erase(M_i) = a_i[y_i]$ (resp. $erase(M_p) = a_p[y_p]$) et si $D = \frac{M_p}{\mathcal{L}_{A\to B}(a_p)}$, alors l'arène D est jouée par $paux_{A\to B}(a_p)$ au niveau de M_i. Donc, par construction de s_p, D a été jouée à l'étape i.

Il nous faut aussi construire une partie $u_p \in \tilde{\tau}$ qui étend S_2^p de façon appropriée. La procédure est similaire.

6.6.3 Isomorphisme à la Curry

Armé de nos parties s_p et u_p, on va maintenant être en mesure de prouver que la fonction f laisse invariante la structure voulue :

Lemme 21 *f est un isomorphisme à la Curry entre H_A et H_B, c'est-à-dire que :*

- *$a \leq a'$ ssi $f(a) \leq f(a')$*

[3] Dans le cas où il existe $c \in \mathcal{O}_D$ tel que $\vdash c$ et $\mathcal{L}_D(c) \neq \dagger$, μ_2 est construit précisément de tel sorte qu'on ne puisse avoir $r_D = r_j$ pour aucune valeur de j.

- $\mathcal{S}^{H_2} = f(\mathcal{S}^{H_1})$
- *pour tout* $(t, S) \in \mathcal{R}_1$ *(resp.* $(t, S) \in \mathcal{R}_2$*), s'il existe* $s \in S$ *tel que* $\lambda(s) \neq \lambda(t)$*, alors* $(f(t), f(S)) \in \mathcal{R}_2$ *(resp.* $(f^{-1}(t), f^{-1}(S)) \in \mathcal{R}_1$*)*
- $\mathcal{D}_2 \circ f = \mathcal{D}_1$.

Démonstration : Le premier point est déjà acquis, on montre le dernier : supposons que $\mathcal{D}_A(a_p) = X_i$, alors $s_p = s_{p-1}MM'$ avec $erase(M) = a_p[i]$ et $erase(M') = f(a_p)[i]$; de même, $u_p = u_{p-1}NN'$ avec $erase(N) = f(a_p)[i]$ et $erase(M') = a_p[i]$. Si $paux_{A \to B}(f(a_p)) = \mathbf{O}$ alors on devrait avoir, par construction de s_p, $i = r_j$ pour un certain j, ce qui est impossible. Si $paux_{A \to B}(f(a_p)) = \mathbf{P}$ alors $paux_{B \to A}(f(a_p)) = \mathbf{O}$ et on devrait avoir, par construction de s_p, $i = r_j$ pour un certain j, ce qui est impossible. Donc $paux_{A \to B}(f(a_p))$ n'est pas défini, et $\sharp(f(a_p)) = i$ ce qui signifie que $\mathcal{D}_B(f(a_p)) = X_i$. De même, $\mathcal{D}_B(f(a_p)) = X_i$ implique $\mathcal{D}_A(a_p) = X_i$.

On prouve ensuite que $f(\mathcal{S}_A) = \mathcal{S}_B$: si $a_p \in S$ avec $(t, S) \in \mathcal{R}_A$ pour un certain t, supposons que $\mathcal{L}_{A \to B}(f(a_p)) = \dagger$. Si $paux_{A \to B}(a_p) = \mathbf{O}$ alors $s_p = s_{p-1}MM'$ avec $erase(M) = a_p[y_p]$ et $erase(M') = f(a_p)[y_p]$, et on devrait avoir $y_p = r_j$ pour un certain j par construction de s_p. Mais c'est impossible car $\mathcal{L}_{A \to B}(f(a_p)) = \dagger$ implique $\mathcal{A}(M') \in \mathcal{O}_{A \to B}$, donc $y_p \in \mathbb{N}$. Si $paux_{A \to B}(a_p) = \mathbf{P}$ alors $paux_{B \to A}(a_p) = \mathbf{O}$, $u_p = u_{p-1}NN'$ avec $erase(N) = f(a_p)[y_p]$ et $erase(N') = a_p[y_p]$, et on devrait avoir $y_p = r_j$ pour un certain j par construction de u_p. Mais c'est impossible car $\mathcal{L}_{A \to B}(f(a_p)) = \dagger$ implique $\mathcal{A}(N) \in \mathcal{O}_{A \to B}$, donc $y_p \in \mathbb{N}$.

Finalement, il nous faut prouver la chose suivante : pour tout $(t, S) \in \mathcal{R}_A$, s'il existe $c \in S$ tel que $\lambda(c) \neq \lambda(t)$, alors $(f(t), f(S)) \in \mathcal{R}_B$ (la réciproque étant prouvée de façon similaire). Supposons donc qu'on ait un tel c pour $(t, S) \in \mathcal{R}_A$, et prenons la suite de nœuds $a_1, \dots, a_p$ de $\mathcal{F}_A$ tels que $\vdash a_1$, $a_i \vdash a_{i+1}$ et $a_p = c$. On a nécessairement que $t = a_i$ pour un certain $i \leq p$.

On prouve d'abord que $ref_B(f(a_p)) = f(a_i)$: supposons que ce soit faux, alors $ref_B(f(a_p)) = f(a_j)$ avec $j \neq i$. Prenons d'abord le cas $j < i$: si $paux_{A \to B}(a_p) = \mathbf{O}$, alors $f(a_p)$ est un coup $\mathbf{O}$ sur $A \to B$, donc $s_p = SM_pM'_p$ avec : $M_p = m_1[m_2]$, $\mathcal{A}(m_1) = f(a_p)$ et $\frac{m_1}{\mathcal{L}_{A \to B}(f(a_p))} = D$ pour un certain D choisi à l'étape j ; et $M'_p = m'_1[m'_2]$, $\mathcal{A}(m'_1) = a_p$ et $\frac{m'_1}{\mathcal{L}_{A \to B}(a_p)} = C_{k'}$ pour un certain $k' \geq n_{i-1}$. On devrait donc avoir $y_p = r_k$ comme nœud choisi dans D, ce qui est impossible par construction de n_{i-1}. Si $paux_{A \to B}(a_p) = \mathbf{P}$, on note simplement que $paux_{B \to A}(a_p) = \mathbf{O}$ et on fait le même raisonnement avec u_p dans $B \to A$. Prenons maintenant le cas $i < j$, le raisonnement est similaire : si $paux_{A \to B}(a_p) = \mathbf{P}$, alors $s_p = SM_pM'_p$ où : $M_p = m_1[m_2]$, $\mathcal{A}(m_1) = a_p$ et $\frac{m_1}{\mathcal{L}_{A \to B}(a_p)} = D$ pour un certain D choisi à l'étape i ; et $M'_p = m'_1[m'_2]$, $\mathcal{A}(m'_1) = f(a_p)$ et $\frac{m'_1}{\mathcal{L}_{A \to B}(f(a_p))} = C_{k'}$ pour un certain $k' \geq n_{j-1}$. Cela conduit à une contradiction. Si $paux_{A \to B}(f(a_p)) = \mathbf{P}$, on travaille sur $B \to A$.

Soit maintenant $b \in fr_A(a_p)$, et supposons que $f(b) \notin fr_B f(a_p)$. Grâce à ce qui a été prouvé auparavant on sait que $paux_{A \to B}(f(b))$ est défini, mais aussi que $ref_B(f(b))$ a la même polarité que $ref_A(b)$: en effet, si $paux_A(b) \neq \lambda(b)$ alors $ref_B(f(b)) = f(ref_A(b))$, donc $\lambda(ref_B(f(b))) = \lambda(f(ref_A(b))) = \lambda(ref_A(b))$; de façon similaire, si $paux_B(f(b)) \neq$

$\lambda(f(b))$ alors on a $ref_A(b) = f^{-1}(ref_B(f(b)))$, donc $\lambda(ref_A(b)) = \lambda(f^{-1}(ref_B(f(b)))) = \lambda(ref_B(f(b)))$. Finalement, si $paux_A(b) = \lambda(b)$ et $paux_B(f(b)) = \lambda(f(b))$ alors $paux_A(b) = paux_B(f(b))$ car b et $f(b)$ ont la même polarité. Donc, dans tous les cas, $paux(b) = paux(f(b))$.

On considère que $paux_{A \to B}(f(b)) = \mathbf{O}$ (sinon, on travaille avec u_p sur $B \to A$), donc $paux_{A \to B}(a_p) = \mathbf{P}$ et $s_p = s_{p-1}m_1[m_2]m'_1[m'_2]$ avec $\frac{m'_1}{\mathcal{L}_{A \to B}(f(a_p))} = C_k$ pour un certain k. Soit $D = \frac{m_1}{\mathcal{L}_{A \to B}(a_p)}$, on a nécessairement que $y_p = r_k = erase(r_D)$. Mais un problème se pose entre b et $f(b)$: en premier lieu, supposons que b ait la polarité $\mathbf{P}$ dans A. Alors il existe une partie $s'_q = s'_{q-1}M_1[M_2]M'_1[M'_2]$ dans $\tilde{\sigma}$, construire de la même façon que s_p, telle que $erase(s'_q) = erase(s'_{q-1})b[y'_q]f(b)[y'_q]$, et où $\frac{M_1}{\mathcal{L}_{A \to B}(b)} = D$ et $\frac{M'_1}{\mathcal{L}_{A \to B}(f(b))} = C_{k'}$ avec $k' \neq k$. On devrait donc avoir $y'_q = erase(r_D)$ comme occurrence de $C_{k'}$, donc $r_k = r_{k'}$ ce qui est impossible. Le second cas est celui où b a la polarité $\mathbf{O}$ dans A. Il existe alors une partie $s'_q = M_1[M_2]M'_1[M'_2]$ dans $\tilde{\sigma}$, construire de la même façon que s_p, telle que $erase(s'_q) = s'f(b)[y'_q]b[y'_q]$, et où $\frac{M_1}{\mathcal{L}_{A \to B}(f(b))} = C_{k'}$ avec $k' \neq k$ et $\frac{M'_1}{\mathcal{L}_{A \to B}(b)} = D$. On devrait donc avoir $y'_q = r_{k'} = erase(d')$ avec d' coup dans D. Mais dans ce cas $\mathcal{A}(d), \mathcal{A}(d') \in \mathcal{O}_D$ (sinon, par construction de s_p, on aura un symbole l dans d ou d'), donc $\mathcal{E}(d) = r_k$ et $\mathcal{E}(d') = r_{k'}$, d'où $k = k'$ car D est strictement non-ambigu. C'est impossible.

De la même façon, $f(b) \in fr_B(f(a_p))$ implique $b \in fr_A(a_p)$, donc $f(S) = \{b \mid s \in fr_B(f(a_p))\}$. Cela nous permet de conclure que $(f(t), f(S)) \in \mathcal{R}_B$. $\square$

Ce lemme termine la preuve du théorème 6.

6.6.4 Caractérisation des isomorphismes de types

La preuve du théorème 6 était l'étape principale dans notre caractérisation des isomorphismes de types à la Curry : on est maintenant en mesure d'établir notre résultat final.

On commence par une définition :

Définition 53 *Soit A une formule du second ordre, ses ensemble de* ***variables positives*** *Pos_A et de* ***variables négatives*** *Neg_A sont définies par :*
- $Pos_X = \{X\}$, $Neg_X = \emptyset$
- $Pos_\perp = Neg_\perp = \emptyset$
- $Pos_{A \times B} = Pos_A \cup Pos_B$, $Neg_{A \times B} = Neg_A \cup Neg_B$
- $Pos_{A \to B} = Neg_A \cup Pos_B$, $Neg_{A \to B} = Pos_A \cup Neg_B$
- $Pos_{\forall X.A} = Pos_A \setminus \{X\}$, $Neg_{\forall X.A} = Neg_A \setminus \{X\}$

Les variables positives et négatives sont reliées de façon très naturelle à la polarité :

Proposition 21 *Soit A une formule du second ordre. $X_i \in Pos_A$ (resp. $X_i \in Neg_A$) si et seulement si il existe $c \in \mathcal{F}_A$ tel que $\mathcal{D}_A(c) = X_i$ et $\lambda(c) = \mathbf{O}$ (resp. $\lambda(c) = \mathbf{P}$).*

DÉMONSTRATION : On rappelle que $\mathcal{D}_A(c) = X_i$ ssi $\sharp(or(c)) = i$. Il suffit dès lors de raisonner par induction sur A. $\square$

On considère le système équationnel $\simeq_{Cu}$ suivant, dont on veut montrer qu'il caractérise les isomorphismes du système F à la Curry :

$$\begin{array}{rcll}
A \times B & \simeq_{Cu} & B \times A & \\
A \times (B \times C) & \simeq_{Cu} & (A \times B) \times C & \\
A \to (B \to C) & \simeq_{Cu} & (A \times B) \to C & \\
A \to (B \times C) & \simeq_{Cu} & (A \to B) \times (A \to C) & \\
\forall X.\forall Y.A & \simeq_{Cu} & \forall Y.\forall X.A & \\
A \to \forall X.B & \simeq_{Cu} & \forall X.(A \to B) & \text{si } X \notin FTV(A) \\
\forall X.(A \times B) & \simeq_{Cu} & \forall X.A \times \forall X.B & \\
\forall X.A & \simeq_{Cu} & A[\forall Y.Y/X] & \text{si } X \notin Neg_A
\end{array}$$

Ce système est à comparer au système équationnel $\simeq_\varepsilon$ défini à la figure 5.6.5. Les seules différences ici sont la dernière équation, et la disparition des équations liées au type $\top$. On a besoin d'un résultat intermédiaire :

Lemme 22 *Soit deux types A et B ne contenant pas $\top$ et tels que $A \simeq_\varepsilon B$, alors $A \simeq_{Cu} B$.*

Démonstration : En fait on n'a pas besoin de la dernière équation de $\simeq_{\mathcal{F}}$. Ce qu'il faut prouver est que, à cause du fait que $\top$ n'apparaît pas dans A et B, on n'a pas besoin d'utiliser les équations relatives à $\top$ pour montrer que $A \simeq_\varepsilon B$.

On commence par remarquer que pour mettre A et B sous forme canonique, on n'utilise que les règles de réécriture suivantes :

$$\begin{array}{c}
A \to (B \times C) \Rightarrow (A \to B) \times (A \to C) \\
A \to (B \to C) \Rightarrow (A \times B) \to C \\
\forall X.(A \times B) \Rightarrow (\forall X.A) \times (\forall X.B) \\
A \to \forall X.B \Rightarrow \forall X.(A \to B)
\end{array}$$

Supposons maintenant que A et B soient sous forme canonique. On a alors H_A et H_B isomorphes. En suivant la démonstration de la proposition 14, on se rend compte que les seules règles qu'on utilise pour obtenir $A \simeq_\varepsilon B$ sont la commutativité et l'associativité du produit, et la commutativité et l'associativité des quantificateurs. d'où $A \simeq_{Cu} B$. □

Proposition 22 *Soient A et B deux types ne contenant pas $\top$ et tels que les hyperforêts H_A et H_B soient Curry-isomorphes. Alors A et B sont égaux modulo le système équationnel $\simeq_\varepsilon$.*

Démonstration : Soient A' et B' les formes normales de A et B pour le système de réécriture suivant :

$$\forall X.C \Rightarrow C[\forall Y.Y/X] \quad \text{si } X \notin Neg_C \text{ et } C \neq X$$

Si $D_1 = \forall X.C$ et $D_2 = C[\forall Y.Y/X]$ avec $X \notin Neg_C$, alors H_{D_1} et H_{D_2} sont Curry-isomorphes : en effet, la bijection $f : \mathcal{F}_{D_1} \to \mathcal{F}_{D_2}$ qui préserve l'ordre et telle que $\mathcal{S}_{D_2} = f(\mathcal{S}_{D_1})$ et $\mathcal{D}_{D_2} \circ f = \mathcal{D}_1$ est facile à définir (en fait $\mathcal{O}_{D_1}$ et $\mathcal{O}_{D_2}$ sont en bijection).

Le fait que $X \notin Neg_C$ implique précisément que, pour toute hyperarête $(t, S) \in \mathcal{R}_{D_1}$ correspondant à la quantification $\forall X$ (i.e. telle que $\mathcal{L}_{\forall X.A}(or(s)) = \star 0$), il n'existe pas de $s \in S$ tel que $\lambda(s) \neq \lambda(t)$. Réciproquement, pour tout $(t, S) \in \mathcal{R}_{D_2}$ correspondant à une quantification $\forall Y.Y$, $S = \{t\}$, donc il n'existe pas de $s \in S$ tel que $\lambda(s) \neq \lambda(t)$. Tout autre hyperarête est préservée par f.

En outre, la relation de Curry-isomorphisme est une congruence (i.e. elle est préservés par le contexte), donc H_A et $H_{A'}$ sont Curry-isomorphes, H_B et $H_{B'}$ de même, et donc $H_{A'}$ et $H_{B'}$ le sont aussi. $H_{A'}$ et $H_{B'}$ sont tels que pour tout $(t, S) \in \mathcal{R}_{A'}$ (ou $(t, S) \in \mathcal{R}_{B'}$), soit $S = \{t\}$, soit S contient un nœud s avec $\lambda(t) \neq \lambda(s)$. Par définition d'un Curry-isomorphisme et d'un isomorphisme entre hyperforêts (cf. définitions 51 et 41), cela implique que $H_{A'}$ et $H_{B'}$ sont isomorphes.

Comme prouvé par la proposition 14, on a alors : $A' \simeq_\varepsilon B'$, ce qui implique $A' \simeq_{Cu} B'$ grâce au lemme 22. D'où $A \simeq_{Cu} B$. $\square$

Théorème 7 *Dans le système F à la Curry, deux types A et B sont isomorphes si et seulement si $A \simeq_{Cu} B$.*

Démonstration : L'implication vient du fait qu'on a un modèle (donc, tout isomorphisme de types dans le système F à la Curry implique un isomorphisme de jeux dans le modèle), du théorème 6 et de la proposition 22.

Pour la réciproque, on connaît déjà l'existence dans le système F à la Church des isomorphismes correspondant à chaque équation de $\simeq_{Cu}$, à l'exception de la dernière ($\forall X.A \simeq_\varepsilon A[\forall Y.Y/X]$ if $X \notin Neg_A$). Cela implique leur existence dans le système F à la Curry.

Il nous reste donc à trouver, étant donné un type A tel que $X \notin Neg_A$, deux termes à la Curry $t : \forall X.A \to A[\forall Y.Y/X]$ et $u : A[\forall Y.Y/X] \to \forall X.A$ qui composent dans les deux sens pour donner l'identité. On suppose que Y n'apparaît pas du tout dans A, même comme variable liée.

On choisit $t = \lambda x.x$: en effet, l'identité est bien de type $\forall X.A \to A[\forall Y.Y/X]$, comme le prouve la dérivation de type suivante :

$$\dfrac{\dfrac{x : \forall X.A \vdash x : \forall X.A}{x : \forall X.A \vdash x : A[\forall Y.Y/X]}}{\vdash \lambda x.x : \forall X.A \to A[\forall Y.Y/X]}$$

Pour construire un terme de type $A[\forall Y.Y/X] \to \forall X.A$ dans le système F à la Curry, on va passer par le terme à la Church associé.

Considérons donc le terme P du système F à la Church qui correspond à la forme $\eta\times$-longue de l'identité sur A. Ce terme est de la forme $P = \lambda x^A.P'$. On construit alors le terme Q obtenu à partir de P' en remplaçant chaque variable y apparaissant dans la portée d'un lieur λy^X par $y\{X\}$, puis chaque lieur λz^B tel que $X \in Pos_B$ par $\lambda z^{B[\forall Y.Y/X]}$. On pose enfin $N = \lambda x^{A[\forall Y.Y/X]} \Lambda X.Q$. Par exemple, si $A = (X \to \bot) \to \bot$, alors $N = \lambda x^{((\forall Y.Y) \to \bot) \to \bot}.\Lambda X.\lambda y^{X \to \bot}.x(\lambda z^{\forall Y.Y}.y(z\{X\}))$.

Le fait que $X \notin Neg_A$ nous assure que N est bien de type $A[\forall Y.Y/X] \to \forall X.A$ dans le système F à la Church. On note u le terme du lambda-calcul pur obtenu en effaçant les indications de types dans N (autrement dit u est le terme du système F à la Curry correspondant à N). Comme pour passer de P à N on a modifié uniquement les indications de types apparaissant dans les termes, u est simplement une $\eta\times$-expansion de l'identité $\lambda x.x$

Finalement, t et u sont tous deux égaux à l'identité via les égalités du système F à la Curry, donc ils composent pour donner l'identité dans les deux sens. $\square$

Chapitre 7

Système F classique

Le modèle de jeu développé dans le chapitre 5 a permis de retrouver, d'une manière géométrique, les isomorphismes de types du système F, déjà caractérisés syntaxiquement par Roberto Di Cosmo [DC95].

Mais un des grands avantages de l'approche sémantique est la possibilité d'étendre nos résultats à d'autres variantes du calcul : une importante évolution de la syntaxe ne nécessite parfois qu'une petite adaptation du modèle et des résultats déjà prouvés dans ce modèle.

Dans ce chapitre, on va s'attaquer à une variante importante de notre système : l'ajout d'une notion de **contrôle**, ou, de façon équivalente, le passage d'une logique intuitionniste à une logique classique. Là encore, on déduira du modèle une caractérisation des isomorphismes de types de la syntaxe.

Le langage associé $\lambda\mu 2$ a été présenté à la section 2.3. Une grosse partie de ce chapitre sera consacrée à donner une interprétation catégorique de ce langage, et à montrer sa correction. L'adaptation du modèle requiert aussi un peu de travail mais, une fois celui-ci achevé, la caractérisation des isomorphismes dans le modèle et la correspondance avec la syntaxe se feront sans plus de difficultés qu'au chapitre 5.

7.1 Hyperdoctrines de contrôle

On va donner dans cette section un modèle catégorique de $\lambda\mu 2$. On utilise pour cela deux ingrédients : la notion d'*hyperdoctrine*, déjà présentée au chapitre 6, et la notion de *catégorie de contrôle*, introduite par Selinger [Sel01] pour interpréter le $\lambda\mu$-calcul. Ainsi, on aura d'une part l'interprétation du second ordre grâce aux hyperdoctrines, et d'autre part l'interprétation de la disjonction classique grâce aux catégories de contrôle. Le principal enjeu de cette section est de définir correctement l'interaction entre ces deux structures.

Une alternative possible à l'utilisation des catégories de contrôle aurait été de s'intéresser aux catégories de continuation. Mais celles-ci nécessiteraient la construction d'une traduction CPS qui transforme le connecteur $\forall$ en un connecteur $\exists$, et donc de construire une théorie des catégories de continuation avec le quantificateur existentiel.

Comme notre modèle est basé sur le connecteur universel, cette option nous a paru peu adaptée.

7.1.1 Définition d'une hyperdoctrine de contrôle

La structure autour de laquelle sera construite notre modèle est l'**hyperdoctrine de contrôle**. Elle consiste en une hyperdoctrine dont les catégories cartésiennes closes images du foncteur de base ont une structure de catégorie de contrôle, avec des conditions de cohérence entre les deux structures.

On va dans un premier temps donner la définition d'une catégorie de contrôle, en suivant la présentation de Peter Selinger dans [Sel01], puis on rappellera ce qu'est une hyperdoctrine avant de décrire notre structure finale.

Suivant le cheminement de [PR97], on commence par introduire un produit tensoriel $\otimes$ sur **Cat**. Pour toute catégorie C, on note $[C]$ la sous-catégorie de C discrète et pleine sur les objets. Comme **Cat** est cocomplète, on peut définir $A \otimes B$ comme l'unique objet tel que le diagramme suivant soit un pushout :

$$\begin{tikzcd}
{[A] \times [B]} \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "F_2"'] & A \times [B] \arrow[d, "G_1"] \\
{[A] \times B} \arrow[r, "G_2"'] & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

où F_1 et F_2 sont les foncteurs de plongement triviaux. Cet objet peut être décrit de façon explicite (cf. [PR97]) et c'est, avec le produit cartésien, l'unique construction qui génère une structure symétrique monoïdale close sur **Cat**.

Définition 54 (catégorie binoïdale, centralité) *Une catégorie* $\mathbf{P}$ *est appelée* ***binoïdale*** *s'il existe un foncteur (aussi appelé* ***foncteur binoïdal****)* $\parr : \mathbf{P} \otimes \mathbf{P} \to \mathbf{P}$.

Un morphisme $f : A \to B$ *dans* $\mathbf{P}$ *sera dit* ***central*** *si, pour tout morphisme* $g : C \to D$ *de* $\mathbf{P}$ *:*

$$\parr(G_2(B, g) \circ G_1(f, C)) = \parr(G_1(f, D) \circ G_2(A, g))$$

et

$$\parr(G_2(g, B) \circ G_1(C, f)) = \parr(G_1(D, f) \circ G_2(g, A))$$

Comme indiqué dans [Sel01], cette définition revient à considérer deux bifoncteurs $\parr^1 : \mathbf{P} \times [\mathbf{P}] \to \mathbf{P}$ et $\parr^2 : [\mathbf{P}] \times \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ tels que $A \parr^1 B = A \parr^2 B$ pour tout couple d'objet A, B. Le fait qu'un morphisme $f : A \to B$ soit central signifie alors que, pour tout $g : C \to D$, $(f \parr^1 D) \circ (A \parr^2 g) = (B \parr^2 g) \circ (f \parr^1 C)$ et $(D \parr^1 f) \circ (g \parr^2 A) = (g \parr^2 B) \circ (C \parr^1 f)$. On note alors ces morphismes $f \parr g$ et $g \parr f$ respectivement.

Définition 55 (catégorie prémonoïdale) *On dit que* $\mathbf{P}$ *est une* ***catégorie prémonoïdale*** *si elle est binoïdale et s'il existe un objet* $\perp$ *et des isomorphismes naturels* *centraux* $a_{A,B,C} : (A \parr B) \parr C \to A \parr (B \parr C)$, $l_A : A \to A \parr \perp$ *et* $r_A : A \to \perp \parr A$ *tels que les diagrammes de cohérence commutent :*

$$\begin{tikzcd}
((A \parr B) \parr C) \parr D \arrow[r, "a"] \arrow[d, "a \parr D"'] & (A \parr B) \parr (C \parr D) \arrow[r, "a"] & A \parr (B \parr (C \parr D)) \\
(A \parr (B \parr C)) \parr D \arrow[rr, "a"] & & A \parr ((B \parr C) \parr D) \arrow[u, "A \parr a"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& A \parr B \arrow[dl, "l \parr B"'] \arrow[dr, "A \parr r"] & \\
(A \parr \perp) \parr B \arrow[rr, "a"] & & A \parr (\perp \parr B)
\end{tikzcd}$$

On dit que $\mathbf{P}$ *est* ***symétrique*** *s'il existe aussi un isomorphisme naturel central* $c_{A,B} : A \parr B \to B \parr A$ *tel que* $c_{A,B} \circ c_{B,A} = id_{A \parr B}$ *et :*

$$\begin{tikzcd}
(A \parr B) \parr C \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c \parr C"'] & A \parr (B \parr C) \arrow[r, "c"] & (B \parr C) \parr A \arrow[d, "a"] \\
(B \parr A) \parr C \arrow[r, "a"] & B \parr (A \parr C) \arrow[r, "B \parr c"] & B \parr (C \parr A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "l"'] \arrow[dr, "r"] & \\
A \parr \perp \arrow[rr, "c"] & & \perp \parr A
\end{tikzcd}$$

Définition 56 (codiagonales) *Soit* $\mathbf{P}$ *une catégorie prémonoïdale symétrique. On dit que* $\mathbf{P}$ *a les* ***codiagonales*** *si tout objet* A *est équipé d'une structure de monoïde symétrique* $\langle A, i_A, \nabla_A \rangle$, *c'est-à-dire de deux morphismes centraux* $i_A : \perp \to A$ *et* $\nabla_A : A \parr A \to A$ *tels que :*

$$\begin{tikzcd}
A \parr \perp \arrow[r, "A \parr i"] \arrow[dr, "l^{-1}"'] & A \parr A \arrow[d, "\nabla"] & \perp \parr A \arrow[l, "i \parr A"'] \arrow[dl, "r^{-1}"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A \parr A) \parr A \arrow[r, "\nabla \parr A"] \arrow[dd, "a"'] & A \parr A \arrow[dr, "\nabla"] & \\
& & A \\
A \parr (A \parr A) \arrow[r, "A \parr \nabla"] & A \parr A \arrow[ur, "\nabla"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \parr A \arrow[dr, "\nabla"] \arrow[dd, "c"'] & \\
& A \\
A \parr A \arrow[ur, "\nabla"'] &
\end{tikzcd}$$

et que cette structure est compatible avec la structure prémonoïdale, c'est-à-dire :

$$i_\perp = id_\perp \qquad \begin{tikzcd} \perp \arrow[dd, "l=r"'] \arrow[dr, "i_{A \parr B}"] & \\ & A \parr B \\ \perp \parr \perp \arrow[ur, "i_A \parr i_B"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \parr B \parr A \parr B \arrow[dd, "A \parr c \parr B"'] \arrow[dr, "\nabla_{A \parr B}"] & \\ & A \parr B \\ A \parr A \parr B \parr B \arrow[ur, "\nabla_A \parr \nabla_B"'] & \end{tikzcd}$$

Le morphisme ∇_A nous permet de retrouver la notion de *contraction* (de la logique linéaire). On peut aussi définir l'*affaiblissement* : $w = A \xrightarrow{l} A \parr \perp \xrightarrow{A \parr i} A \parr B$.

Définition 57 (focalité) *Un morphisme $f : A \to B$ est dit* ***focal*** *s'il est central et que les deux diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd} & \perp \arrow[dl, "i_A"'] \arrow[dr, "i_B"] & \\ A \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \parr A \arrow[r, "f \parr f"] \arrow[d, "\nabla_A"'] & B \parr B \arrow[d, "\nabla_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Définition 58 (distributivité) *Supposons que* $\mathbf{P}$ *soit une catégorie prémonoïdale symétrique avec codiagonales.* $\mathbf{P}$ *est dite* ***distributive*** *si elle a les produits finis et que :*

- *les projections π_1 et π_2 sont focales*
- *pour tout objet C de $\mathbf{P}$, le foncteur $- \parr C$ préserve les produits finis, c'est-à-dire que les morphismes naturels $(\pi_1 \parr C, \pi_2 \parr C) : (A \times B) \parr C \to (A \parr C) \times (B \parr C)$ et $\diamond_{1 \parr C} : 1 \parr C \to 1$ sont des isomorphismes, dont les inverses seront notés respectivement $d_{A,B,C}$ et $\diamond'_C$.*

Définition 59 (catégorie de contrôle) *Supposons que* $\mathbf{P}$ *soit une catégorie prémonoïdale symétrique distributive avec codiagonales, et supposons que* $\mathbf{P}$ *soit aussi cartésienne fermée. Pour A, B, C objets de* $\mathbf{P}$*, soit $s_{A,B,C} : (B^A \parr C) \to (B \parr C)^A$ le morphisme obtenu en curryfiant*

$$\hat{\epsilon}_{A,B,C} : (B^A \parr C) \times A \xrightarrow{(B^A \parr C) \times w} (B^A \parr C) \times (A \parr C) \xrightarrow{d} (B^A \times A) \parr C \xrightarrow{\epsilon \parr C} B \parr C$$

$\mathbf{P}$ *est appelé* ***catégorie de contrôle*** *si $s_{A,B,C}$ est un isomorphisme naturel en C et si on a :*

$$\begin{tikzcd} B^A \parr C^D \arrow[rr, "s'"] \arrow[d, "s"'] & & (B^A \parr C)^D \arrow[d, "s^D"] \\ (B \parr C^D)^A \arrow[r, "s'^A"] & ((B \parr C)^D)^A \arrow[r, "ccc"] & ((B \parr C)^A)^D \end{tikzcd}$$

où $s'_{A,B,C} = B \parr C^A \xrightarrow{c} C^A \parr B \xrightarrow{s} (C \parr B)^A \xrightarrow{c^A} (B \parr C)^A$, *et :*

$$\begin{tikzcd}
B^A \parr B^A \arrow[r, "s'"] \arrow[dr, "\nabla_{B^A}"'] & (B^A \parr B)^A \arrow[r, "s^A"] & (B \parr B)^{A \times A} \arrow[dl, "\nabla_B^{\Delta_A}"] \\
& B^A &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\perp \arrow[rr, "ccc"] \arrow[dr, "i_{B^A}"'] & & \perp^1 \arrow[dl, "(i_B)^{\diamond A}"] \\
& B^A &
\end{tikzcd}$$

où $\Delta_A = (id_A, id_A) : A \to A \times A$.

Remarque : Le morphisme $s_{A,B,C}$ est appelé **force exponentielle**. Sa naturalité en A et B découle de sa définition, on n'a donc pas besoin de l'imposer.

Un *foncteur strict* de catégories de contrôle $\mu : C \to D$ est un foncteur entre C et D qui envoie chaque constructeur de la structure de C sur l'élément correspondant de la structure de D : $\mu(A \parr B) = \mu(A) \parr \mu(B)$, $\mu(\perp) = \perp$, $\mu(\sigma \parr A) = \mu(\sigma) \parr \mu(A)$, $\mu(a_{A,B,C}) = a_{\mu(A),\mu(B),\mu(C)}$, etc.

On rappelle la définition d'une hyperdoctrine :

Définition 60 (hyperdoctrine) *Une* ***hyperdoctrine*** $\mathbf{H}$ *est définie par :*
- *une catégorie de base* $|\mathbf{H}|$ *munie d'une structure cartésienne, c'est-à-dire d'un objet terminal* 1 *et du produit binaire*
- *un objet distingué* U *dans* $|\mathbf{H}|$ *tel que, pour tout* $I \in |\mathbf{H}|$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $I = U^n$ *(avec la convention* $U^0 = 1$*) ; on note* $P_n^i : U^n \to U$ *la projection sur la ième composante, et* $P_{n+1} = \langle P_{n+1}^1, \ldots, P_{n+1}^n \rangle : U^{n+1} \to U^n$
- *un foncteur* $F : |\mathbf{H}|^{op} \to \boldsymbol{CCC}$ *tel que, si on compose* F *avec le foncteur d'oubli fff :* $\boldsymbol{CCC} \to \boldsymbol{Set}$, *on obtient le foncteur* $|\mathbf{H}|(-, U)$
- *pour tout* $I \in |\mathbf{H}|$, *un foncteur* $\Pi_I : F(I \times U) \to F(I)$ *tel que :*
  - Π_I *est adjoint à droite au foncteur* $G_I : F(I) \to F(I \times U)$ *défini par* $G_I = F(P_{n+1})$ *pour* $I = U^n$
  - Π_I *est naturel en* I *: pour tout* $\alpha : I \to J$, $F(\alpha) \circ \Pi_J = \Pi_I \circ F(\alpha \times id_U)$
  - *pour tout* $\alpha : I \to J$, *pour tout objet* A *de* $F(J \times U)$, *le morphisme* $(F(\alpha) \circ \Pi_J)(A) \to (\Pi_I \circ F(\alpha \times id_U))(A)$ *généré par l'adjonction est une identité.*

Il nous faut à présent décrire l'interaction entre une catégorie de contrôle et une hyperdoctrine de manière suffisamment précise pour qu'on obtienne un modèle de $\lambda\mu 2$. Dans ce qui suit, on appelle **foncteurs de spécialisation** les foncteurs $F(C)$ pour C objet de $|\mathbf{H}|^{op}$.

Définition 61 (hyperdoctrine de contrôle) *Soit* $\mathbf{H}$ *une hyperdoctrine, définie par sa catégorie de base* $|\mathbf{H}|$ *et son foncteur* $F : |\mathbf{H}|^{op} \to \boldsymbol{CCC}$. *On note*

$$\kappa : F(I \times U)(G_I(C), A) \to F(I)(C, \Pi_I(A))$$

la bijection associée à l'adjonction $G_I \dashv \Pi_I$.

$\mathbf{H}$ *est appelée* ***hyperdoctrine de contrôle*** *si elle satisfait les conditions suivantes :*

- *pour tout I objet de $|\mathbf{H}|$, $F(I)$ est une catégorie de contrôle*
- *les foncteurs de spécialisation sont des morphismes stricts de catégories de contrôle*
- *pour tout A objet de $F(I \times U)$, $\kappa^{-1}(id_{\Pi_I(A)})$ est un morphisme central*
- *pour A objet de $F(I \times U)$ et B objet de $F(I)$, si on pose*

$$p_{A,B} = \kappa(\kappa^{-1}(id_{\Pi_I(A)}) \parr G_I(B)) : \Pi_I(A) \parr B \to \Pi_I(A \parr G_I(B))$$

alors $p_{A,B}$ est un isomorphisme central.

Remarque : Le morphisme $p_{A,B}$ est appelé **force de quantification**. Sa naturalité en A et B découle directement de sa définition :

Lemme 23 *$p_{A,B}$ est central, et naturel en A et B.*

Démonstration : Pour la naturalité en A, supposons un morphisme $f : A \to A'$ dans $F(I \times U)$, on a :

$$\begin{aligned}
\kappa(\kappa^{-1}(id_{Pi_I(A)}) \parr G_I(B)); \Pi_I(f \parr G_I(B)) &= \kappa(\kappa^{-1}(id_{Pi_I(A)}) \parr G_I(B); f \parr G_I(B)) \\
&= \kappa(\kappa^{-1}(id_{Pi_I(A)}; \Pi_I(f)) \parr G_I(B)) \\
&= \kappa((G_I(\Pi_I(f)); \kappa^{-1}(id_{Pi_I(A')})) \parr G_I(B)) \\
&= \kappa(G_I(\Pi_I(f) \parr B); \kappa^{-1}(id_{Pi_I(A')})) \\
&= \Pi_I(f) \parr B; \kappa(\kappa^{-1}(id_{Pi_I(A')}) \parr G_I(B))
\end{aligned}$$

Pour la naturalité en A, supposons un morphisme $f : B \to B'$ dans $F(I)$, on a :

$$\begin{aligned}
\kappa(\kappa^{-1}(id) \parr G_I(B)); \Pi_I(A \parr G_I(f)) &= \kappa(\kappa^{-1}(id) \parr G_I(B); A \parr G_I(f)) \\
&= \kappa(G_I(\Pi_I(A)) \parr G_I(f); \kappa^{-1}(id) \parr G_I(B')) \\
&= \Pi_I(A) \parr f; \kappa(\kappa^{-1}(id) \parr G_I(B'))
\end{aligned}$$

par centralité de $\kappa^{-1}(id)$. □

7.1.2 Interprétation catégorique de $\lambda\mu 2$

Dans cette section, on va donner l'interprétation catégorique du calcul $\lambda\mu 2$ et prouver la correction de cette interprétation.

Interprétation des types

Considérons donc l'hyperdoctrine de contrôle $\mathbf{H}$ décrite dans la section précédente. On commence par donner, pour chaque type A de $\lambda\mu 2$ tel que $\vec{X} \vdash A$ avec $\vec{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$, une interprétation $[\![A]\!]$ par un objet de $F(U^n)$:

$$
\begin{aligned}
[\![\bot]\!] &= \bot \\
[\![\top]\!] &= 1 \\
[\![X_i]\!] &= P_n^i \\
[\![A \times B]\!] &= [\![A]\!] \times [\![B]\!] \\
[\![A \parr B]\!] &= [\![A]\!] \parr [\![B]\!] \\
[\![A \to B]\!] &= [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \\
[\![\forall X_{n+1}.A]\!] &= \Pi_{U^n}([\![A]\!])
\end{aligned}
$$

Lemme 24 *Soient $\vec{X} = \langle X_1, \ldots, X_{n+1} \rangle$ et A, B deux types tels que $\vec{X}, X_{n+1} \Vdash A$ et $\vec{X} \Vdash B$. On note $- \mapsto (-)[I, C]$ le foncteur $F(id_I \times C)$. Alors :*

$$[\![A[B/X_{n+1}]]\!] = [\![A]\!][U^n, [\![B]\!]]$$

Démonstration : La preuve se fait par induction structurelle sur A. Comme $F(id_{U^n} \times [\![B]\!])$ est un morphisme de catégories de contrôle, les seuls cas à vérifier sont $A = \forall X_j.A'$ et $A = X_i$. Dans le premier cas on utilise la naturalité de Π_I, et dans le deuxième on peut faire une vérification directe : si $A = X_{n+1}$,

$$F(id_{U^n} \times [\![B]\!])([\![X_{n+1}]\!]) = |\mathbf{H}|(id_{U^n} \times [\![B]\!], U)(P_{n+1}^{n+1}) = [\![B]\!]$$

et si $A = X_i$ avec $1 \leq i \leq n$,

$$F(id_{U^n} \times [\![B]\!])([\![X_i]\!]) = |\mathbf{H}|(id_{U^n} \times [\![B]\!], U)(P_{n+1}^i) = \pi_n^i$$

$\square$

Interprétation des termes

Un jugement de typage de la forme

$$\Gamma = X_1, \ldots, X_n \ ; \ x_1 : B_1, \ldots, x_m : B_m \vdash t : A \mid \alpha_1 : A_1, \ldots, \alpha_p : A_p$$

sera interprété comme un morphisme

$$[\![\Gamma]\!] : [\![B_1]\!] \times \ldots [\![B_m]\!] \to [\![A]\!] \parr [\![A_1]\!] \parr \cdots \parr [\![A_p]\!]$$

dans la catégorie $F(U^n)$.

Dans ce qui suit, par souci de simplicité on écrira simplement A à la place de $[\![A]\!]$, et on note $\overline{\pi}_i : B_1 \times \cdots \times B_m \to B_i$ la projection sur B_i (obtenue en composant π_1 et π_2 un certain nombre de fois).

$$
\begin{aligned}
&[\![\vec{X};\Gamma \vdash x_i : B_i \mid \Delta]\!] &&= \Gamma \xrightarrow{\overline{\pi}_i} B_i \xrightarrow{w} B_i \parr \Delta\\
&[\![\vec{X};\Gamma \vdash \star : \top \mid \Delta]\!] &&= \Gamma \xrightarrow{\diamond} 1 \xrightarrow{\diamond'} 1 \parr \Delta\\
&[\![\vec{X};\Gamma \vdash \langle t,u\rangle : A \times B \mid \Delta]\!] &&= \Gamma \xrightarrow{([\![t]\!],[\![u]\!])} (A \parr \Delta) \times (B \parr \Delta) \xrightarrow{d} (A \times B) \parr \Delta\\
&[\![\vec{X};\Gamma \vdash \pi_1(t) : A \mid \Delta]\!] &&= \Gamma \xrightarrow{[\![t]\!]} (A \times B) \parr \Delta \xrightarrow{\pi_1 \parr \Delta} A \parr \Delta\\
&[\![\vec{X};\Gamma \vdash \pi_2(t) : B \mid \Delta]\!] &&= \Gamma \xrightarrow{[\![t]\!]} (A \times B) \parr \Delta \xrightarrow{\pi_2 \parr \Delta} B \parr \Delta\\
&[\![\vec{X};\Gamma \vdash tu : B \mid \Delta]\!] &&= \Gamma \xrightarrow{([\![t]\!],[\![u]\!])} (B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \xrightarrow{d} (B^A \times A) \parr \Delta \xrightarrow{\epsilon \parr \Delta} B \parr \Delta\\
&[\![\vec{X};\Gamma \vdash \lambda x^A.t : A \to B \mid \Delta]\!] &&= \Gamma \xrightarrow{\Lambda([\![t]\!])} (B \parr \Delta)^A \xrightarrow{s^{-1}} B^A \parr \Delta\\
&[\![\vec{X};\Gamma \vdash [\alpha_i]t : \bot \mid \alpha_i : A_i, \Delta]\!] &&= \Gamma \xrightarrow{[\![t]\!]} A_i \parr A_i \parr \Delta \xrightarrow{\nabla \parr \Delta} A_i \parr \Delta \xrightarrow{r} \bot \parr A_i \parr \Delta\\
&[\![\vec{X};\Gamma \vdash \mu\alpha^A.t : A \mid \Delta]\!] &&= \Gamma \xrightarrow{[\![t]\!]} \bot \parr A \parr \Delta \xrightarrow{r^{-1}} A \parr \Delta\\
&[\![\vec{X};\Gamma \vdash [\alpha_i,\alpha_j]t : \bot \mid \alpha_i : A_i, \alpha_j : A_j, \Delta]\!] &&= \Gamma \xrightarrow{[\![t]\!]} A_i \parr A_j \parr A_i \parr A_j \parr \Delta \xrightarrow{\nabla \parr \nabla \parr \Delta\ ;\ r} \bot \parr A_i \parr A_j \parr \Delta\\
&[\![\vec{X};\Gamma \vdash \mu(\alpha^A,\beta^B).t : A \parr B \mid \Delta]\!] &&= \Gamma \xrightarrow{[\![t]\!]} \bot \parr A \parr B \parr \Delta \xrightarrow{r^{-1}} (A \parr B) \parr \Delta\\
&[\![\vec{X};\Gamma \vdash \Lambda X.t : \forall X.A \mid \Delta]\!] &&= \Gamma \xrightarrow{\kappa([\![t]\!])} \Pi_{U^n}(A \parr G_{U^n}(\Delta)) \xrightarrow{p^{-1}} \Pi_{U^n}(A) \parr \Delta\\
&[\![\vec{X};\Gamma \vdash t\{B\} : A[B/X] \mid \Delta]\!] &&= \Gamma \xrightarrow{\kappa^{-1}([\![t]\!];p)[U^n,B]} A[U^n,B] \parr \Delta
\end{aligned}
$$

Correction de l'interprétation

Théorème 8 (correction) *L'interprétation des termes de $\lambda\mu 2$ dans une hyperdoctrine de contrôle est correcte : pour tout couple de termes (t,u) tel que $\vec{X};\Gamma \vdash t = u : A \mid \Delta$, on a $[\![\vec{X};\Gamma \vdash t : A \mid \Delta]\!] = [\![\vec{X};\Gamma \vdash u : A \mid \Delta]\!]$.*

Cela signifie que toute hyperdoctrine de contrôle **H** induit un modèle de $\lambda\mu 2$, en prenant comme objets les couples (n,A) où $n \in \mathbb{N}$ et A objet de $F(U^n)$, et comme morphismes de (n,A) dans (n,B) les morphismes $\sigma : A \to B$ dans $F(U^n)$.

Démonstration : On va faire une preuve détaillée, au sens où on vérifie que chaque équation du langage donne bien une égalité dans l'interprétation catégorique. Les équations β et μ, qui sont les plus complexes, seront traitées à la fin.

($\top$)

$$\vec{X};\Gamma \vdash t = \star : \top \mid \Delta$$

Soit $\sigma = [\![t]\!] : \Gamma \to 1 \parr \Delta$, on veut montrer que $\sigma = \diamond_\Gamma;\diamond'_\Delta$.
On a bien $\sigma = \sigma;\diamond_\Delta\diamond'_\Delta$, or $\sigma;\diamond_\Delta : \Gamma \to 1$ donc $\sigma;\diamond_\Delta = \diamond_\Gamma$ car 1 est terminal.

(π_i)

$$\vec{X};\Gamma \vdash \pi_1((t,u)) = t : A \mid \Delta$$

$$\vec{X};\Gamma \vdash \pi_2((t,u)) = u : B \mid \Delta$$

Pour π_1, l'égalité est donnée par la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "(\llbracket t\rrbracket,\llbracket u\rrbracket)"] & (A \parr \Delta) \times (B \parr \Delta) \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "id"'] & (A \times B) \parr \Delta \arrow[r, "\pi_1 \parr \Delta"] \arrow[d, "(\pi_1 \parr \Delta, \pi_2 \parr \Delta)"] & A \parr \Delta \\
& & (A \parr \Delta) \times (B \parr \Delta) \arrow[ur, "\pi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

et par $\pi_1((\llbracket t\rrbracket, \llbracket u\rrbracket)) = \llbracket t\rrbracket$

$(\times)$

$$\vec{X}; \Gamma \vdash (\pi_1(u), \pi_2(u)) = u : A \times B \mid \Delta$$

L'égalité est donnée directement par le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[rr, "(\llbracket t\rrbracket;\pi \parr \Delta\ ,\ \llbracket t\rrbracket;\pi_2 \parr \Delta)"] \arrow[dr, "\llbracket t\rrbracket"'] & & (A \parr \Delta) \times (B \parr \Delta) \arrow[r, "d"] & (A \times B) \parr \Delta \\
& (A \times B) \parr \Delta \arrow[ur, "(\pi_1 \parr \Delta, \pi_2 \parr \Delta)"'] & &
\end{tikzcd}$$

(η)

$$\vec{X}; \Gamma \vdash \lambda x^A.tx = t : A \to B \mid \Delta \qquad \text{si } x \notin FV(t)$$

On considère le séquent $\vec{X}; \Gamma, x : A \vdash t_0 : A \to B \mid \Delta$, dont la dérivation de typage est obtenue à partir de celle de $\vec{X}; \Gamma, x : A \vdash t : A \to B \mid \Delta$ en remplaçant chaque séquent $\vec{Y}; \Gamma_0 \vdash u : A_0 \mid \Delta_0$ par $\vec{Y}; \Gamma_0, x : A \vdash u : A_0 \mid \Delta_0$.
On peut facilement montrer par induction que $\llbracket t_0\rrbracket = \pi_1; \llbracket t\rrbracket$: en particulier, pour les axiomes,

$$\begin{aligned}
\llbracket \vec{X}; \Gamma, x : A \vdash x_i : B_i \mid \Delta \rrbracket &= \pi_1; \overline{\pi_i}; w \\
&= \pi_1; \llbracket \vec{X}; \Gamma \vdash x_i : B_i \mid \Delta \rrbracket
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\llbracket \vec{X}; \Gamma, x : A \vdash \star : \top \mid \Delta \rrbracket &= \diamond_{\Gamma \times A}; \diamond'_\Delta \\
&= \pi_1; \diamond_\Gamma; \diamond'_\Delta \\
&= \pi_1; \llbracket \vec{X}; \Gamma \vdash \star : \top \mid \Delta \rrbracket
\end{aligned}$$

Par ailleurs on a $\llbracket \vec{X}; \Gamma, x : A \vdash x : A \mid \Delta \rrbracket = \pi_2; w$. Il faut donc montrer que :

$$\Lambda((\pi_1; \llbracket t\rrbracket\ ,\ \pi_2; w); d; \epsilon \parr \Delta)\ ;\ s^{-1}\ =\ \llbracket t\rrbracket$$

ce qui revient à montrer la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(B \parr \Delta)^A \times A \arrow[r, "\epsilon"] & B \parr \Delta \\
\Gamma \times A \arrow[u, "(\llbracket t\rrbracket;s) \times id"] \arrow[ur, "\llbracket t\rrbracket \times w;d;\epsilon \parr \Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{tikzcd}
(B \parr \Delta)^A \times A \arrow[r, "\epsilon"] & B \parr \Delta \\
B^A \times A \arrow[u, "s\times id"] \arrow[ur, "id\times w;d;\epsilon\parr\Delta"'] & \\
\Gamma \times A \arrow[u, "[\![t]\!]\times id"] &
\end{tikzcd}$$

et c'est bien la définition de s.

(ρ)

$$\vec{X};\Gamma \vdash [\alpha']\mu\alpha^A.t = t[\alpha'/\alpha] : \bot \mid \Delta$$
$$\vec{X};\Gamma \vdash [\alpha',\beta']\mu(\alpha^A,\beta^B).t = t[\alpha'/\alpha,\beta'/\beta] : \bot \mid \Delta$$
$$\vec{X};\Gamma \vdash [\xi]t = t : \bot \mid \Delta \qquad \text{si } \xi : \bot \in \Delta$$

Considérons la première égalité. On a $[\![[\alpha']\mu\alpha^A.t]\!] = [\![t]\!];r^{-1};\nabla;r = [\![t]\!];\nabla$ par naturalité de r.
On cherche donc à comparer $[\![t]\!]$ et $[\![t[\alpha'/\alpha]]\!]$. Pour plus de clarté, on s'autorise à noter A_α et $A_{\alpha'}$ les occurrences de A correspondant respectivement aux noms α et α'.
$[\![t]\!]$ est obtenu à partir de $[\![t[\alpha'/\alpha]]\!]$ de la manière suivante :

(i) on ajoute un affaiblissement w à chaque axiome (pour introduire la variable de nom α)

(ii) on remplace certains morphismes $A \parr A_{\alpha'} \xrightarrow{\nabla} A_{\alpha'}$ par $A_\alpha \parr A \parr A_{\alpha'} \xrightarrow{\nabla\parr A_{\alpha'}} A_\alpha \parr A_{\alpha'}$ (pour tenir compte des substitutions $[\alpha'/\alpha]$).

Par naturalité des opérations et par centralité de w et ∇, on peut déplacer ces morphismes dans $[\![t]\!];\nabla$, et en utilisant le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(A_\alpha \parr A) \parr A_{\alpha'} \arrow[r, "\nabla\parr A_{\alpha'}"] \arrow[dd, "a"'] & A_\alpha \parr A_{\alpha'} \arrow[dr, "\nabla"] & \\
& & A_{\alpha'} \\
A_\alpha \parr (A \parr A_{\alpha'}) \arrow[r, "A_\alpha\parr\nabla"] & A \parr A_{\alpha'} \arrow[ur, "\nabla"] &
\end{tikzcd}$$

on élimine les transformations correspondant à (ii) et on se ramène à :

$$\begin{aligned}
[\![t[\alpha']\mu\alpha^A.t]\!] &= [\![t[\alpha'/\alpha]]\!];w;\nabla \\
&= [\![t[\alpha'/\alpha]]\!]
\end{aligned}$$

La deuxième égalité se montre de la même manière. Quant à la dernière, il suffit de voir que $\llbracket [\xi]t \rrbracket = \llbracket t \rrbracket ; \nabla_{\perp} ; r = \llbracket t \rrbracket$ grâce au diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\perp \parr \perp \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "r^{-1}"'] & \perp \parr \perp \arrow[d, "\nabla"'] \\
& \perp
\end{tikzcd}$$

(θ)

$$\vec{X}; \Gamma \vdash \mu\alpha^{A}.[\alpha]t = t : A \mid \Delta \qquad \text{si } \alpha \notin FV(t)$$
$$\vec{X}; \Gamma \vdash \mu(\alpha^{A}, \beta^{B}).[\alpha, \beta]t = t : A \parr B \mid \Delta \qquad \text{si } \alpha, \beta \notin FV(t)$$

Considérons la première égalité. $\llbracket \mu\alpha^{A}.[\alpha]t \rrbracket = \gamma ; \nabla ; r ; r^{-1} = \gamma ; \nabla$ où γ est obtenu à partir de $\llbracket t \rrbracket$ en ajoutant un affaiblissement w à chaque axiome (pour introduire la variable de nom α). Par naturalité des opérations et par centralité de w on peut faire remonter ce morphisme, et on obtient alors :

$$\llbracket \mu\alpha^{A}.[\alpha]t \rrbracket = \llbracket t \rrbracket ; w ; \nabla = \llbracket t \rrbracket$$

L'autre égalité se montre de la même manière.

$(\beta 2)$

$$\vec{X}; \Gamma \vdash (\Lambda X.t)\{B\} = t[B/X] : A[B/X] \mid \Delta$$

On a $\llbracket (\Lambda X_{n+1}.t)\{B\} \rrbracket = \llbracket t \rrbracket [U^{n}, B]$. Il faut donc prouver par induction sur t que

$$\llbracket t \rrbracket [U^{n}, B] = \llbracket t[B/X_{n+1}] \rrbracket$$

On sait que $F(id_{U^{n}} \times B)$ est un morphisme strict de catégories de contrôle, donc il commute bien à toutes les opérations spécifiques aux catégories de contrôle : par exemple,

$$((\llbracket t' \rrbracket, \llbracket u' \rrbracket) ; d ; \epsilon \parr \Delta)[U^{n}, B] = (\llbracket t \rrbracket [U^{n}, B], \llbracket u \rrbracket [U^{n}, B]) ; d ; \epsilon \parr \Delta$$

et aussi

$$(\Lambda(\llbracket t \rrbracket) ; s^{-1})[U^{n}, B] = \Lambda(\llbracket t \rrbracket [U^{n}, B]) ; s^{-1}$$

car on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(C[U^{n}, B] \parr \Delta[U^{n}, B])^{A[U^{n}, B]} \times A[U^{n}, B] \arrow[r, "\epsilon"] & B[U^{n}, B] \parr \Delta[U^{n}, B] \\
\Gamma[U^{n}, B] \times A[U^{n}, B] \arrow[u, "\Lambda(\llbracket t \rrbracket)[U^{n}, B] \times id"] \arrow[ur, "\llbracket t \rrbracket [U^{n}, B]"'] &
\end{tikzcd}$$

qui montre que $\Lambda(\llbracket t \rrbracket)[U^{n}, B] = \Lambda(\llbracket t \rrbracket [U^{n}, B])$.
Il reste deux équations dont on doit prouver la commutation avec $- \mapsto (-)[U^{n}, B]$). Pour cela, il nous faut d'abord prouver que κ et κ^{-1} commutent bien avec ce

foncteur. C'est là qu'on utilise la deuxième condition de Beck-Chevalley : pour tout $\vec{C} : m \to n$ dans $|\mathbf{H}|$,

$$F(\vec{C})(\kappa^{-1}(id)) = \kappa^{-1}(id)$$

On en tire :

$$\begin{aligned} F(\vec{C} \times id_U)(\kappa^{-1}(\sigma; id)) &= F(\vec{C} \times id_U)(G_{U^n}(\sigma); \kappa^{-1}(id)) \\ &= G_{U^m}(F(\vec{C})(\sigma)); \kappa^{-1}(id) \\ &= \kappa^{-1}(F(\vec{C})(\sigma)) \end{aligned}$$

ce qui implique aussi $F(\vec{C})(\kappa(\sigma)) = \kappa(F(\vec{C} \times id_U)(\sigma))$.
Comme $p_{A,B} = \kappa(\kappa^{-1}(id_{\Pi_I(A)}) \parr G_I(B))$, on a bien

$$(\kappa(\llbracket t \rrbracket); p^{-1})[U^n, B] = \kappa(\llbracket t \rrbracket[U^{n+1}, B]); p^{-1})$$

Enfin,

$$\begin{aligned} (\kappa^{-1}(\llbracket t \rrbracket, p)[U^n, C])[U^n, B] &= (\kappa^{-1}(\llbracket t \rrbracket, p)[U^{n+1}, B])[U^n, C[B/X_{n+1}]] \\ &= \kappa^{-1}(\llbracket t \rrbracket[U^n, B], p)[U^n, C[B/X_{n+1}]] \end{aligned}$$

$(\eta 2)$

$$\vec{X}; \Gamma \vdash \Lambda X.t\{X\} = t : A \mid \Delta \qquad \text{si } X \notin FTV(t)$$

Il suffit de remarquer que $\kappa(\kappa^{-1}(\llbracket t \rrbracket; p))[U^n, U]; p^{-1} = \llbracket t \rrbracket$.

(β)

$$\vec{X}; \Gamma \vdash (\lambda x^A.t)u = t[u/x] : B \mid \Delta$$

On définit la **distributivité linéaire** $ld : A \times (B \parr C) \xrightarrow{w \times id} (A \parr C) \times (B \parr C) \xrightarrow{d} (A \times B) \parr C$.

Montrons tout d'abord la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "(\Lambda(\llbracket t \rrbracket); s^{-1}, \llbracket u \rrbracket)"] \arrow[d, "(id,id)"'] & (B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "d"] & (B^A) \parr \Delta \arrow[r, "\epsilon \parr \Delta"] & B \parr \Delta \\ \Gamma \times \Gamma \arrow[r, "id \times \llbracket u \rrbracket"] & \Gamma \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "ld"] & (\Gamma \times A) \parr \Delta \arrow[r, "t \parr \Delta"] & B \parr \Delta \parr \Delta \arrow[u, "B \parr \nabla"'] \end{tikzcd} \qquad (\star)$$

Comme on a $(\Lambda(\llbracket t \rrbracket); s^{-1}, \llbracket u \rrbracket) = (id, id); id \times \llbracket u \rrbracket; \Lambda(\llbracket t \rrbracket) \times id; id \times \llbracket u \rrbracket$, cela nous ramène à :

$$\begin{tikzcd} \Gamma \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "\Lambda(\llbracket t \rrbracket) \times id"] \arrow[dr, "ld"'] & (B \parr \Delta)^A \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "s^{-1} \times id"] & (B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "d"] & (B^A \times A) \parr \Delta \arrow[d, "\epsilon \parr \Delta"] \\ & (\Gamma \times A) \parr \Delta \arrow[r, "t \parr \Delta"] & B \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "B \parr \nabla"] & B \parr \Delta \end{tikzcd}$$

On décompose ce diagramme en plusieurs parties :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "\Lambda(\llbracket t \rrbracket)\times id"] \arrow[dr, "ld"'] & (B \parr \Delta)^A \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "s^{-1}\times id"] \arrow[dr, "ld"] & (B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "d"] & (B^A \times A) \parr \Delta \arrow[dd, "\epsilon \parr \Delta"] \\
 & (\Gamma \times A) \parr \Delta \arrow[r, "(\Lambda(\llbracket t \rrbracket)\times id)\parr\Delta"] \arrow[dr, "t \parr \Delta"'] & ((B \parr \Delta)^A \times A) \parr \Delta \arrow[d, "\epsilon \parr \Delta"] & \\
 & & B \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "B \parr \nabla"] & B \parr \Delta
\end{tikzcd}$$

Les deux sous-diagrammes de gauche commutent, l'un par naturalité de ld et l'autre par définition de l'évaluation. Le sous-diagramme de droite se ramène à :

$$\begin{tikzcd}
(B \parr \Delta)^A \times (A \parr \Delta) \arrow[d, "ld"'] & (B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[l, "s \times id"'] \arrow[r, "d"] & (B^A \times A) \parr \Delta \arrow[d, "\epsilon \parr \Delta"] \\
((B \parr \Delta)^A \times A) \parr \Delta \arrow[r, "\epsilon \parr \Delta"] & B \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "B \parr \nabla"] & B \parr \Delta
\end{tikzcd}$$

Pour prouver la commutation de ce diagramme, on note tout d'abord que l'on a, par naturalité de w :

$$\begin{tikzcd}
(B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\pi_1"'] & ((B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta)) \parr \Delta \arrow[d, "\pi_1 \parr \Delta"] \\
B^A \parr \Delta \arrow[r, "w"'] & B^A \parr \Delta \parr \Delta
\end{tikzcd}$$

et le même diagramme pour π_2, d'où, puisque $d^{-1} = (\pi_1 \parr \Delta, \pi_2 \parr \Delta)$:

$$\begin{tikzcd}
(B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "w \times w"] \arrow[dr, "w"'] & (B^A \parr \Delta \parr \Delta) \times (A \parr \Delta \parr \Delta) \arrow[d, "d"] \\
 & ((B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta)) \parr \Delta
\end{tikzcd}$$

On a donc

$$\begin{tikzcd}
(B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "w \times id"] \arrow[ddr, bend right, "w"'] & (B^A \parr \Delta \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "id \times w"] & ((B^A \parr \Delta) \times A) \parr \Delta \arrow[ddl, bend left, "(id \times w) \parr \Delta"] \\
 & (B^A \parr \Delta \parr \Delta) \times (A \parr \Delta \parr \Delta) \arrow[d, "d"] & \\
 & ((B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta)) \parr \Delta &
\end{tikzcd}$$

par naturalité de d. Comme $ld = w \times id; d$, on a :

$$\begin{tikzcd}
(B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "ld"] \arrow[d, "d"'] \arrow[dr, "w"] & ((B^A \parr \Delta) \times A) \parr \Delta \arrow[d, "(id \times w) \parr \Delta"] \\
(B^A \times A) \parr \Delta \arrow[d, "\epsilon \parr \Delta"'] & ((B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta)) \parr \Delta \arrow[d, "d \parr \Delta"] \\
B \parr \Delta \arrow[dr, "w"'] & (B^A \times A) \parr \Delta \parr \Delta \arrow[d, "\epsilon \parr \Delta \parr \Delta"] \\
& B \parr \Delta \parr \Delta
\end{tikzcd}$$

par naturalité de w, ce qui peut se réécrire de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
(B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "ld"] \arrow[d, "d"'] & ((B^A \parr \Delta) \times A) \parr \Delta \arrow[d, "(s \times id) \parr \Delta"] \\
(B^A \times A) \parr \Delta \arrow[d, "\epsilon \parr \Delta"'] & ((B \parr \Delta)^A \times A) \parr \Delta \arrow[d, "\epsilon \parr \Delta"] \\
B \parr \Delta & B \parr \Delta \parr \Delta \arrow[l, "B \parr \nabla"]
\end{tikzcd}$$

par définition de s et puisque $B \parr \nabla; w = id$. Finalement, grâce à la naturalité de ld, cela nous donne bien :

$$\begin{tikzcd}
(B \parr \Delta)^A \times (A \parr \Delta) \arrow[dd, "ld"'] & (B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[l, "s \times id"'] \arrow[r, "d"] \arrow[d, "ld"'] & (B^A \times A) \parr \Delta \arrow[dd, "\epsilon \parr \Delta"] \\
& ((B^A \parr \Delta) \times A) \parr \Delta \arrow[dl, "(s \times id) \parr \Delta"'] & \\
((B \parr \Delta)^A \times A) \parr \Delta \arrow[r, "\epsilon \parr \Delta"] & B \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "B \parr \nabla"] & B \parr \Delta
\end{tikzcd}$$

On a donc prouvé la commutation du diagramme ($\star$). Il nous faut maintenant prouver la loi de substitution suivante :

$$\Gamma \xrightarrow{(id, [\![u]\!])} \Gamma \times (A \parr \Delta) \xrightarrow{ld} (\Gamma \times A) \parr \Delta \xrightarrow{[\![t]\!] \parr \Delta} B \parr \Delta \parr \Delta \xrightarrow{B \parr \nabla} B \parr \Delta = [\![t[u/x]]\!]$$

On le fait par induction sur t :

– si $t = x$:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "{(id,[\![u]\!])}"] & \Gamma \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "ld"] \arrow[dr, "w\times id"'] & (\Gamma \times A) \parr \Delta \arrow[r, "\pi_2 \parr \Delta"] \arrow[d, "{(\pi_1 \parr \Delta, \pi_2 \parr \Delta)}"] & A \parr \Delta \arrow[r, "w \parr \Delta"] & A \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "A \parr \nabla"] & A \parr \Delta \\
& & (\Gamma \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[urrr, "\pi_2"'] & & &
\end{tikzcd}$$

– si $t = y$ avec $x \neq y$:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "{(id,[\![u]\!])}"] & \Gamma \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "ld"] \arrow[dr, "w\times id"'] & (\Gamma \times A) \parr \Delta \arrow[r, "\pi_1 \parr \Delta"] \arrow[d, "{(\pi_1 \parr \Delta, \pi_2 \parr \Delta)}"] & \Gamma \parr \Delta \arrow[r, "\overline{\pi_i} \parr \Delta"] & B \parr \Delta \arrow[r, "w \parr \Delta"] & B \parr \Delta \parr \Delta \arrow[d, "B \parr \nabla"] \\
& & (\Gamma \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[ur, "\pi_1"'] & & & B \parr \Delta
\end{tikzcd}$$

et par ailleurs $\overline{\pi_i}$ commute avec w par naturalité de π_1 et π_2

– si $t = \star$:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "{(id,[\![u]\!])}"] \arrow[drrr, "\diamond"'] & \Gamma \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "ld"] & (\Gamma \times A) \parr \Delta \arrow[r, "\diamond' \parr \Delta"] & 1 \parr \Delta \arrow[r, "w \parr \Delta"] & 1 \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "1 \parr \nabla"] & 1 \parr \Delta \\
& & & 1 \arrow[u, "\diamond'"] \arrow[urr, "\diamond'"'] & &
\end{tikzcd}$$

– si $t = \langle t_1, t_2 \rangle$:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "{(id,[\![u]\!]);ld}"] \arrow[drr, "{((id,[\![u]\!]);ld;t_1 \parr \Delta,(id,[\![u]\!]);ld;t_2 \parr \Delta)}"'] & (\Gamma \times A) \parr \Delta \arrow[r, "{([\![t_1]\!],[\![t_2]\!]) \parr \Delta}"] & ((B_1 \parr \Delta) \times (B_2 \parr \Delta)) \parr \Delta \arrow[r, "d \parr \Delta"] \arrow[d, "{(\pi_1 \parr \Delta, \pi_2 \parr \Delta)}"] & (B_1 \times B_2) \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "(B_1 \times B_2) \parr \nabla"] & (B_1 \times B_2) \parr \Delta \\
& & (B_1 \parr \Delta \parr \Delta) \times (B_2 \parr \Delta \parr \Delta) \arrow[r, "(B_1 \parr \nabla)\times(B_2 \parr \nabla)"'] & (B_1 \parr \Delta) \times (B_2 \parr \Delta) \arrow[ur, "d"'] &
\end{tikzcd}$$

La commutativité du diagramme de droite peut être vérifiée en remplaçant d par son inverse et en renversant le sens des flèches correspondantes

– si $t = \pi_i$: il suffit de vérifier que $\pi_1 \parr \Delta \parr \Delta$ commute avec $B \parr \nabla$

– si $t = t_1 t_2$:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "{(id,[\![u]\!]);ld}"] \arrow[drr, "{((id,[\![u]\!]);ld;t_1 \parr \Delta,(id,[\![u]\!]);ld;t_2 \parr \Delta)}"'] & (\Gamma \times A) \parr \Delta \arrow[r, "{([\![t_1]\!],[\![t_2]\!]) \parr \Delta}"] & ((B_2^{B_1} \parr \Delta) \times (B_1 \parr \Delta)) \parr \Delta \arrow[r, "d \parr \Delta"] \arrow[d, "{(\pi_1 \parr \Delta, \pi_2 \parr \Delta)}"] & (B_2^{B_1} \times B_1) \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "\epsilon \parr \nabla"] \arrow[dr, "B \parr \nabla"] & B_2 \parr \Delta \\
& & (B_2^{B_1} \parr \Delta \parr \Delta) \times (B_1 \parr \Delta \parr \Delta) \arrow[r, "(B_2^{B_1} \parr \nabla)\times(B_1 \parr \nabla)"'] & (B_2^{B_1} \parr \Delta) \times (B_1 \parr \Delta) \arrow[r, "d"'] & (B_2^{B_1} \times B_1) \parr \Delta \arrow[u, "\epsilon \parr \Delta"']
\end{tikzcd}$$

Le diagramme de droite provient de la centralité de ∇, les deux autres se montrent comme précédemment

– si $t = \lambda y^C.t_0$:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "{(id,\llbracket u \rrbracket)}"] & \Gamma \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "ld"] & (\Gamma \times A) \parr \Delta \arrow[r, "\llbracket \Lambda(t_0) \rrbracket \parr \Delta"] \arrow[dr, "\Lambda(ld;\llbracket t_0 \rrbracket \parr \Delta)"'] & (B \parr \Delta)^C \parr \Delta \arrow[r, "s^{-1} \parr \Delta"] \arrow[d, "s"] & B^C \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "B^C \parr \nabla"] \arrow[dl, "s"] & B^C \parr \Delta \arrow[d, "s"] \\
 & & & (B \parr \Delta \parr \Delta)^C \arrow[rr, "(B \parr \nabla)^C"'] & & (B \parr \Delta)^C
\end{tikzcd}$$

Le diagramme de droite provient de la naturalité et celui du milieu est une propriété de s prouvée dans [Sel01]. Quant à celui de gauche, il provient de la curryfication du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(\Gamma \times A) \parr \Delta \arrow[r, "(\llbracket \Lambda(t_0) \rrbracket \parr \Delta) \times C"] \arrow[d, "ld"'] & ((B \parr \Delta)^C \parr \Delta) \times C \arrow[d, "ld"] \\
(\Gamma \times A \times C) \parr \Delta \arrow[r, "(\llbracket \Lambda(t_0) \rrbracket \times C) \parr \Delta"] \arrow[dr, "\llbracket t_0 \rrbracket \parr \Delta"'] & ((B \parr \Delta)^C \times C) \parr \Delta \arrow[d, "\epsilon \parr \Delta"] \\
 & B \parr \Delta \parr \Delta
\end{tikzcd}$$

En utilisant le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \times (A \parr \Delta) \times C \arrow[r, "ld \times C"] \arrow[d, "\simeq"'] & ((\Gamma \times A) \parr \Delta) \times C \arrow[r, "ld"] & (\Gamma \times A \times C) \parr \Delta \\
\Gamma \times C \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "ld"'] & (\Gamma \times C \times A) \parr \Delta \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

on peut alors tout curryfier, et on obtient :

$(id, \llbracket u \rrbracket); ld; \llbracket \Lambda(t_0) \rrbracket \parr \Delta; s^{-1} \parr \Delta; B \parr \nabla = \Lambda((id, \llbracket u_0 \rrbracket); ld; \llbracket t_0 \rrbracket \parr \Delta; B \parr \nabla); s^{-1}$

où $\vec{X}; \Gamma, y : C \vdash u_0 : A \mid \Delta$ est obtenu à partir de $\vec{X}; \Gamma \vdash u : A \mid \Delta$ en affaiblissant le contexte.

– si $t = [\alpha]t_0$:

$$\begin{tikzcd}
(\Gamma \times A) \parr \Delta \arrow[r, "\llbracket t_0 \rrbracket \parr \Delta"] & B \parr B \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "\nabla \parr \Delta \parr \Delta"] \arrow[d, "B \parr B \parr \nabla"'] & B \parr \Delta \arrow[r, "r"] \arrow[d, "B \parr \nabla"'] & \perp \parr B \parr \Delta \arrow[d, "\perp \parr B \parr \Delta"] \\
 & B \parr B \parr \Delta \arrow[r, "\nabla \parr \Delta"'] & B \parr \Delta \arrow[r, "r"'] & \perp \parr B \parr \Delta
\end{tikzcd}$$

par naturalité et centralité.

– si $t = \mu\alpha^A.t_0$, il suffit de vérifier la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\perp \parr A \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "r^{-1} \parr \Delta"] \arrow[d, "\perp \parr A \parr \Delta"'] & A \parr \Delta \parr \Delta \arrow[d, "A \parr \nabla"] \\
\perp \parr A \parr \Delta \arrow[r, "r^{-1}"'] & A \parr \Delta
\end{tikzcd}$$

– si $t = [\alpha, \beta]t_0$ ou $t = \mu(\alpha^A, \beta^B).t_0$ la preuve est la même que ci-dessus
– si $t = \Lambda X_{n+1}.t_0$, la définition de $p_{A,B}$ implique directement les deux résultats suivants :
$$\kappa(f) \parr \Delta; p = \kappa(f \parr \Delta)$$
et
$$\begin{tikzcd}
\Pi_I(A \parr \Delta) \parr \Delta \arrow[r, "p^{-1} \parr \Delta"] \arrow[d, "p"'] & \Pi_I(A) \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "B \parr \nabla"] & \Pi_I(A) \parr \Delta \\
\Pi_I(A \parr \Delta \parr \Delta) \arrow[r, "\Pi_I(A \parr \Delta)"'] & \Pi_I(A \parr \Delta) \arrow[ur, "p^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$
Donc, si $I = U^n$ et $h = (id, [\![u]\!]); ld; \kappa([\![t_0]\!]) \parr \Delta; p^{-1} \parr \Delta; B \parr \Delta$, on a
$$\begin{array}{rcl}
h & = & (id, [\![u]\!]); ld; \kappa([\![t_0]\!] \parr G_I(\Delta)); p^{-1}; p^{-1} \parr \Delta; B \parr \Delta \\
& = & (id, [\![u]\!]); ld; \kappa([\![t_0]\!] \parr G_I(\Delta)); \Pi_I(B \parr \Delta); p^{-1} \\
& = & \kappa(G_I((id, [\![u]\!])); G_I(ld); [\![t_0]\!] \parr G_I(\Delta); B \parr \Delta); p^{-1} \\
& = & \kappa((id, G_I([\![u]\!])); ld; [\![t_0]\!] \parr G_I(\Delta); B \parr \Delta); p^{-1}
\end{array}$$
et $G_I([\![u]\!]) = [\![u_0]\!]$ où $\vec{X}, X_{n+1}; \Gamma, y : C \vdash u_0 : A \mid \Delta$ est obtenu à partir de $\vec{X}; \Gamma \vdash u : A \mid \Delta$ en modifiant le contexte des variables de type
– si $t = t_0\{C/X_{n+1}\}$: soit $h = (id, G_I([\![u]\!])); ld; \kappa^{-1}([\![t_0]\!]; p)[U^n, C] \parr \Delta; B \parr \Delta$, on a
$$\begin{array}{rcl}
h & = & (G_I((id, [\![u]\!])); G_I(ld); \kappa^{-1}([\![t_0]\!]; p) \parr \Delta; B \parr \Delta)[U^n, C] \\
& = & (G_I((id, [\![u]\!])); G_I(ld); \kappa^{-1}(([\![t_0]\!]; p) \parr \Delta; p); B \parr \Delta)[U^n, C] \\
& = & \kappa^{-1}((id, [\![u]\!]); ld; [\![t_0]\!] \parr \Delta; p \parr \Delta; p; \Pi_I(B \parr \Delta))[U^n, C] \\
& = & \kappa^{-1}((id, [\![u]\!]); ld; [\![t_0]\!] \parr \Delta; B \parr \Delta; p)[U^n, C]
\end{array}$$

(μ)

$$\vec{X}; \Gamma \vdash (\mu\alpha^{A \to B}.t)u = \mu\beta^B.t[[\beta](-)u/[\alpha](-)] : B \qquad \text{si } \beta \notin FN(t, u)$$
$$\vec{X}; \Gamma \vdash \pi_i(\mu\alpha^{A_1 \times A_2}.t) = \mu\beta^{A_i}.t[[\beta]\pi_i(-)/[\alpha](-)] : A_i \qquad \text{si } \beta \notin FN(t)$$
$$\vec{X}; \Gamma \vdash [\beta, \gamma](\mu\alpha^{A \parr B}.t) = t[[\beta, \gamma](-)/[\alpha](-)] : \bot$$
$$\vec{X}; \Gamma \vdash (\mu\alpha^{\forall X.A}.t)\{B\} = \mu\beta^{A[B/X]}.t[[\beta](-)\{B\}/[\alpha](-)] : A[B/X] \qquad \text{si } \beta \notin FN(t)$$

On commence par la première égalité, la règle $(\mu^{\to})$. On va prouver par induction sur t l'égalité suivante :

$$\Gamma \xrightarrow{([\![t]\!],[\![u]\!])} (C \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \xrightarrow{d; ld \parr \Delta} (B^A \times A) \parr C \parr \Delta \xrightarrow{\epsilon \parr id} B \parr C \parr \Delta = [\![t[[\beta](-)u/[\alpha](-)]]\!]$$

Cependant, avant de commencer l'induction, on va montrer la propriété suivante :

$$g_1 = \Gamma \times \Gamma \xrightarrow{[\![t]\!] \times [\![u]\!]} (B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \xrightarrow{d} (B^A \times A) \parr \Delta \xrightarrow{\epsilon \parr \Delta} B \parr \Delta$$

est la décurryfication de

$$g_2 = \Gamma \xrightarrow{\llbracket t \rrbracket} B^A \parr \Delta \xrightarrow{h_{\llbracket u \rrbracket} \parr \Delta} B^\Gamma \parr \Delta \parr \Delta \xrightarrow{B^\Gamma \parr \nabla} B^\Gamma \parr \Delta \xrightarrow{s} (B \parr \Delta)^\Gamma$$

où $h_f = B^A \xrightarrow{\rho} (B \parr \Delta)^{A \parr \Delta} \xrightarrow{(B \parr \Delta)^f} (B \parr \Delta)^\Gamma \xrightarrow{s^{-1}} B^\Gamma \parr \Delta$ pour $f : \gamma \to A \parr \Delta$ et $\rho : B^A \xrightarrow{\rho} (B \parr \Delta)^{A \parr \Delta}$ est un morphisme étudié dans [Sel01][1] et défini comme la curryfication de

$$B^A \times (A \parr \Delta) \xrightarrow{w \times (A \parr \Delta} (B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \xrightarrow{d} (B^A \times A) \parr \Delta \xrightarrow{\epsilon \parr \Delta} B \parr \Delta$$

Pour prouver cette propriété, on part du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "\llbracket t \rrbracket"] & B^A \parr \delta \arrow[r, "h_{\llbracket u \rrbracket} \parr \Delta"] \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "\rho \parr \Delta"'] & B^\Gamma \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "B^\Gamma \parr \nabla"] \arrow[dr, "s"] & B^\Gamma \parr \Delta \arrow[r, "s"] & (B \parr \Delta)^\Gamma \\
(B \parr \Delta)^A \arrow[dr, "\rho"'] & (B \parr \Delta)^{A \parr \Delta} \parr \Delta \arrow[r, "(A \parr \Delta)^{\llbracket u \rrbracket} \parr \Delta"] \arrow[d, "s"'] & (B \parr \Delta)^\Gamma \parr \Delta \arrow[u, "s^{-1} \parr \Delta"'] \arrow[r, "s"] & (B \parr \Delta \parr \Delta)^\Gamma \arrow[ur, "(B \parr \nabla)^\Gamma"'] & \\
& (B \parr \Delta \parr \Delta)^{A \parr \Delta} \arrow[urr, "(B \parr \Delta \parr \Delta)^{\llbracket u \rrbracket}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

où les commutations sont assurées soit par naturalité, soit par des propriétés concernant ρ et s déjà prouvées dans [Sel01].
Par décurryfication de la partie inférieure du diagramme, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Lambda^{-1}(g_2) \quad &= \quad \Gamma \times \Gamma \xrightarrow{(t;s)\times\Gamma} (B \parr \Delta)^A \times \Gamma \xrightarrow{id \times u} (B \parr \Delta)^A \times (A \parr \Delta) \\
&\quad \xrightarrow{ld} ((B \parr \Delta^A \times A) \parr \Delta \xrightarrow{\epsilon \parr \Delta} B \parr \Delta \parr \Delta \xrightarrow{B \parr \nabla} B \parr \Delta
\end{aligned}$$

Pour montrer que $\Lambda^{-1}(g_2) = g_1$, il faut donc montrer la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s \times (A \parr \Delta)"'] & (B^A \times A) \parr \Delta \arrow[r, "\epsilon \parr \Delta"] & B \parr \Delta \\
(B \parr \Delta)^A \arrow[r, "ld"'] & ((B \parr \Delta)^A \times A) \parr \Delta \arrow[r, "\epsilon \parr \Delta"'] & B \parr \Delta \parr \Delta \arrow[u, "B \parr \nabla"']
\end{tikzcd}$$

ce qui, par naturalité de ld et par définition de s, se ramène à :

$$\begin{tikzcd}
(B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "ld"'] & (B^A \times A) \parr \Delta \arrow[r, "\epsilon \parr \Delta"] & B \parr \Delta \\
((B^A \parr \Delta) \times A) \parr \Delta \arrow[r, "ld"'] & (B^A \times A) \parr \Delta \parr \Delta \arrow[u, "(B^A \times A) \parr \nabla"] \arrow[r, "\epsilon \parr \Delta \parr \Delta"'] & B \parr \Delta \parr \Delta \arrow[u, "B \parr \Delta"']
\end{tikzcd}$$

[1] Ce morphisme est noté $p_{A,B,C}$ dans [Sel01].

La partie droite du diagramme provient de la centralité de ∇, la partie gauche se montre directement d'après la définition de *ld*.

Cette propriété nous sera très utile par la suite, car elle nous permettra d'utiliser deux résultats importants démontrés dans [Sel01] :
- pour tout morphisme $f : A \to B$, $C^f : C^B \to C^A$ est central
- tout morphisme central dans une catégorie de contrôle est focal.

On peut maintenant attaquer l'induction sur t :
- si $t = x$:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "(\overline{\pi}_i;w,f)"] \arrow[ddddr, bend right, "\overline{\pi}_i;w;r"'] & (C \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "w \parr C \parr \Delta \times id"] \arrow[d, "\simeq"] & (B^A \parr C \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[dd, "d;ld \parr \Delta"] \\
 & (\bot^1 \parr C \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[d, "d;ld \parr \Delta"] & \\
 & (\bot^1 \times A) \parr C \parr \Delta \arrow[r, "(i^\diamond \times A) \parr C \parr \Delta)"] \arrow[d, "(id \times \diamond) \parr C \parr \Delta"] & (B^A \times A) \parr C \parr \Delta \arrow[d, "\epsilon \parr C \parr \Delta"] \\
 & (\bot^1 \times 1) \parr \Delta \arrow[d, "\epsilon \parr C \parr \Delta"] & B \parr C \parr \Delta \\
 & \bot \parr C \parr \Delta \arrow[ur, "i \parr C \parr \Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

Le diagramme de gauche provient du fait que 1 est terminal. Celui en bas à droite est lié à la définition de f^g dans une catégorie cartésienne close, et celui en haut à droite provient du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\bot \arrow[rr, "ccc"] \arrow[dr, "i_{B^A}"'] & & \bot^1 \arrow[dl, "(i_B)^{\diamond A}"] \\
 & B^A &
\end{tikzcd}$$

- si $t = \star$: la preuve est la même à ceci près que $\diamond$ remplace $\overline{\pi}_i$
- si $t = \langle t_1, t_2 \rangle$: soit $\Delta' = (C_1 \times C_2) \parr \Delta'$, $\Delta_1 = C_1 \parr \Delta$ et $\Delta_2 = C_2 \parr \Delta$, on a

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "((\llbracket t_1 \rrbracket, \llbracket t_2 \rrbracket);d) \times id"] \arrow[d, "(t_1 \times id;d;ld \parr \Delta;\epsilon \parr \Delta_1, t_2 \times id;d;ld \parr \Delta;\epsilon \parr \Delta_2) \times id"] & ((C_1 \times C_2) \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "d;ld \parr \Delta"] & (B^A \times A) \parr (C_1 \times C_2) \parr \Delta \arrow[d, "\epsilon \parr \Delta'"'] \\
(C_1 \parr B \parr \Delta) \times (C_2 \parr B \parr \Delta) \arrow[rr, "d"'] & & B \parr \Delta'
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme se vérifie en postcomposant par $\pi_1 \parr B \parr \Delta$ et $\pi_2 \parr B \parr \Delta$.

– si $t = t_1 t_2$: on a

$$\begin{tikzcd}
(C^D \times D) \parr B^A \parr \Delta \arrow[r, "\epsilon \parr B^A \parr \Delta"] \arrow[d, "(\rho;(B \parr \Delta)^f) \parr id"'] & C \parr B^A \parr \Delta \arrow[r, "C \parr \rho \parr \Delta"] & C \parr (B \parr \Delta)^{A \parr \Delta} \parr \Delta \arrow[d, "(B \parr \Delta)^f \parr C \parr \Delta"] \\
(C^D \times D) \parr (B \parr \Delta)^\Gamma \parr \Delta \arrow[rr, "\epsilon \parr id"] \arrow[dr, "s"'] & & C \parr (B \parr \Delta)^\Gamma \parr \Delta \arrow[d, "s"] \\
& ((C^D \times D) \parr B \parr \Delta \parr \Delta)^\Gamma \arrow[r, "\epsilon^\Gamma"'] & (C \parr B^A \parr \Delta \parr \Delta)^\Gamma
\end{tikzcd}$$

par centralité de ρ et B^f et par naturalité de s. Donc en décurryfiant on obtient :

$$\begin{tikzcd}
((C^D \times D) \parr B^A \parr \Delta) \times \Gamma \arrow[r, "(\epsilon \parr id) \times id"] \arrow[d, "id \times f; ld; ld \parr \Delta; \epsilon \parr id"'] & (C \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[d, "id \times f; ld; ld \parr \Delta; \epsilon \parr id"] \\
(C^D \times D) \parr B^A \parr \Delta \parr \Delta \arrow[r, "\epsilon \parr id"'] & C \parr B \parr \Delta \parr \Delta
\end{tikzcd}$$

et on conclut en utilisant le cas précédent (où t est un produit)

– si $t = \pi_1(t_0)$ ou $t = \pi_2(t_0)$ ou $t = [\gamma]t_0$ ou $t = [\gamma, \delta]t_0$ ou $t = \mu\gamma^C.t_0$ ou $t = \mu(\gamma^C, \delta^D).t_0$ avec $\gamma \neq \alpha$ et $\delta \neq \alpha$: à chaque fois il s'agit de postcomposer $[\![t_0]\!]$ avec un morphisme central, donc la récurrence passe trivialement

– si $t = \lambda x.t_0$: notons $v = [\![t_0]\!]$ et $z_K = d; ld \parr \Delta; \epsilon \parr K \parr \Delta : (K \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \to K \parr B \parr \Delta$, on veut montrer que si

$$g_1 = \Gamma \times \Gamma \xrightarrow{\Lambda(v) \times id} (C \parr B^A \parr \Delta)^D \times \Gamma \xrightarrow{s^{-1} \times f} (C^D \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \xrightarrow{z} C^D \parr B \parr \Delta$$

alors $g_1 = \Lambda(g_2); s^{-1}$ où

$$g_2 = \Gamma \times \Gamma \times D \xrightarrow{v \times f} (C \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \xrightarrow{d; ld \parr \Delta; \epsilon \parr id} C \parr B \parr \Delta$$

Or

$$\begin{aligned}
\lambda(g_2) \quad = \quad & \Gamma \times \Gamma \xrightarrow{\Lambda(v) \times id} (C \parr B^A \parr \Delta)^D \times \Gamma \xrightarrow{id \times \tau; \sigma} ((C \parr B^A \parr \Delta) \times \Gamma)^D \\
& \xrightarrow{(id \times f)^D} ((C \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta))^D \xrightarrow{z^D} (C \parr B \parr \Delta)^D
\end{aligned}$$

où $\tau : \Gamma \to \Gamma^D$ et $\sigma : A_1^D \times A_2^D \to (A_1 \times A_2)^D$ sont deux morphismes donnés par la structure cartésienne close. Il faut donc montrer :

$$\begin{tikzcd}
(C^D \parr B^A \parr \Delta) \times \Gamma \arrow[r, "id \times f"] \arrow[d, "s \times id"'] & (C^D \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "z"] & C^D \parr B \parr \Delta \arrow[r, "s"] & (C \parr B \parr \Delta)^D \\
(C \parr B^A \parr \Delta)^D \times \Gamma \arrow[r, "id \times \tau; \sigma"'] & ((C \parr B^A \parr \Delta) \times \Gamma)^D \arrow[r, "(id \times f)^D"'] & ((C \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta))^D \arrow[ur, "z^D"'] &
\end{tikzcd}$$

soit, en décurryfiant et en utilisant la naturalité de ld :

$$
\begin{tikzcd}
D \times (C^D \parr B^A \parr \Delta) \times \Gamma \arrow[r, "id\times f"] \arrow[dd, "id\times\tau"'] \arrow[ddrr, "(ld;\epsilon\parr id)\times\Gamma"] & D \times (C^D \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "id\times z"] & D \times (C^D \parr B \parr \Delta) \arrow[r, "ld"] & (D \times C^D) \parr B \parr \Delta \arrow[d, "\epsilon\parr id"] \\
 & & & C \parr B \parr \Delta \\
D \times (C \parr B^A \parr \Delta)^D \times \Gamma^D \arrow[r, "\Delta_D\times id"'] & D \times D \times (C \parr B^A \parr \Delta)^D \times \Gamma^D \arrow[r, "\epsilon\times\epsilon"'] & (C \parr B^A \parr \Delta) \times \Gamma \arrow[r, "id\times f"'] & (C \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[u, "z"']
\end{tikzcd}
$$

où le diagramme de gauche provient de la définition de s et des propriétés des catégories cartésiennes closes. Quant au diagramme de droite, on peut le réécrire en :

$$
\begin{tikzcd}
D \times (C^D \parr B^A \parr \Delta) \times \Gamma \arrow[r, "ld\times id"] \arrow[dr, "(ld;\epsilon\parr id)\times\Gamma"'] & ((D \times C^D) \parr B^A \parr \Delta) \times \Gamma \arrow[r, "id\times f"] & ((D \times C^D) \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "z"] & (D \times C^D) \parr B \parr \Delta \arrow[d, "\epsilon\parr id"] \\
 & (C \parr B^A \parr \Delta) \times \Gamma \arrow[r, "id\times f"'] & (C \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "z"] & C \parr B \parr \Delta
\end{tikzcd}
$$

et en le curryfiant on obtient, si on pose $g = p; (B \parr \Delta)^f$:

$$
\begin{tikzcd}
D \times (C^D \parr B^A \parr \Delta) \arrow[r, "ld"] \arrow[d, "ld"'] & (D \times C^D) \parr B^A \parr \Delta \arrow[r, "g\parr id"] & (B \parr \Delta)^\Gamma \parr \Delta \parr (D \times C^D) \arrow[r, "s;\nabla^\Gamma"] & (B \parr \Delta \parr (C^D \times D))^\Gamma \arrow[d, "(\epsilon\parr id)^\Gamma"] \\
(D \times C^D) \parr B^A \parr \Delta \arrow[r, "\epsilon\parr id"'] & C \parr B^A \parr \Delta \arrow[r, "g\parr id"'] & (B \parr \Delta)^\Gamma \parr C \parr \Delta \arrow[r, "s;\nabla^\Gamma"'] & (B \parr C \parr \Delta)^\Gamma
\end{tikzcd}
$$

ce qui est bien vrai par centralité de g et ∇ et par naturalité de s

– si $t = \Lambda X.t_0$:

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "\kappa(v)\times id"] \arrow[ddr, bend right, "\kappa(v\times id)"'] & \Pi_I(C \parr \Delta \parr B^A) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "p^{-1}\times id"] \arrow[d, "id\times w"'] & (\Pi_I(C) \parr \Delta \parr B^A) \times (A \parr \Delta) \arrow[r, "z"] & B \parr \Delta \parr \Pi_I(C) \arrow[dd, "p"] \\
 & \Pi_I(C \parr \Delta \parr B^A) \times (A \parr \Delta \parr \Pi_I(C)) \arrow[r, "(p^{-1};p)\times p"] & \Pi_I(C \parr \Delta \parr B^A) \times \Pi_I(A \parr \Delta \parr C) \arrow[dr, "\Pi_I(d;\epsilon\parr id)"] & \\
 & \Pi_I(C \parr \Delta \parr B^A \times (A \parr \Delta)) \arrow[rr, "\Pi_I(z)"'] & & \Pi_I(B \parr \Delta \parr C)
\end{tikzcd}
$$

avec z et v définis comme précédemment (on omet le foncteur G_I pour alléger les notations). Le diagramme en haut à droite se montre en utilisant la naturalité de p, et le diagramme en bas à gauche se ramène à :

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma \times K \arrow[r, "\kappa(v)\times id"] \arrow[d, "\kappa(v\times id)"'] & \Pi_I(E) \times K \arrow[d, "id\times(w;p)"] \\
\Pi_I(E \times K) \arrow[r, "\Pi_I(id\times w)"'] & \Pi_I(E) \times \Pi_I(D \parr K)
\end{tikzcd}
$$

Or on peut montrer d'une part $\kappa(f_1 \times f_2) = \kappa(f_1) \times \kappa(f_2)$ (c'est lié au fait que Π_1 soit un foncteur strict), et d'autre part $i; \kappa^{-1}(id) = i$ par centralité de $\kappa^{-1}(id)$ d'où $w; p = \kappa(r; (i; \kappa^{-1}(id)) \parr K) = \kappa(w)$

– si $t = t_0\{D\}$: comme $\kappa^{-1}([\![t_0]\!]; p) = G_I([\![t_0]\!]); \kappa^{-1}(p)$, la récurrence se fait trivialement par naturalité
– si $t = [\alpha]t_0$:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[d, "v"'] & & & & & (B \parr \Delta \parr \Delta)^\Gamma \\
B^A \parr B^A \parr \Delta \arrow[r, "\nabla \parr \Delta"] \arrow[drr, "\rho \parr \rho \parr \Delta"'] & B^A \parr \delta \arrow[rr, "\rho \parr \Delta"] & & (B \parr \Delta)^{A \parr \Delta} \parr \Delta \arrow[rr, "(B \parr \Delta)^f \parr \Delta"] & & (B \parr \Delta)^\Gamma \parr \Delta \arrow[u, "s"'] \\
& & (B \parr \Delta)^{A \parr \Delta} \parr (B \parr \Delta)^{A \parr \Delta} \parr \Delta \arrow[ur, "\nabla \parr \Delta"] \arrow[rr, "(B \parr \delta)^f \parr (B \parr \delta)^f \parr \Delta"] \arrow[dr, "s \parr \Delta; (s)^{A \parr \Delta} \parr \Delta"'] & & (B \parr \Delta)^\Gamma \parr (B \parr \Delta)^\Gamma \parr \Delta \arrow[ur, "\nabla \parr \Delta"] \arrow[r, "s \parr \Delta; s^\Gamma \parr \Delta"] & (B \parr \Delta \parr B \parr \Delta)^{\Gamma \times \Gamma} \parr \Delta \arrow[u, "\nabla^{\Delta_\Gamma} \parr \Delta"'] \\
& & & (B \parr \Delta \parr B \parr \Delta)^{(A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta)} \parr \Delta \arrow[urr, "(B \parr \Delta \parr B \parr \Delta)^{u \times u} \parr \Delta"'] & &
\end{tikzcd}$$

grâce à la centralité de $(B \parr \delta)^f$ et aux propriétés de ρ et s. La décurryfication de la partie basse du diagramme nous donne le morphisme

$$\Gamma \times \Gamma \xrightarrow{\Gamma \times \Delta_\Gamma} \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \xrightarrow{g_1} (B \parr \Delta \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \xrightarrow{g_2} B \parr B \parr \Delta \parr \Delta \parr \Delta \xrightarrow{\nabla \parr \Delta} B \parr \Delta \parr \Delta$$

avec :

$$\begin{aligned}
g_1 &= \Gamma^3 \xrightarrow{v \times u \times u} (B^A \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta)^2 \xrightarrow{ld \times id; (ld \parr id) \times id} ((B^A \times A) \parr \Delta \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \\
&\xrightarrow{(\epsilon \parr id) \times id} (B \parr \Delta \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \\
g_2 &= (B \parr \Delta \parr B^A \parr \Delta) \times (A \parr \Delta) \xrightarrow{ld; ld \parr id} (B^A \times A) \parr B \parr \Delta \parr \Delta \parr \Delta \xrightarrow{\epsilon \parr id} B \parr B \parr \Delta \parr \Delta \parr \Delta
\end{aligned}$$

et c'est bien le morphisme recherché.

Pour la règle $(\mu^\times)$, on a une simple postcomposition par $\pi_i \parr \Delta$ qui est naturel et central (donc focal), l'induction se fait donc trivialement. Pour la règle $(\mu^\parr)$ il s'agit de la naturalité et de la centralité de ∇.

Enfin, pour la règle $(\mu^\forall)$, on remarque qu'en omettant le foncteur G_I, on a :

$$\kappa^{-1}(t; p)[U^n, B] = t; \kappa^{-1}(id)[U^n, B] \parr \Delta : \Gamma \to A[B/X] \parr \Delta$$

avec $A[B/X] = A[U^n, B]$. L'induction ne pose alors aucune difficulté : le cas $t = [\alpha]t_0$ s'écrit

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "{[\![t_0]\!]}"] & \Pi_I(A) \parr \Pi_I(A) \parr \Delta \arrow[r, "\nabla \parr \Delta"] \arrow[d, "Z \parr Z \parr \Delta"'] & \Pi_I(A) \parr \Delta \arrow[d, "Z \parr \Delta"] \\
& A[B/X] \parr A[B/X] \parr \Delta \arrow[r, "\nabla \parr \Delta"] & A[B] \parr \Delta
\end{tikzcd}$$

car Z est focal, et les autres cas sont tout aussi triviaux.

□

7.2 Modèle de jeux de $\lambda\mu 2$

7.2.1 Grammaires arborescentes

Comme on l'a vu à la section 3.5, l'introduction en sémantique des jeux d'une disjonction classique est tout-à-fait possible. Étant donnés deux jeux A et B caractérisés par des ensembles de coups (resp. de coups initiaux) E_A et E_B (resp. I_A et I_B), $E_{A \parr B}$ est défini par :

$$E_{A \parr B} = (I_A \times I_B) + (E_A \backslash I_A) + (E_A \backslash I_A)$$

On a donc besoin d'une paire coups initiaux pour générer un coup initial dans ce nouveau jeu.

Dans notre formalisme du second ordre, cela va se traduire par la construction $\langle \mu, \nu \rangle$, qui réalise la paire entre les coups μ et ν. On va de plus étendre notre relation de justification de telle sorte que cette extension n'ait de sens que pour deux coups initiaux μ et ν, ce qui correspondra bien à la partie $I_A \times I_B$ dans $E_{A \parr B}$. La partie correspondant à $E_A \backslash I_A$ sera représentée par $\parr_1 \mu$ et la partie correspondant à $E_B \backslash I_B$ sera représentée par $\parr_2 \mu$.

L'introduction d'une paire de coups dans notre grammaire nécessitera bien évidemment de grosses adaptations de notre formalisme : les occurrences et les coups ne seront plus des mots, mais des arbres de symboles. Cela va imposer de redéfinir la fonction de décoration, la substitution, etc.

On considère donc un nouveau type de grammaires, que l'on appellera **grammaires arborescentes** :

$$\mu ::= \uparrow\mu \mid \ \downarrow\mu \mid \ \langle \mu, \mu \rangle \mid \ \parr_1 \mu \mid \ \parr_2 \mu \mid \ \alpha_i \mu \mid \ j \qquad (i \in I,\ j \in \mathbb{N})$$

Les coups de cette grammaire forment l'ensemble $\mathcal{M}^{\parr}$.

Dans cette grammaire, la **caractéristique** d'un coup μ est l'ensemble $\kappa_\mu \subseteq \{1, 2\}^*$ défini par induction :

- $\kappa_j = \{\epsilon\}$
- $\kappa_{\alpha\mu} = \kappa_\mu$ si $\alpha \in \{\uparrow, \downarrow, \parr_1, \parr_2\} \cup \{\alpha_i \mid \ i \in I\}$
- $\kappa_{\langle \mu, \nu \rangle} = \{1.t \mid \ t \in \kappa_\mu\} \cup \{2.t \mid \ t \in \kappa_\nu\}$

Intuitivement, si μ est vu comme un arbre, κ_μ est l'ensemble des chemins qui conduisent aux feuilles de μ.

Par la suite, on notera $\mathcal{K} = \{1, 2\}^*$.

La **linéarisation** d'un coup μ suivant $t \in \kappa_\mu$, notée $\mu|_t$, est donnée par :

- $j|_\epsilon = j$
- $(\alpha\mu)|_t = \alpha(\mu|_t)$ si $\alpha \in \{\uparrow, \downarrow, \parr_1, \parr_2\} \cup \{\alpha_i \mid \ i \in I\}$
- $\langle \mu, \nu \rangle|_{1.t} = \parr_1 \mu|_t$
- $\langle \mu, \nu \rangle|_{2.t} = \parr_2 \nu|_t$

C'est un coup de la grammaire, mais dans lequel la construction $\langle \mu, \nu \rangle$ n'intervient pas.

On redéfinit la polarité $\lambda(\mu) \in \{\mathbf{O}, \mathbf{P}\}$ sur cette grammaire :

- $\lambda(j) = \mathbf{O}$
- $\lambda(\uparrow\mu) = \lambda(\parr_1\mu) = \lambda(\parr_2\mu) = \lambda(\alpha_i\mu) = \lambda(\mu)$
- $\lambda(\downarrow\mu) = \overline{\lambda}(\mu)$
- $\lambda(\langle\mu,\nu\rangle) = \mathbf{O}$

La relation de justification, et donc l'ordre partiel, sont eux aussi redéfinis :
- $\vdash j$
- si $\vdash \mu$ alors $\vdash \alpha_i\mu$, $\vdash \uparrow\mu$ et $\uparrow\mu \vdash \downarrow\mu$
- si $\mu \vdash \mu'$ alors $\alpha_i\mu \vdash \alpha_i\mu'$, $\parr_1\mu \vdash \parr_1\mu'$, $\parr_2\mu \vdash \parr_2\mu'$, $\uparrow\mu \vdash \uparrow\mu'$ et $\downarrow\mu \vdash \downarrow\mu'$
- si $\mu \vdash \rho$ alors $\langle\mu,\nu\rangle \vdash \parr_1\rho$ et $\langle\nu,\mu\rangle \vdash \parr_2\rho$
- si $\vdash \mu$ et $\vdash \nu$ alors $\vdash \langle\mu,\nu\rangle$

On remarque qu'on ne peut jamais avoir $\rho \vdash \langle\mu,\nu\rangle$, quels que soient μ, ν et ρ. Cela signifie que les coups de la forme $\langle\mu,\nu\rangle$ avec $\nvdash \mu$ ou $\nvdash \nu$ n'auront aucun rôle à jouer dès lors qu'on parlera de suites justifiées. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on a imposé $\lambda(\langle\mu,\nu\rangle) = \mathbf{O}$ quels que soient μ et ν.

La fonction $\sharp$ de décoration devient un ensemble de fonctions $\sharp^t(\mu)$ définies pour $t \in \kappa_\mu$:
- $\sharp^0(j) = j$
- $\sharp^t(\uparrow\mu) = \sharp^t(\downarrow\mu) = \sharp^t(\parr_1\mu) = \sharp^t(\parr_2\mu) = \sharp^t(\alpha_i\mu) = \sharp^t(\mu)$
- $\sharp^{1.t}(\langle\mu,\nu\rangle) = \sharp^t(\mu)$
- $\sharp^{2.t}(\langle\mu,\nu\rangle) = \sharp^t(\nu)$

On a l'égalité : $\sharp^t(\mu) = \sharp(\mu|_t)$.

On remarque que si on note $D(\mu)$ la liste des colorations $\sharp^t(\mu)$ pour $t \in \kappa_\mu$, alors la donnée un ensemble $E \subseteq \mathcal{M}^{\parr}$, avec la polarité λ, l'ordre partiel $\vdash$ et la fonction D nous permettent de définir une $\parr$-arène au sens des jeux HO du chapitre 3.

Enfin, si $\{t_1,\ldots,t_n\} \subseteq \kappa_\mu$, l'opération de **substitution** $\mu[t_1 := \mu_1,\ldots,t_n := \mu_n]$ est définie par :
- $j[\epsilon := \mu_1] = \mu_1 \qquad j[] = j$
- $(\alpha\mu)[\mu_1,\ldots,\mu_n] = \alpha\mu[\mu_1,\ldots,\mu_n]$ si $\alpha \in \{\uparrow,\downarrow,\parr_1,\parr_2\} \cup \{\alpha_i \mid i \in I\}$
- si $\{t_1,\ldots,t_n\} = \{1.t_{i_1},\ldots,1.t_{i_p},2.t_{j_1},\ldots,2.t_{j_q}\}$ alors $\langle\mu,\nu\rangle[\mu_1,\ldots,\mu_n] = \langle\mu[t_{i_1} := \mu_{i_1},\ldots,t_{i_p} := \mu_{i_p}],\nu[t_{j_1} := \mu_{j_1},\ldots,t_{j_p} := \mu_{j_q}]\rangle$.

7.2.2 Arènes de contrôle

On définit à nouveau une grammaire d'**occurrences** :

$$a ::= \uparrow a \mid \downarrow a \mid \langle a,a\rangle \mid \parr_1 a \mid \parr_2 a \mid ra \mid la \mid \star a \mid i \qquad (i \in \mathbb{N})$$

L'ensemble de toutes les occurrences est noté $\mathbb{A}^{\parr}$. L'ensemble des occurrences obtenues sans utiliser la construction $\langle a,a'\rangle$ sera noté $\overline{\mathbb{A}}$.

Définition 62 (arène de contrôle) *Une **arène de contrôle** A est définie par un ensemble fini $\mathcal{O}_A \subseteq \mathbb{A}^{\parr}$ et une fonction de connexion $\mathcal{L}_A : \mathcal{O}_A \times \mathcal{K} \to \overline{\mathbb{A}} \cup \{\dagger\}$ tels qu'on ait les conditions suivantes :*

- $\mathcal{O}_A$ *est* ***non-ambigu*** *:* $\forall a, a' \in \mathcal{O}_A$*, si* $a \sqsubseteq^p a'$ *alors* $a = a'$
- $\mathcal{L}_A$ *est* ***valide*** *: pour tout* $a \in \mathcal{O}_A$*, pour tout* $t \in \kappa_a$*, soit* $\mathcal{L}_A(a,t) = \dagger$*, soit* $\mathcal{L}_A(a,t) = a'[\star 0] \sqsubseteq^p a|_t$ *avec* $a' \in \overline{\mathbb{A}}$
- $\mathcal{L}_A$ *est* ***liante*** *: pour tout* $a \in \mathcal{O}_A$*, si* $t \notin \kappa_a$ *ou* $\sharp^t(a) \neq 0$ *alors* $\mathcal{L}_A(a,t) = \dagger$*.*

L'ensemble des arènes de contrôle est noté $\mathcal{G}^{\parr}$*.*

Interprétation d'une formule par son arbre syntaxique

À toute formule A de $\lambda\mu 2$ on peut associer une arène de contrôle $(\mathcal{O}_A, \mathcal{L}_A)$. La construction, détaillée ci-dessous, n'est cependant pas totalement naturelle, et on lui préférera plutôt la construction inductive.

L'arbre syntaxique d'une formule A de $\lambda\mu 2$ est défini comme suit (pour tous les constructeurs autres que $\parr$, c'est la même définition qu'à la section 5.1.1) :

- $T_\top$ est l'arbre vide
- $T_\perp$ est réduit à une feuille étiquetée par 0
- T_{X_i} est réduit à une feuille étiquetée par i
- $T_{A\to B}$ est constitué d'une racine $\to$ avec pour fils deux sous-arbres T_A et T_B ; l'arête entre $\to$ et T_A (resp. T_B) est étiquetée par $\uparrow$ (resp. $\downarrow$) ; si l'un des sous-arbres est vide, l'arête étiquetée n'a pas lieur d'être
- $T_{A\times B}$ est constitué d'une racine $\times$ avec pour fils deux sous-arbres T_A et T_B ; l'arête entre $\times$ et T_A (resp. T_B) est étiquetée par l (resp. r) ; si l'un des sous-arbres est vide, l'arête étiquetée n'a pas lieu d'être
- $T_{\forall X_i.A}$ est constitué d'une racine $\forall$ avec un unique fils T, qui est obtenu à partir de T_A en reliant chaque feuille étiquetée par i à la racine, et en réétiquetant chacune de ces feuilles par 0 ; l'arête entre $\forall$ et T est étiquetée par $\star$; si T est vide, l'arête étiquetée n'a pas lieu d'être
- $T_{A\parr B}$ est constitué d'une racine $\parr$ avec pour fils deux sous-arbres T_A et T_B ; l'arête entre $\parr$ et T_A (resp. T_B) est étiquetée par $\parr_1$ (resp. $\parr_2$) ; si l'un des sous-arbres est vide, l'arête étiquetée n'a pas lieu d'être.

Les branches maximales de l'arbre sont maintenant obtenues de la façon suivante :

- on descend de la racine en notant la décoration de chaque arête qu'on rencontre, tant qu'on ne rencontre que les nœuds $\times$, $\to$ et $\forall$
- quand on rencontre un nœud $\parr$, on peut soit construire une branche maximale dans un des sous-arbres, qui contienne au moins une fois le symbole $\downarrow$, soit construire un couple $\langle a, b\rangle$ où a et b sont construits à partir de deux branches maximales dans chacun des deux sous-arbres, qui ne contiennent pas le symbole $\downarrow$, auxquelles on a retiré le symbole $\parr_1$ ou $\parr_2$; dans les deux cas, on ajoute ce qu'on a construit à la suite de ce qu'on avait déjà noté
- quand on rencontre une feuille, on note l'étiquette de cette feuille à la suite de ce qu'on avait déjà noté.

L'ensemble des branches maximales ainsi construites forme l'ensemble $\mathcal{O}_A$. Si $a \in \mathcal{O}_A$ et $t \in \kappa_a$, $\mathcal{L}_A(a,t)$ est construit de la manière suivante :

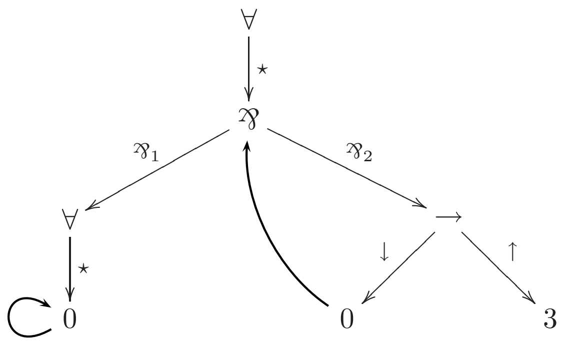
– on descend progressivement dans l'arbre en dépilant les symboles de a, jusqu'à arriver à une construction de la forme $\langle b, c\rangle$
– quand on arrive à $\langle b, c\rangle$, on continue avec b et u si $t = 1.u$ et avec c et u si $t = 2.u$
– on itère ce processus jusqu'à arriver à une feuille de l'arbre syntaxique
– si la feuille est reliée par une flèche à un nœud c, alors $\mathcal{L}_A(a, t)$ est la liste des étiquettes des arêtes présentes sur le chemin depuis la racine jusqu'à c, avec un 0 placé au bout de la liste
– dans le cas contraire, $\mathcal{L}_A(a) = \dagger$.

Enfin, si $t \notin \kappa_a$ alors $\mathcal{L}_A(a, t) = \dagger$.

Exemple : Considérons le type suivant :

$$A = \forall X_1.(\forall X_2.X_2) \parr (X_1 \to X_3)$$

Son arbre syntaxique est :



Suivant la description donnée ci-dessus, l'ensemble des branches maximales est :

$$\mathcal{O}_A = \{\star\langle\star 0, \uparrow 3\rangle, \star \parr_2 \downarrow 0\}$$

On a par ailleurs $\kappa_{\star\langle\star 0,\uparrow 3\rangle} = \{1, 2\}$ et $\kappa_{\star\parr_2\downarrow 0} = \{\epsilon\}$. La fonction de connexion est donnée par :

$$\mathcal{L}_A(\star\langle\star 0, \uparrow 3\rangle, 1) = \star \parr_1 \star 0$$
$$\mathcal{L}_A(\star\langle\star 0, \uparrow 3\rangle, 2) = \dagger$$
$$\mathcal{L}_A(\star \parr_2 \downarrow 0, \epsilon) = \star 0$$

Interprétation inductive

Une construction inductive est aussi possible, et finalement préférable dans ce cas : les constructions *atomes*, *produit* et *flèche* sur les arènes sont définies sur le même modèle que dans le chapitre 5, la construction *quantification* est redéfinie, et on ajoute la construction de **disjonction** qui correspond au $\parr$:

(atomes) $\top = (\emptyset, \emptyset)$ $\quad \bot = (\{0\}, (0, t) \mapsto \dagger)$ $\quad X_i = (\{i\}, (i, t) \mapsto \dagger)$ pour $i > 0$

(produit) si $A, B \in \mathcal{G}^{\parr}$, on définit $A \times B$ par :

- $\mathcal{O}_{A\times B} = \{la \mid \ a \in \mathcal{O}_A\} \cup \{rb \mid \ b \in \mathcal{O}_B\}$
- $\mathcal{L}_{A\times B}(la,t) = \begin{cases} \dagger & \text{si } \mathcal{L}_A(a,t) = \dagger \\ l\mathcal{L}_A(a,t) & \text{sinon} \end{cases}$

  $\mathcal{L}_{A\times B}(rb,t) = \begin{cases} \dagger & \text{si } \mathcal{L}_B(b,t) = \dagger \\ r\mathcal{L}_B(b,t) & \text{sinon} \end{cases}$

(flèche) si $A, B \in \mathcal{G}^{\parr}$, on définit $A \to B$ par :

- $\mathcal{O}_{A\to B} = \{\downarrow a \mid \ a \in \mathcal{O}_A\} \cup \{\uparrow b \mid \ b \in \mathcal{O}_B\}$
- $\mathcal{L}_{A\to B}(\downarrow a,t) = \begin{cases} \dagger & \text{si } \mathcal{L}_A(a,t) = \dagger \\ \downarrow\mathcal{L}_A(a,t) & \text{sinon} \end{cases}$

  $\mathcal{L}_{A\to B}(\uparrow b,t) = \begin{cases} \dagger & \text{si } \mathcal{L}_B(b,t) = \dagger \\ \uparrow\mathcal{L}_B(b,t) & \text{sinon} \end{cases}$

(quantification) si $A \in \mathcal{G}^{\parr}$ et $i > 0$, on définit $\forall X_i.A$ par :

- $\mathcal{O}_{\forall X_i.A} = \{\star a[t_1 := b_1, \dots, t_n := b_n] \mid \ a \in \mathcal{O}_A \wedge \kappa_a = \{t_1, \dots, t_n\} \wedge (b_k = j \text{ si } \sharp^{t_k}(a) = j \neq i) \wedge (b_k = 0 \text{ si } \sharp^{t_k}(a) = i)\}$
- $\mathcal{L}_{\forall X_i.A}(\star a[t_1 := b_1, \dots, t_n := b_n], t) = \begin{cases} \dagger & \text{si } \mathcal{L}_A(a,t) = \dagger \wedge \sharp^t(a) \neq i \\ \star 0 & \text{si } \sharp^t(a) = i \\ \star\mathcal{L}_A(a,t) & \text{sinon} \end{cases}$

(disjonction) si $A, B \in \mathcal{G}^{\parr}$, on définit $A \parr B$ par :

- $\begin{aligned} \mathcal{O}_{A\parr B} = \ & \{\langle a,b\rangle \mid \ a \in \mathcal{O}_A \wedge b \in \mathcal{O}_B \wedge \vdash a \wedge \vdash b\} \\ & \cup \{\parr_1 a \mid \ a \in \mathcal{O}_A \wedge \nvdash a\} \cup \{\parr_2 b \mid \ b \in \mathcal{O}_B \wedge \nvdash b\} \end{aligned}$
- $\mathcal{L}_{A\parr B}(\langle a,b\rangle, t) = \begin{cases} \parr_1\mathcal{L}_A(a,t') & \text{si } t = 1.t' \text{ et } \mathcal{L}_A(a,t') \neq \dagger \\ \parr_2\mathcal{L}_B(b,t') & \text{si } t = 2.t' \text{ et } \mathcal{L}_B(b,t') \neq \dagger \\ \dagger & \text{sinon} \end{cases}$

  $\mathcal{L}_{A\parr B}(\parr_1 a,t) = \begin{cases} \dagger & \text{si } \mathcal{L}_A(a,t) = \dagger \\ \parr_1\mathcal{L}_A(a,t) & \text{sinon} \end{cases}$

  $\mathcal{L}_{A\parr B}(\parr_2 b,t) = \begin{cases} \dagger & \text{si } \mathcal{L}_B(b,t) = \dagger \\ \parr_2\mathcal{L}_B(b,t) & \text{sinon} \end{cases}$

Substitution

La substitution d'arène doit aussi être redéfinie :

Définition 63 (substitution) *Soit $A, B \in \mathcal{G}^{\parr}$. La **substitution** de X_i par B dans A*

est l'arène $A[B/X_i]$ définie par :

– $$\begin{aligned}\mathcal{O}_{A[B/X_i]} = \ & \{a|_t[b] \mid \ a \in \mathcal{O}_A \wedge t \in \kappa_a \wedge \sharp^t(a) = i \wedge b \in \mathcal{O}_B \wedge \nvdash b\} \\ & \cup \{a[t_1 := b_1, \ldots, t_n := b_n] \mid \ a \in \mathcal{O}_A \wedge \kappa_a = \{t_1, \ldots, t_n\} \\ & \quad \wedge (b_k = j \ \textit{si} \ \sharp^{t_k}(a) = j \neq i) \wedge (b_k \in \mathcal{O}_B \wedge \vdash b_k \ \textit{si} \ \sharp^{t_k}(a) = i)\}\end{aligned}$$

– $$\mathcal{L}_{A[B/X_i]}(a|_u[b], t) = \begin{cases} \dagger & \textit{si } \mathcal{L}_B(b,t) = \dagger \\ a|_u[\mathcal{L}_B(b,t)] & \textit{sinon} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{A[B/X_i]}(a[t_1 := b_1, \ldots, t_n := b_n], t) = \begin{cases} \mathcal{L}_A(a,t) & \textit{si } \sharp^t(a) = j \neq i \\ a|_u[\mathcal{L}_B(b_i, v)] & \textit{si } t = u.v, \ \sharp^u(a) = i \textit{ et } \mathcal{L}_B(b_i, v) \neq \dagger \\ \dagger & \textit{sinon} \end{cases}$$

Comme cette définition est sensiblement plus sophistiquée que dans les jeux sans contrôle, on va cette fois démontrer explicitement que cette substitution correspond bien à la substitution sur les formules, par induction sur A :

– si $A = \top$ ou $A = \bot$ ou $A = X_j$ avec $j \neq i$, on a bien $A[B/X_i] = A$
– si $A = X_i$ on a

$$\mathcal{O}_{A[B/X_i]} = \{i[\epsilon := b] \mid \ b \in \mathcal{O}_B \wedge \vdash b\} \cup \{i|_\epsilon[b] \mid \ b \in \mathcal{O}_B \wedge \nvdash b\} = \mathcal{O}_B$$

et

$$\mathcal{L}_{A[B/X_i]}(b,t) = \begin{cases} i[\mathcal{L}_B(b,t)] & \text{si } \mathcal{L}_B(b,t) \neq \dagger \\ \dagger & \text{si } \mathcal{L}_B(b,t) = \dagger \end{cases}$$

donc $\mathcal{L}_{A[B/X_i]} = \mathcal{L}_B$; d'où $A[B/X_i] = B$
– si $A = A_1 \times A_2$, on voit immédiatement que

$$\mathcal{O}_{A[B/X_i]} = \{la \mid \ a \in \mathcal{O}_{A_1[B/X_i]}\} \cup \{rb \mid \ b \in \mathcal{O}_{A_2[B/X_i]}\}$$

et

$$\mathcal{L}_{A[B/X_i]}(\alpha a, t) = \begin{cases} \dagger & \text{si } \mathcal{L}_A(a,t) = \dagger \\ \alpha \mathcal{L}_A(a,t) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\alpha \in \{r, l\}$: d'où $A[B/X_i] = A_1[B/X_i] \times A_2[B/X_i]$
– si $A = A_1 \to A_2$, on montre de la même façon que $A[B/X_i] = A_1[B/X_i] \to A_2[B/X_i]$
– si $A = \forall X_j.A_0$ on impose par α-renommage que $j \neq i$ et $j \notin FTV(A)$; on a alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{A[B/X_i]} \quad = \quad & \{a|_t[b] \mid \ a \in \mathcal{O}_A \wedge t \in \kappa_a \wedge \sharp^t(a) = i \wedge b \in \mathcal{O}_B \wedge \nvdash b\} \\ & \cup \{a[t_1 := b_1, \ldots, t_n := b_n] \mid \ a \in \mathcal{O}_A \wedge \kappa_a = \{t_1, \ldots, t_n\} \\ & \quad \wedge (b_k = n \text{ si } \sharp^{t_k}(a) = n \notin \{0, i\}) \\ & \quad \wedge (b_k = 0 \text{ si } \sharp^{t_k}(a) = 0) \\ & \quad \wedge (b_k \in \mathcal{O}_B \wedge \vdash b_k \text{ si } \sharp^{t_k}(a) = i)\} \\ = \quad & \mathcal{O}_{\forall X_j.A_0[B/X_i]}\end{aligned}$$

et on peut vérifier que sur cet ensemble $\mathcal{L}_{A[B/X_i]}$ et $\mathcal{L}_{\forall X_j.A_0[B/X_i]}$ coïncident, d'où $A[B/X_i] = \forall X_j.A_0[B/X_i]$

– si $A = A_1 \parr A_2$, on a :

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{O}_{A[B/X_i]} & = & \{\parr_1 a|_u[b] \mid \ a \in \mathcal{O}_{A_1} \wedge t = 1.u \wedge u \in \kappa_a \wedge \sharp^u(a) = i \wedge b \in \mathcal{O}_B \wedge \nvdash b\} \\
& & \cup\{\parr_2 a|_u[b] \mid \ a \in \mathcal{O}_{A_2} \wedge t = 1.u \wedge u \in \kappa_a \wedge \sharp^u(a) = i \wedge b \in \mathcal{O}_B \wedge \nvdash b\} \\
& & \cup\ \{\parr_1 a[t_1 := b_1, \ldots, t_n := b_n] \mid \ a \in \mathcal{O}_{A_1} \wedge \kappa_a = \{t_1, \ldots, t_n\} \\
& & \quad \wedge(b_k = n \text{ si } \sharp^{t_k}(a) = i\}) \\
& & \quad \wedge(b_k = j \text{ si } \sharp^{t_k}(a) = j \neq i)\} \\
& & \cup\ \{\parr_2 a[t_1 := b_1, \ldots, t_n := b_n] \mid \ a \in \mathcal{O}_{A_2} \wedge \kappa_a = \{t_1, \ldots, t_n\} \\
& & \quad \wedge(b_k = n \text{ si } \sharp^{t_k}(a) = i\}) \\
& & \quad \wedge(b_k = j \text{ si } \sharp^{t_k}(a) = j \neq i)\} \\
& & \cup\ \{\langle a_1[t_1 := b_1, \ldots, t_n := b_n], a_2[u_1 := c_1, \ldots, u_n := c_n]\rangle \mid \\
& & \quad a_1 \in \mathcal{O}_{A_1} \wedge \kappa_{a_1} = \{t_1, \ldots, t_n\} \\
& & \quad \wedge a_2 \in \mathcal{O}_{A_2} \wedge \kappa_{a_2} = \{u_1, \ldots, u_n\} \\
& & \quad \wedge(b_k \in \mathcal{O}_B \wedge \vdash b_k \text{ si } \sharp^{t_k}(a_1) = i) \\
& & \quad \wedge(b_k = j \text{ si } \sharp^{t_k}(a_1) = j \neq i) \\
& & \quad \wedge(c_k \in \mathcal{O}_B \wedge \vdash c_k \text{ si } \sharp^{u_k}(a_2) = i) \\
& & \quad \wedge(c_k = j \text{ si } \sharp^{u_k}(a_2) = j \neq i)\} \\
& = & \mathcal{O}_{A_1[B/X_i] \parr A_2[B/X_i]}
\end{array}
$$

et on peut vérifier que sur cet ensemble $\mathcal{L}_{A[B/X_i]}$ et $\mathcal{L}_{A_1[B/X_i] \parr A_2[B/X_i]}$ coïncident, d'où $A[B/X_i] = A_1[B/X_i] \parr A_2[B/X_i]$.

EXEMPLE : Reprenons le type $A = \forall X_1.(\forall X_2.X_2) \parr (X_1 \to X_3)$ de l'exemple précédent. Rappelons que

$$\mathcal{O}_A = \{\star\langle\star 0, \uparrow 3\rangle, \star \parr_2 \downarrow 0\}$$

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{L}_A(\star\langle\star 0, \uparrow 3\rangle, 1) = \star \parr_1 \star 0 \\
\mathcal{L}_A(\star\langle\star 0, \uparrow 3\rangle, 2) = \dagger \\
\mathcal{L}_A(\star \parr_2 \downarrow 0, \epsilon) = \star 0
\end{array}
$$

Posons $B = \forall X_4.X_5 \to (X_4 \parr X_4)$, on a alors

$$\mathcal{O}_B = \{\star\uparrow\langle 0, 0\rangle, \star\downarrow 5\}$$

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{L}_B(\star\uparrow\langle 0, 0\rangle, 1) = \mathcal{L}_B(\star\uparrow\langle 0, 0\rangle, 2) = \star 0 \\
\mathcal{L}_B(\star\downarrow 5, \epsilon) = \dagger
\end{array}
$$

La définition de la substitution nous donne :

$$\mathcal{O}_{A[B/X_3]} = \{\star \parr_2 \downarrow 0\ ,\ \star\langle\star 0, \uparrow \star \uparrow\langle 0, 0\rangle\rangle\ ,\ \star \parr_2 \uparrow \star \downarrow 5\}$$

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{L}_{A[B/X_3]}(\star \parr_2 \downarrow 0) = \star 0 \\
\mathcal{L}_{A[B/X_3]}(\star \parr_2 \uparrow \star \downarrow 5, \epsilon) = \dagger \\
\mathcal{L}_{A[B/X_3]}(\star\langle\star 0, \uparrow \star \uparrow\langle 0, 0\rangle\rangle, 1) = \star \parr_1 \star 0 \\
\mathcal{L}_{A[B/X_3]}(\star\langle\star 0, \uparrow \star \uparrow\langle 0, 0\rangle\rangle, 2.1) = \star \parr_2 \uparrow \star 0 \\
\mathcal{L}_{A[B/X_3]}(\star\langle\star 0, \uparrow \star \uparrow\langle 0, 0\rangle\rangle, 2.2) = \star \parr_2 \uparrow \star 0
\end{array}
$$

On peut vérifier que cela nous donne bien l'arène

$$C = \forall X_1.(\forall X_2.X_2) \parr (X_1 \to (\forall X_4.X_5 \to (X_4 \parr X_4)))$$

7.2.3 Coups, parties et stratégies

On introduit une grammaire des **coups de contrôle** :

$$m ::= \uparrow m \mid \ \downarrow m \mid \ \langle m, m\rangle \mid \ \parr_1 m \mid \ \parr_2 m \mid \ rm \mid \ lm \mid \ \star^B m \mid \ i \qquad (B \in \mathcal{G}^{\parr}, i \in \mathbb{N})$$

Ces coups forment l'ensemble $\mathbb{M}^{\parr}$. L'ensemble des coups obtenus sans utiliser la construction $\langle m, m'\rangle$ sera noté $\overline{\mathbb{M}}$.

On étend la fonction d'anonymité $\mathcal{A}^{\parr} : \mathbb{M}^{\parr} \to \mathbb{A}^{\parr}$:
- $\mathcal{A}^{\parr}(i) = i$ pour $i \geq 0$
- $\mathcal{A}^{\parr}(\star^A m) = \star\mathcal{A}^{\parr}(m)$
- $\mathcal{A}^{\parr}(\beta m) = \beta\mathcal{A}^{\parr}(m)$ pour $\beta \in \{r, l, \parr_1, \parr_2, \uparrow, \downarrow\}$
- $\mathcal{A}^{\parr}(\langle m, n\rangle) = \langle\mathcal{A}^{\parr}(m), \mathcal{A}^{\parr}(n)\rangle$

et l'extraction $\frac{m}{a}$ définie partiellement pour $m \in \overline{\mathbb{M}}$, $a \in \overline{\mathbb{A}}$:
- $\frac{\star^B m}{\star 0} = B$
- si $\frac{m}{a}$ est défini, $\frac{\star^B m}{\star a} = \frac{\beta m}{\beta a} = \frac{m}{a}$ si $\beta \in \{\uparrow, \downarrow, \parr_1, \parr_2, r, l\}$.

Définition 64 (coup dans une arène de contrôle) *Soit A une arène de contrôle. Son ensemble de coups $\mathcal{M}_A \subseteq \mathbb{M}^{\parr}$ est donné par la relation $m \in \mathcal{M}_A$ définie par induction : $m \in \mathcal{M}_A$ si*
- *soit $m = m_1|_t[m_2]$ avec $\mathcal{A}^{\parr}(m_1) = a \in \mathcal{O}_A$, $t \in \kappa_a$, $\mathcal{L}_A(a,t) \neq \dagger$, $m_2 \in \mathcal{M}_B$ avec $B = \frac{m_1|_t}{\mathcal{L}_A(a,t)}$ et $\nvdash m_2$*
- *soit $m = M[t_1 := m_1, \ldots, t_n := m_n]$ avec $\mathcal{A}^{\parr}(M) = a \in \mathcal{O}_A$, $\kappa_a = \{t_1, \ldots, t_n\}$ et $\forall i \in [1, n]$:*
  si $\mathcal{L}_A(a, t_i) = \dagger$ alors $m_i = \sharp^{t_i}(a)$
  si $\mathcal{L}_A(a, t_i) \neq \dagger$ alors $m_i \in \mathcal{M}_{B_i}$ avec $B_i = \frac{M|_{t_i}}{\mathcal{L}_A(a,t_i)}$ et $\vdash m_i$.

On a bien une définition inductive sur m, car dans le cas où $m_i \in \mathcal{M}_{B_i}$ la taille de m_i est strictement plus petite que celle de m.

Exemple : Revenons au type $A = \forall X_1.(\forall X_2.X_2) \parr (X_1 \to X_3)$. Les coups de $\mathcal{M}_A$ ont une des formes suivantes :

$$\star^C \parr_1 \star^D d$$
$$\star^C \langle \star^D d_i, \uparrow 3\rangle$$
$$\star^C \parr_2 \downarrow c$$

où C et D sont des arènes de contrôle, d (resp. d_i) est un coup (resp. un coup initial) dans D et c un coup dans C.

La première forme correspond au premier cas de la définition. La deuxième forme correspond au deuxième cas. Quant à la troisième forme, elle correspond aussi bien à l'un qu'à l'autre.

Pour définir les parties et suites justifiées, on va utiliser les pointeurs de justification et pointeurs de contrôle tels qu'ils ont été introduits à la section 3.5.

Définition 65 (suite justifiée de contrôle) *Une* ***suite justifiée de contrôle*** *sur $A \in \mathcal{G}^{\parr}$ est la donnée d'une suite $s = m_1 \dots m_n$ de coups de $\mathcal{M}_A$ et de deux fonctions partielles $f : \{1, \dots, n\} \rightharpoonup \{1, \dots, n\}$ et $f^{\parr} : \{1, \dots, n\} \times \mathcal{K} \rightharpoonup \{1, \dots, n\} \times \mathcal{K}$ telles que :*
- *si $f(i)$ n'est pas défini alors $\vdash m_i$*
- *si $f(i) = j$ alors $j < i$ et $m_j \vdash m_i$*
- *si $f^{\parr}(i,t)$ est défini alors $t \in \kappa_{m_i}$ et $\sharp^t(m_i) \neq 0$*
- *si $f^{\parr}(i,t) = (j,u)$ alors $j < i$ et $\sharp^t(m_i) = \sharp^u(m_j)$.*

Définition 66 (partie de contrôle) *Une* ***partie de contrôle*** *sur $A \in \mathcal{G}^{\parr}$ est une suite justifiée $s = m_1 \dots m_n$ sur A telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$:*
- *si $\lambda(m_i) = \mathbf{P}$ alors $\lambda(m_{i+1}) = \mathbf{O}$ et, pour tout $t \in \kappa_{m_i}$ tel que $\sharp^t(m_i) \neq 0$, $f^{\parr}(i,t) = (j,u)$ avec $\lambda(m_j) = \mathbf{O}$*
- *si $\lambda(m_i) = \mathbf{O}$ alors $\lambda(m_{i+1}) = \mathbf{P}$ et, pour tout $t \in \mathcal{K}$, $f^{\parr}(i,t)$ n'est pas défini.*

L'ensemble des parties de contrôle sur A est noté $\mathcal{P}_A^{\parr}$, et le sous-ensemble de $\mathcal{P}_A^{\parr}$ constitué des parties de longueur paire est noté $\mathbb{E}_A$.

On note $\mathcal{G}^{\parr}(s)$ l'ensemble des arènes jouées dans une partie s, et $FTV(s) = \{FTV(A) \mid A \in \mathcal{G}^{\parr}(s)\}$.

Exemple : On définit une partie s sur l'arène $A = \forall X_1.(\forall X_2.X_2) \parr (X_1 \to X_3)$ par :

$$s = m_1 m_2 m_3 m_4$$

avec :

$$\begin{aligned} m_1 &= \star^{(X_4 \to \bot) \to X_4} \langle \star^{X_4} 4, \uparrow 3 \rangle \\ m_2 &= \star^{(X_4 \to \bot) \to X_4} \parr_2 \downarrow \uparrow 4 \\ m_3 &= \star^{(X_4 \to \bot) \to X_4} \parr_2 \downarrow \downarrow \uparrow 0 \\ m_4 &= \star^{(X_4 \to \bot) \to X_4} \parr_2 \downarrow \downarrow \downarrow 4 \end{aligned}$$

et

$$f(2) = 1 \qquad f(3) = 2 \qquad f(4) = 3$$
$$f^{\parr}(2, \epsilon) = (1,1) \qquad f^{\parr}(4, \epsilon) = (1,1)$$

Définition 67 (niveau) *Si un coup m dans une partie $s \in \mathcal{P}_A$ contient le symbole $\star^B$, alors il peut être écrit sous la forme $m = m_0|_t[\star^B M]$ ou $m = m_0[t_1 := m_1, \dots, t_i := \star^B M, \dots, t_n := m_n]$. On dit que B est* ***jouée par*** *$\lambda(m_0)$ au* ***niveau*** *de m si M ne contient pas le symbole $\downarrow$ (autrement dit $\vdash M$).*

Définition 68 (stratégie de contrôle) *Une **stratégie de contrôle** σ sur $A \in \mathcal{G}^{\parr}$ est un ensemble non vide de parties de contrôle sur A de longueur paire, clos par préfixe de longueur paire et déterministe : si sm et sn sont deux parties de σ alors $sm = sn$.*

On note $\sigma : A$.

Définition 69 (vue, innocence) *Soit s une partie sur $A \in \mathcal{G}^{\parr}$, on définit sa **vue** $\ulcorner s \urcorner$ par :*
- $\ulcorner \epsilon \urcorner = \epsilon$
- $\ulcorner s\mu \urcorner = \ulcorner s \urcorner \mu$ *si* $\lambda(\mu) = \mathbf{P}$
- $\ulcorner s\mu \urcorner = \mu$ *si* $\vdash \mu$
- $\ulcorner s\mu t\nu \urcorner = \ulcorner s \urcorner \mu\nu$ *si* $\lambda(\nu) = \mathbf{O}$ *et* μ *justifie* ν.

*Une stratégie de contrôle σ est dite **innocente** si, pour toute partie sn de σ, tous les pointeurs de n (pointeur de justification et pointeur de contrôle) vont dans $\ulcorner s \urcorner$, et si on a : pour tout $smn \in \sigma$, $t \in \sigma$, si tm est une partie et $\ulcorner sm \urcorner = \ulcorner tm \urcorner$ alors $tmn \in \sigma$.*

Définition 70 (bi-vue) *Une **bi-vue** sur A est une suite justifiée de contrôle telle que chaque coup de la suite est justifié par son prédécesseur.*

7.2.4 Catégorie des jeux de contrôle

Format

On définit l'ensemble des **formats** $\Xi = (\{\uparrow, \downarrow, \parr_1, \parr_2, r, l\} \cup \{\star^B\}_{B \in \mathcal{C}^{\parr}})^*$.

Soit $m \in \mathbb{M}^{\parr}$ et $\zeta \in \Xi$, on dit que m est de format ζ si $m = \zeta m'$ pour $m' \in \mathbb{M}^{\parr}$.

Soit s une suite justifiée sur $A \in \mathcal{G}^{\parr}$, et $\Sigma \subseteq \Xi$, on dit que ss est de format Σ si chaque coup de s est de format ζ pour $\zeta \in \Sigma$.

Si $\gamma_1, \delta_1, \ldots, \gamma_n, \delta_n$ sont des formats, la suite

$$s\{\delta_1(-)/\gamma_1(-), \ldots, \delta_n(-)/\gamma_n(-)\}$$

est définie comme auparavant : c'est la suite obtenue à partir de s en remplaçant les coups de la forme $\gamma_i\mu$ par $\delta_i\mu$ pour $1 \leq i \leq n$, à condition qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur les pointeurs.

Restriction

Soit s une suite justifiée sur $A \in \mathcal{G}^{\parr}$ et $\zeta \in \Xi$. On note $s\upharpoonright_\zeta$ la sous-suite de s obtenue à partir des coups de s de format ζ en effaçant ce préfixe, avec tous les pointeurs qui pointent vers un coup de format ζ.

Soit $\zeta, \xi \in \Xi$, considérons la restriction s' de s aux coups de format ζ et aux coups de format ξ héréditairement justifiés par un coup de format ζ. La suite justifiée $s\upharpoonright_{\zeta,\xi}$ est alors définie comme la suite s' où chaque préfixe ζ (resp. ξ) est remplacé par $\uparrow$ (resp. $\downarrow$), et où les pointeurs sont définis comme suit :
- si $m = \zeta m'$ (resp. $m = \xi m'$) est justifié par $m = \zeta m'$ (resp. $m = \xi m'$) dans s, alors l'occurrence correspondante de $\uparrow m'$ (resp. $\downarrow m'$) dans $s\upharpoonright_{\zeta,\xi}$ est justifiée par $\uparrow m'$ (resp. $\downarrow m'$)

– si $m = \xi m'$ est héréditairement justifié par un coup $m = \zeta m'$ dans s avec $\vdash m'$ et $\vdash m'$ (m' est alors nécessairement unique), alors l'occurrence correspondante de $\downarrow m'$ est justifiée par l'occurrence correspondante de $\uparrow m'$
– si $m = \uparrow m'$ (resp. $m = \downarrow m'$), le pointeur de contrôle de (m, t) pointe vers le coup $(\uparrow n, u)$ ou $(\downarrow n, u)$ tel que $(\zeta n, u)$ ou $(\xi n, u)$ soit le dernier couple (M, v) avec M de format ζ ou ξ qui justifie héréditairement $(\zeta m', t)$ (resp. $(\xi m', t)$) ; si un tel couple n'existe pas, (m, t) n'a pas de pointeur de contrôle.

Composition

Définition 71 (composition) *Une **séquence d'interaction** u entre A, B et C est une suite justifiée de contrôle sur $(A \to B) \to C$ qui ne contient aucun pointeur de contrôle entre A et C, et tel que $u\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$, $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow}$ et $u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow}$ soient des parties sur $A \to B$, $B \to C$ et $A \to C$ respectivement. L'ensemble des séquences d'interaction entre A, B et C est noté $\boldsymbol{Int}(A, B, C)$.*

*La **composition** entre deux stratégies de contrôle $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to C$ est l'ensemble de parties*

$$\sigma;\tau = \{u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \mid\ u \in \boldsymbol{Int}(A, B, C) \wedge u\upharpoonright_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma \wedge u\upharpoonright_{\uparrow,\downarrow\uparrow} \in \tau$$

Construction de la catégorie

L'objet de cette thèse n'étant pas l'étude des jeux avec pointeurs de contrôle, on se référera à [Lau07] pour les preuves des résultats suivants[2] :

Proposition 23 *$\sigma;\tau$ est une stratégie sur $A \to C$.*

Proposition 24 *On pose*

$$id_A = \{s \in \mathbb{E}_{A\to A} \mid\ \forall t \in \mathbb{E}_A, t \preceq s \Rightarrow t\upharpoonright_{\uparrow} = t\upharpoonright_{\downarrow}\}$$

id_A est innocente. Si $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to C$ sont innocentes, alors $\sigma;\tau$ est innocente.

Proposition 25 *Si $\sigma : A \to B$, $\tau : B \to C$ et $\rho : C \to D$ alors :*

$$(\sigma;\tau);\rho = \sigma;(\tau;\rho)$$

$$\sigma; id_B = id_A; \sigma = \sigma$$

On note $\mathcal{C}_0^{\text{⅋}}$ la catégorie définie de la manière suivante :
– les objets sont les arènes de contrôle
– un morphisme de A vers B est une stratégie de contrôle innocente avec contrôle $\sigma : A \to B$

[2]Les preuves ne sont d'ailleurs que des extensions des preuves dans le cas HO.

– l'identité sur A est $id_A : A \to A$
– la composée de $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to C$ est $\sigma;\tau : A \to C$.

On notera $\mathcal{C}_0^{\mathfrak{P}}(X_1, \ldots, X_n)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_0$ dont les objets sont les arènes A telles que

$$FTV(A) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}$$

et les morphismes de A vers B sont les stratégies innocentes de $\mathcal{C}_0(A, B)$ telles que

$$\forall sm \in \sigma,\ FTV(sm) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\} \cup FTV(s)$$

On se réfère à nouveau à [Lau07] et aux preuves des modèles HO pour le résultat suivant :

Proposition 26 *$\mathcal{C}_0^{\mathfrak{P}}$ et $\mathcal{C}_0^{\mathfrak{P}}(X_1, \ldots, X_n)$ sont des catégories cartésienne closes.*

Toutes les constructions de la structure cartésienne close sont d'ailleurs identiques à celles que l'on a définies dans le cas des jeux sans contrôle.

7.2.5 Uniformité

La définition de l'uniformité dans le cadre avec contrôle est très proche de celle que l'on a donné pour le système F à la Church. La seule différence provient du fait qu'on n'a plus $\sharp(m_{2i+1}) = \sharp(m_{2i+2})$ pour toute partie $s = m_1 \ldots m_n$, cette égalité étant remplacée par des pointeurs de contrôle qui lient un couple (m_i, t) avec $t \in \kappa_{m_i}$ et $\lambda(m_i) = \mathbf{O}$. à un autre couple (m_k, u) avec $u \in \kappa_{m_k}$ et $\lambda(m_k) = \mathbf{P}$. Le copycat doit donc s'effectuer entre les deux morceaux de coups reliés par un pointeur de contrôle.

Extension copycat

Dans les définitions suivantes $m[B/j]$ (resp. $s[B/j]$) est obtenu à partir du coup m (resp. de la partie s) en remplaçant chaque symbole de la forme $\star^A$ par $\star^{A[B/X_j]}$.

Définition 72 (extension plate) *Soit $s = m_1 \ldots m_n$ une partie de contrôle sur $A \in \mathcal{G}^{\mathfrak{P}}$, soient $B \in \mathcal{G}$ et $j > 0$.*

*On définit l'**extension plate** de s : étant donnée une suite de coups initiaux $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}_B$, $Fl^s_{j,B}(r)$ est définie comme $s'[B/X_j]$, où s' est obtenue à partir de s en prenant chaque paire $((m_i, t), (m_k, u))$ telle que : $\sharp^t(m_i) = j$ et le pointeur de contrôle de (m_k, u) pointe sur (m_i, t), et en remplaçant m_i par $m_i[t := r_N]$ et m_k par $m_k[u := r_N]$, où $N = \psi(i, k)$ avec $\psi : [1, n] \times \mathcal{K} \to \mathbb{N}$ injective.*

Dans cette définition, la condition sur N signifie simplement qu'on attribue un coup initial r_N spécifique pour chaque (m_i, t) appartenant à une paire $((m_i, t), (m_k, u))$.

Notons qu'il apparaît là une différence subtile avec le système F sans contrôle : alors qu'auparavant on associait au coup m_i l'unique coup m_{i+1}, on peut maintenant associer à (m_i, t) plusieurs paires $((m_i, t), (m_k, u))$, pour des valeurs différentes de m_k et de u. Cela ne complique pas les définitions pour autant.

Définition 73 (extension copycat) *Soit $s = m_1 \dots m_n$ une partie de contrôle sur $A \in \mathcal{G}^{\aleph}$, soient $B \in \mathcal{G}^{\aleph}$ et $j > 0$.*

Soit un couple (m_i, t) où m_i est un coup Opposant de s, $t \in \kappa_{m_i}$ avec $\sharp^t(m_i) = j$, et le pointeur de contrôle d'un certain couple $(m_k, u))$ pointe sur $(m_i, t))$. Soient enfin $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de coups initiaux dans $\mathcal{M}_B$ et $v = n_1 \dots n_p$ une bi-vue dans B. Supposons que $Fl^s_{j,B}(r) = s_1 m'_i[t := r_N] s_2 m'_k[u := r_N] s_3$ avec $m'_i = m_i[B/j]$ et $m'_k = m_k[B/j]$ et, si $\sharp(m_n) = j$ et $\lambda(m_n) = \mathbf{O}$, en remplaçant $m'_n = m_n[B/j]$ par $m'_n[r_n]$.

*L'**extension copycat** de s sur B à la position (i, u) le long de j (avec paramètres v, r) est la partie $s' = CC^s_{j,B}(i, u, v, r)$ définie par :*

- $s' = s_1 m'_i[t := n_1] s_2 m'_{i+1}[u := n_1] s_3$ *si* $p = 1$
- $s' = s_1 m'_i[t := n_1] s_2 m'_k[u := n_1] m'_k[u := n_2] m'_i[t := n_2] \dots m'_k[u := n_p] m'_i[t := n_p]$ *si p pair*
- $s' = s_1 m'_i[t := n_1] s_2 m'_k[u := n_1] m'_k[u := n_2] m'_i[t := n_2] \dots m'_i[t := n_p] m'_k[u := n_p]$ *si $p > 1$ et p impair*

(où les pointeurs de contrôle, lorsqu'ils sont requis, pointent vers le coup précédent, à la place correspondante).

Enfin, si $i = n$, $Fl^s_{j,B}(r) = s_1 m'_n[r_n]$ et $v = n_1 \dots n_p$ alors

$$CC^s_{j,B}(n, v, r) = \begin{cases} s_1 & \text{si } p = 0 \\ s_1 m'_n[n_1] & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 74 (affectation) *Soient σ une stratégie de contrôle innocente sur $A \in \mathcal{G}^{\aleph}$ et $j > 0$. L'**affectation** de X_j par B dans σ, dénotée $\sigma[B/X_j]$, est la plus petite stratégie innocente contenant toutes les extensions copycat sur B d'une partie de σ suivant l'indice j.*

Soient $\vec{X} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ et $\vec{B} = \langle B_1, \dots, B_n \rangle$. On note :

$$A[\vec{B}/\vec{X}] = (\dots (A[B_1/X_1])[B_2/X_2] \dots)[B_n/X_n]$$
$$\sigma[\vec{B}/\vec{X}] = (\dots (\sigma[B_1/X_1])[B_2/X_2] \dots)[B_n/X_n]$$

Stratégie uniforme

Définition 75 (variable de copycat, stratégie symboliques) *Soit $s = s_1 m$ une partie de contrôle sur l'arène A avec $\lambda(m) = \mathbf{O}$, et X_i une arène variable jouée au niveau de m. X_i est appelée **variable de copycat** de s si $X_i \notin FTV(\ulcorner s_1 \urcorner) \cap FTV(A)$.*

*Une vue s sur l'arène A est dite **symbolique** si, pour tout coup m de s tel que $\lambda(m) = \mathbf{O}$, les arènes jouées au niveau de m sont des variables de copycat $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ toutes distinctes.*

Une partie (resp. une stratégie) est dite symbolique si toutes les vues qu'elle contient sont symboliques.

Définition 76 (stratégie uniforme) *Soit σ une stratégie de contrôle sur l'arène A. σ est appelée* ***uniforme*** *si il existe une stratégie symbolique innocente $\bar{\sigma}$ sur A telle que : σ est la plus petite stratégie innocente contenant $\bar{\sigma}$ et stable par extension copycat le long d'une variable de copycat.*

Le résultat suivant peut être prouvé de la même façon que la proposition 10 :

Proposition 27 *Si $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to C$ sont deux stratégies de contrôle uniformes alors $\sigma;\tau : A \to C$ est uniforme.*

On a aussi :

Lemme 25 *Les stratégies de contrôle $\diamond : A \to \top$, $id_A : A \to A$, $\pi_r : A \times B \to B$, $\pi_l : A \times B \to A$, et $eval : (A \to B) \times A \to B$ sont uniformes. Si $\sigma : \Gamma \to A$ et $\tau : \Gamma \to B$ sont uniformes alors $\langle \sigma, \tau \rangle : \Gamma \to (A \times B)$ est uniforme. Si $\sigma : \Gamma \times A \to B$ est uniforme alors $\Lambda(\sigma) : \Gamma \to (A \to B)$ est uniforme.*

On peut donc définir la catégorie $\mathcal{C}^{\mathfrak{P}}(X_1, \ldots, X_n)$, la sous-catégorie de $\mathcal{C}_0^{\mathfrak{P}}(X_1, \ldots, X_n)$ pleine sur les objets et dont les morphismes sont les stratégies de contrôle uniformes. Cette catégorie est aussi cartésienne close.

7.2.6 Construction d'une hyperdoctrine de contrôle

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires à la construction d'une hyperdoctrine de contrôle. En ce qui concerne la structure d'hyperdoctrine, on se contentera de décrire les constructions sans expliciter les preuves, car celles-ci sont parfaitement similaires à celles données dans la partie 5.4.1.

La catégorie de base $\mathbb{B}$ est construite de la même façon que précédemment : les objets sont les entiers naturels, et un morphisme de n vers m est un m-uplet $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ d'arènes de contrôle telles que $FTV(A_i) \subseteq \{X_1, \ldots X_n\}$.

On a :

Proposition 28 *Soient $A, B \in \mathcal{G}^{\mathfrak{P}}$ et $j > 0$. Si $\sigma : A$ est uniforme, alors $\sigma[B/X_j] : A[B/X_j]$ est uniforme.*

On peut alors construire un foncteur $\mathcal{C}^{\mathfrak{P}} : \mathbb{B}^{op} \to \mathbf{CCC}$: on choisit $\mathcal{C}^{\mathfrak{P}}(k) = \mathcal{C}^{\mathfrak{P}}(X_1, \ldots, X_k)$ et, pour tout $\vec{B} : n \to m$, on définit $\mathcal{C}^{\mathfrak{P}}(\vec{B}) : \mathcal{C}^{\mathfrak{P}}(m) \to \mathcal{C}^{\mathfrak{P}}(n)$ comme suit (pour $\vec{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$) :

- pour tout $A \in \mathcal{C}^{\mathfrak{P}}(m)$, $\mathcal{C}^{\mathfrak{P}}(\vec{B})(A) = A[\vec{B}/\vec{X}]$
- pour tout $\sigma : A \to B$, $\mathcal{C}^{\mathfrak{P}}(\vec{B})(\sigma) = \sigma[\vec{B}/\vec{X}]$.

On définit la quantification de stratégie comme au chapitre 5 :

Définition 77 (quantification d'une stratégie de contrôle) *Soient $A, B \in \mathcal{C}^{\mathfrak{P}}(n+1)$ et $\sigma : A \to B$. On définit la stratégie $\forall \sigma : (\forall X_{n+1}.A) \to (\forall X_{n+1}.B)$ comme la plus petite stratégie de contrôle innocente contenant toutes les vues s sur $(\forall X_{n+1}.A) \to (\forall X_{n+1}.B)$ telles qu'il existe $C \in \mathcal{G}$ et $t \in \sigma[C/X_{n+1}]$ vérifiant :*

$$s = t\{\ \star^C{\uparrow}(-)/{\uparrow}(-)\ ,\ \star^C{\downarrow}(-)/{\downarrow}(-)\ \}$$

Dans la catégorie $\mathbb{B}$, la projection est $\vec{X} = \langle X_1, \dots, X_n\rangle : n{+}1 \to n$. Cela nous donne un foncteur $\mathcal{C}^{\parr}(\vec{X}) : \mathcal{C}^{\parr}(n) \to \mathcal{C}^{\parr}(n{+}1)$. On définit le foncteur $\Pi^{\parr}_n : \mathcal{C}^{\parr}(n{+}1) \to \mathcal{C}^{\parr}(n)$ par $\Pi^{\parr}_n(A) = \forall X_{n+1}.A$ et $\Pi^{\parr}_n(\sigma) = \forall\sigma$.

Lemme 26 *$\Pi^{\parr}_n$ est adjoint à droite de $\mathcal{C}^{\parr}(\vec{X})$.*

Lemme 27 *$\Pi^{\parr}_n$ est naturel en n.*

De plus, si $\kappa : \mathcal{C}^{\parr}(n{+}1)(\mathcal{C}^{\parr}(\vec{X})(\Gamma), A) \to \mathcal{C}^{\parr}(n)(\Gamma, \Pi^{\parr}_n(A))$ est la bijection qui réalise l'adjonction $\Pi^{\parr}_n \dashv \mathcal{C}^{\parr}(\vec{X})$, on a :

$$\kappa((\kappa^{-1}(id_{\forall X_n.A}))[\vec{B}/\vec{X}]) = id_{(\forall X_n.A)[\vec{B}/\vec{X}]}$$

Proposition 29 *La structure $\mathcal{M}^{\parr}$ définie par la catégorie de base $\mathbb{B}$ et le foncteur $\mathcal{C}^{\parr}$: $\mathbb{B}^{op} \to$ **CCC** est une hyperdoctrine.*

On veut maintenant montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^{\parr}(n)$ a une structure d'hyperdoctrine de contrôle.

On connaît la construction $\parr$ sur les arènes de contrôle. Pour la définir sur les morphismes, on va construire de façon plus générale des stratégies $\sigma \parr \tau$ et $\tau \parr \sigma$, où σ est un certain type de stratégie qu'on appellera **centrée**, et on montrera que l'identité est bien centrée.

Définition 78 (stratégie centrée) *Soit σ une stratégie de contrôle sur $A \to B$. On dit que σ est **centrée** si, pour toute partie $s \in \sigma$, tout coup initial m de s est suivi d'un coup n de format $\downarrow$, et n est l'unique coup de format $\downarrow$ justifié par m.*

Par définition, les stratégies $\diamond : A \to \top$, $id_A : A \to A$, $\pi_r : A{\times}B \to B$, $\pi_l : A{\times}B \to A$, et $eval : (A \to B) \times A \to B$ sont centrées.

Soit s une partie sur $(A \parr C) \to (B \parr D)$. On définit la restriction $s\restriction_{A\to B}$ comme suit :

- on se restreint aux coups de s de la forme $\uparrow\langle m_1, m_2\rangle$, $\uparrow\parr_1 m_1$, $\downarrow\langle m_1, m_2\rangle$ et $\downarrow\parr_1 m_1$
- on remplace chaque coup de la forme $\uparrow\langle m_1, m_2\rangle$ ou $\uparrow\parr_1 m$ par $\uparrow m_1$
- on remplace chaque coup de la forme $\downarrow\langle m_1, m_2\rangle$ ou $\downarrow\parr_1 m$ par $\downarrow m_1$
- on conserve les pointeurs de justification, et les pointeurs de contrôle quand c'est possible.

$s\restriction_{C\to D}$ est défini de façon similaire.

Dans la définition suivante, on note $s \sqsubset \sigma$ si s est préfixe d'une partie de σ.

Définition 79 (disjonction de stratégies) *Soient $\sigma : A \to B$ et $\tau : C \to D$. On définit*

$$\sigma \parr \tau = \{s \in \mathcal{P}^{\parr}_{(A\parr C)\to(B\parr D)} \mid s\restriction_{A\to B} \sqsubset \sigma \wedge s\restriction_{C\to D} \sqsubset \tau\}$$

L'intuition à la base de cette définition est que $\sigma\parr\tau$ joue suivant σ lorsque l'Opposant joue sur $A \to B$, et suivant τ lorsqu'il joue sur $C \to D$. $\sigma \parr \tau$ n'est pas toujours une stratégie, mais on a :

Proposition 30 *Si $\sigma : A \to B$ est une stratégie centrée de $\mathcal{C}^{\parr}(n)$, alors pour toute stratégie $\tau : C \to D$ de $\mathcal{C}^{\parr}(n)$, $\sigma \parr \tau$ et $\tau \parr \sigma$ sont des stratégies de $\mathcal{C}^{\parr}(n)$. De plus, on a :*

$$(\sigma \parr id_C);(id_B \parr \tau) = (id_A \parr \tau);(\sigma \parr id_D)$$

et

$$(id_C \parr \sigma);(\tau \parr id_B) = (\tau \parr id_A);(id_D \parr \sigma)$$

Démonstration : Pour tout coup $b \in \mathcal{M}_B$ tel que $\vdash b$, on note $f(b)$ le coup de $\mathcal{M}_A$, s'il existe, tel que $\uparrow b \cdot \downarrow f(b) \in \sigma$. $\sigma \parr \tau$ contient exactement les parties dont les vues ont une des formes suivantes :

- $s = \epsilon$
- $s = \uparrow\langle b_1, d_1\rangle \cdot \uparrow \parr_2 d_2 \cdots \uparrow \parr_2 d_k$ avec $\uparrow d_1 \cdots \uparrow d_k$ vue de τ
- $s = \uparrow\langle b_1, d_1\rangle \cdot \uparrow \parr_2 d_2 \cdots \uparrow \parr_2 d_k \cdot \downarrow\langle f(b_1), c_1\rangle$ avec $\uparrow d_1 \cdots \uparrow d_k \cdot \downarrow c_1$ vue de τ
- $s = \uparrow\langle b_1, d_1\rangle \cdot \uparrow \parr_2 d_2 \cdots \uparrow \parr_2 d_k \cdot \downarrow\langle f(b_1), c_1\rangle \cdot g_1 \cdots g_n$ avec $\uparrow d_1 \cdots \uparrow d_k \cdot \downarrow c_1 \cdot m_1 \cdots m_n$ vue de τ et
$$g_i = \begin{cases} \uparrow \parr_1 d & \text{si } m_i = \uparrow d \\ \langle f(b_1), d\rangle & \text{si } m_i = \downarrow d \text{ et } \vdash d \\ \downarrow \parr_1 d & \text{sinon} \end{cases}$$
- $s = \uparrow\langle b_1, d_1\rangle \cdot \uparrow \parr_2 d_2 \cdots \uparrow \parr_2 d_k \cdot \downarrow\langle f(b_1), c_1\rangle \cdot \alpha_1 \parr_1 a_1 \cdots \alpha_n \parr_1 a_n$ avec $\alpha_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$, $\uparrow d_1 \cdots \uparrow d_k \cdot \downarrow c_1$ vue de τ et $\uparrow b_1 \cdot \downarrow f(b_1) \cdot \alpha_1 a_1 \cdots \alpha_1 a_p$ vue de σ.

C'est donc bien une stratégie, et elle est uniforme puisque σ et τ le sont.

En construisant les composées $(\sigma \parr id_C);(id_B \parr \tau)$ et $(id_A \parr \tau);(\sigma \parr id_D)$ on vérifie qu'elles sont égales à $\sigma \parr \tau$. □

Si on pose $\sigma \parr A = \sigma \parr id_A$, $\parr$ définit un foncteur binoïdal pour chaque catégorie $\mathcal{C}^{\parr}(n)$, et les stratégies centrées sont centrales pour cette structure binoïdale. On peut d'ailleurs démontrer, comme dans [Lau02] :

Proposition 31 *Les stratégies centrales dans $\mathcal{C}^{\parr}(n)$ pour le foncteur binoïdal $\parr$ sont exactement les stratégies centrées.*

Démonstration : On sait déjà qu'une stratégie centrée est centrale. Considérons donc une stratégie centrale $\sigma : A \to B$ dans $\mathcal{C}^{\parr}(n)$, et supposons qu'elle ne soit pas centrée. Deux cas sont possibles :

- soit il existe une partie $mn \in \sigma$ avec $m = \uparrow m'$ initial et $n = \uparrow n'$
- soit il existe une partie $s \in \sigma$ avec un coup initial $m = \uparrow m'$ qui justifie deux coups $n_1 = \downarrow n'_1$ et $n_2 = \downarrow n'_2$.

Dans le premier cas, on construit $\rho_1 = (\sigma \parr A);(B \parr \sigma)$ et $\rho_2 = (A \parr \sigma);(\sigma \parr B)$. On constate alors que $\uparrow\langle m', m'\rangle \cdot \downarrow \parr_2 n' \in \rho_1$ tandis que $\uparrow\langle m', m'\rangle \cdot \downarrow \parr_1 n' \in \rho_2$, et donc $\rho_1 \neq \rho_2$.

Dans le deuxième cas, on a $mn_1p_1 \dots p_nn_2 \in \sigma$ avec $p_i = \alpha_i q_i$ où $\alpha_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ et q_i n'est pas un coup initial. On considère alors les deux arènes de contrôle $C = (\perp \to \perp) \times \perp$

et $D = \bot$, et une stratégie $\tau : C \to D$ telle que $s = \uparrow d \cdot \downarrow c_1 \cdot \downarrow c_2 \cdot \downarrow c_3 \in \tau$ avec

$$\begin{aligned} d &= 0 \\ c_1 &= l{\uparrow}0 \\ c_2 &= l{\downarrow}0 \\ c_3 &= r0 \end{aligned}$$

Si on note $\rho_1 = (\sigma \parr C); (B \parr \tau)$ et $\rho_2 = (A \parr \tau); (\sigma \parr D)$, on constate que $s_1 \in \rho_1$ où

$$s_1 = \uparrow\langle m', d\rangle \cdot \downarrow\langle n'_1, c_1\rangle \cdot \downarrow \parr_2 c_2 \cdot \downarrow\langle n'_1, c_3\rangle \cdot \alpha_1 \parr_1 q_1 \cdots \alpha_n \parr_1 q_n \cdot \downarrow\langle n'_2, c_3\rangle$$

tandis que $s_2 \in \rho_2$ où

$$s_1 = \uparrow\langle m', d\rangle \cdot \downarrow\langle n'_1, c_1\rangle \cdot \downarrow \parr_2 c_2 \cdot \downarrow\langle n'_1, c_3\rangle \cdot \alpha_1 \parr_1 q_1 \cdots \alpha_n \parr_1 q_n \cdot \downarrow\langle n'_2, c_1\rangle$$

Or $c_1 \neq c_3$ donc $\rho_1 \neq \rho_2$. □

Proposition 32 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^{\parr}(n)$ est une catégorie de contrôle.*

Démonstration : La structure prémonoïdale est triviale : les arènes $(A \parr B) \parr C$ et $A \parr (B \parr C)$ sont identiques modulo un renommage des occurrences, on définit donc l'isomorphisme $a_{A,B,C} : (A \parr B) \parr C \to A \parr (B \parr C)$ comme l'identité modulo ce renommage. La naturalité de cet isomorphisme en A,B et C en découle immédiatement. Par ailleurs cette stratégie est centrée, donc centrale.

On fait de même pour $l_A : A \to A \parr \bot$, $r_A : A \to \bot \parr A$ et $c_{A,B} : A \parr B \to B \parr A$. Les branches des diagrammes de cohérence sont des compositions d'identité modulo renommage, donc les diagrammes commutent.

Pour tout $A \in \mathcal{C}^{\parr}$, on définit $i_A : \bot \to A$ par :

$$i_A = \{\uparrow m_1 \cdot \downarrow 0 \cdot \uparrow m_2 \cdot \downarrow 0 \cdots \uparrow m_n \cdot \downarrow 0 \mid \ \forall i \in [1, n],\ m_i \in \mathcal{M}_A \wedge \vdash m_i\}$$

et $\nabla_A : A \parr A \to A$ par :

$$\nabla_A = \{s \in \mathbb{E}_{A \parr A\ \to A} \mid \ \forall t \in \mathbb{E}_{A \parr A\ \to A}, t \preceq s \Rightarrow t{\restriction_{\downarrow}} \rightsquigarrow t{\restriction_{\uparrow}}\}$$

où $t \rightsquigarrow s$ si s est obtenu à partir de t en remplaçant chaque coup de la forme $\langle m, m\rangle$, $\parr_1 m$ ou $\parr_2 m$ par m. Ce sont bien deux stratégies, et elles sont centrées donc centrales.

La composition $\nabla_A \circ (A \parr i_A)$ nous donne la stratégie

$$\{s \in \mathbb{E}_{A \parr \bot \to A} \mid \ \forall t \in \mathbb{E}_{A \parr \bot \to A}, t \preceq s \Rightarrow t{\restriction_{\downarrow}} \rightsquigarrow_1 t{\restriction_{\uparrow}}\}$$

où $t \rightsquigarrow_1 s$ si s est obtenu à partir de t en remplaçant chaque coup de la forme $\langle m, 0\rangle$, $\parr_1 m$ ou $\parr_2 m$ par m. C'est donc la stratégie l_A^{-1}. De même, $\nabla_A \circ (i_A \parr A) = r_A^{-1}$.

On a aussi

$$\begin{aligned} \nabla_A \circ c_{A,A} &= \{s \in \mathbb{E}_{A \parr A \to A} \mid \ \forall t \in \mathbb{E}_{A \parr A \to A}, t \preceq s \Rightarrow t{\restriction_{\downarrow}} \rightsquigarrow t{\restriction_{\uparrow}}\} \\ &= \nabla_A \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\nabla_A \circ (\nabla_A \parr A) &= \{s \in \mathbb{E}_{(A\parr A)\parr A \to A} \mid \forall t \in \mathbb{E}_{(A\parr A)\parr A\to A}, t \preceq s \Rightarrow t\restriction_{\downarrow} \rightsquigarrow_2 t\restriction_{\uparrow}\} \\ &= \nabla_A \circ (A \parr \nabla_A) \circ a_{A,A,A}\end{aligned}$$

où $t \rightsquigarrow_2 s$ si s est obtenu à partir de t en remplaçant chaque coup de la forme $\langle\langle m, m\rangle, m\rangle$ ou $\parr_i \parr_j m$ avec $i, j \in \{1, 2\}$ par m.

On vérifie la compatibilité des monoïdes avec la structure prémonoïdale. On a $id_\perp = i_\perp$ et $i_A \parr i_B = \{\uparrow\langle m_1, m_1'\rangle \cdot \downarrow\langle 0, 0\rangle \cdots \uparrow\langle m_1, m_1'\rangle \cdot \downarrow\langle 0, 0\rangle \mid \forall i \in [1, n],\ m_i \in \mathcal{M}_A \wedge m_i' \in \mathcal{M}_B \wedge \vdash m_i \wedge \vdash m_i'\} = i_{A\parr B}$; par ailleurs,

$$\nabla_{A\parr B} = \{s \in \mathbb{E}_{(A\parr B)\parr(A\parr B)\to A\parr B} \mid \forall t \in \mathbb{E}_{(A\parr B)\parr(A\parr B)\to A\parr B}, t \preceq s \Rightarrow t\restriction_{\downarrow} \rightsquigarrow_3 t\restriction_{\uparrow}\}$$

et

$$\nabla_A \parr \nabla_B = \{s \in \mathbb{E}_{(A\parr A)\parr(B\parr B)\to A\parr B} \mid \forall t \in \mathbb{E}_{(A\parr A)\parr(B\parr B)\to A\parr B}, t \preceq s \Rightarrow t\restriction_{\downarrow} \rightsquigarrow_4 t\restriction_{\uparrow}\}$$

où $t \rightsquigarrow_3 s$ si s est obtenu à partir de t en remplaçant chaque coup de la forme $\langle\langle m, n\rangle, \langle m, n\rangle\rangle$ par $\langle m, n\rangle$, et chaque coup de la forme $\parr_1 \parr_1 m$ ou $\parr_2 \parr_1 m$ (resp. $\parr_1 \parr_2 m$ ou $\parr_2 \parr_2 m$) par $\parr_1 m$ (resp. $\parr_2 m$), et $t \rightsquigarrow_4 s$ si s est obtenu à partir de t en remplaçant chaque coup de la forme $\langle\langle m, m\rangle, \langle n, n\rangle\rangle$ par $\langle m, n\rangle$, et chaque coup de la forme $\parr_1 \parr_1 m$ ou $\parr_1 \parr_2 m$ (resp. $\parr_2 \parr_1 m$ ou $\parr_2 \parr_2 m$) par $\parr_1 m$ (resp. $\parr_2 m$). D'où :

$$\nabla_A \parr \nabla_B \circ a^{-1} \circ (A \parr a) \circ (A \parr (c \parr B)) = \Delta_{A\parr B} \circ a^{-1} \circ A \parr a$$

π_1 et π_2 sont centrées, donc centrales. On vérifie aisément que $\sigma \circ i_A = i_B$ pour toute stratégie centrée $\sigma : A \to B$, donc en particulier pour π_1 et π_2. De plus,

$$\begin{aligned}\nabla_A \circ \pi_1 \parr \pi_1 &= \{s \in \mathbb{E}_{(A\parr B)\times(A\parr B)\to A} \mid \forall t \in \mathbb{E}_{(A\parr B)\times(A\parr B)\to A}, t \preceq s \Rightarrow t\restriction_{\downarrow} \rightsquigarrow_5 t\restriction_{\uparrow}\} \\ &= \pi_1 \circ \nabla_{A\parr B}\end{aligned}$$

où $t \rightsquigarrow_5 s$ si s est obtenu à partir de t en remplaçant chaque coup de la forme $\langle lm, lm\rangle$, $\parr_1 lm$ ou $\parr_2 lm$ par m. D'où : π_1 est focale, et π_2 aussi.

Enfin, $(\pi_1 \parr C, \pi_2, \parr C)$ peut être vue comme une identité modulo renommage, donc c'est un isomorphisme, dont on note d l'inverse. Par ailleurs, $id_{\top\parr C} = \{\epsilon\}$ donc : $\top \parr C \to \top$ est un isomorphisme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^{\parr}(n)$ est donc une catégorie prémonoïdale symétrique avec codiagonales, et elle est aussi cartésienne fermée.

La stratégie $\hat{\epsilon} = (\epsilon \parr C) \circ d \circ (id \times w)$ peut être décrite par :

$$\hat{\epsilon} = \{s \in \mathbb{E}_{((A\to B)\parr C)\times A\to B\parr C} \mid \forall t \in \mathbb{E}_{((A\to B)\parr C)\times A\to B\parr C}, t \preceq s \Rightarrow t\restriction_{\downarrow r} = t\restriction_{\downarrow l \parr_1 \downarrow} \wedge t\restriction_{\downarrow l} \rightsquigarrow_6 t\restriction_{\uparrow}\}$$

où $t \rightsquigarrow_6 s$ si s est obtenu à partir de t en ne gardant que les coups de la forme $\langle m, n\rangle$ ou $\parr_1 \uparrow m$ ou $\parr_2 m$ et en les remplaçant respectivement par $\langle m, n\rangle$, $\parr_1 m$ et $\parr_2$.

Donc la stratégie $s = \Lambda(\hat{\epsilon}) : (A \to B) \parr C \to (A \to B \parr C)$ peut être vue comme une simple identité modulo renommage des coups, de même que $s' = c^A \circ s \circ c : B \parr (A \to C) \to (A \to B \parr C)$.

Le diagramme suivant (où $A^B = B \to A$) commute :

$$\begin{tikzcd}
B^A \parr C^D \arrow[rr, "s'"] \arrow[d, "s"'] & & (B^A \parr C)^D \arrow[d, "s^D"] \\
(B \parr C^D)^A \arrow[r, "s'^A"] & ((B \parr C)^D)^A \arrow[r, "ccc"] & ((B \parr C)^A)^D
\end{tikzcd}$$

car les deux morphismes sont des identités modulo renommage. Par ailleurs, i_{B^A} et $(i_B)^{\diamond_A}$ contiennent les mêmes parties, modulo le renommage des coups $\downarrow 0$ en $\downarrow\uparrow 0$, donc on a aussi le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\perp \arrow[rr, "ccc"] \arrow[dr, "i_{B^A}"'] & & \perp^1 \arrow[dl, "(i_B)^{\diamond_A}"] \\
& B^A &
\end{tikzcd}$$

Enfin, si $\Delta_A = (id_A, id_A) : A \to A \times A$, on a :

$$\begin{array}{rcl}
\nabla_B^{\Delta_A} & = & \{s \in \mathbb{E}_{(A\times A \to (B \parr B)) \to (A \to B)} \mid \forall t \in \mathbb{E}_{(A\times A \to (B \parr B)) \to (A \to B)}, \\
 & & t \preceq s \Rightarrow t\upharpoonright_{\downarrow\downarrow l} = t\upharpoonright_{\uparrow\downarrow} /l \wedge t\upharpoonright_{\downarrow\downarrow r} = t\upharpoonright_{\uparrow\downarrow} /r \wedge t\upharpoonright_{\downarrow\uparrow} \rightsquigarrow t\upharpoonright_{\uparrow\uparrow}\}
\end{array}$$

où t/ζ est obtenue à partir de t en se restreignant aux coups héréditairement justifiés par un coup de format ζ. Moyennant renommage des coups, c'est la même stratégie que $\nabla_{A \to B}$ d'où :

$$\begin{tikzcd}
B^A \parr B^A \arrow[r, "s'"] \arrow[dr, "\nabla_{B^A}"'] & (B^A \parr B)^A \arrow[r, "s^A"] & (B \parr B)^{A \times A} \arrow[dl, "\nabla_A^{\Delta_A}"] \\
& B^A &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Théorème 9 $\mathcal{M}^{\parr}$ *est une hyperdoctrine de contrôle.*

DÉMONSTRATION : Il faut tout d'abord vérifier que les foncteurs de spécialisation $\mathcal{C}^{\parr}(\vec{B})$ pour $\vec{B} : n \to m$ préservent la structure de catégorie de contrôle. Il va de soi qu'ils préservent la structure de catégorie cartésienne fermée, et par ailleurs $(A \parr B)[C/X_i] = A[C/X_i] \parr B[C/X_i]$, $(\sigma \parr B)[C/X_i] = \sigma[C/X_i] \parr B[C/X_i]$ et $(B \parr \sigma)[C/X_i] = B[C/X_i] \parr \sigma[C/X_i]$ pour tout X_i.

Par ailleurs, la plupart des morphismes caractérisant la structure d'hyperdoctrine de contrôle sont des identités modulo renommage, ils sont donc conservés, comme l'identité, par les foncteurs de spécialisation. Par ailleurs, on peut vérifier directement que $i_A[B/X_i] = i_{A[B/X_i]}$ et $\nabla_A[B/X_i] = \nabla_{A[B/X_i]}$.

$\kappa^{-1}(\mathit{id}) : (\forall X_n.A) \to A$ est une stratégie centrée, définie par

$$\kappa^{-1}(\mathit{id}) = \{s \in \mathbb{E}_{(\forall X_n.A)\to A} \mid \forall t \in \mathbb{E}_{(\forall X_n.A)\to A}, t \preceq s \Rightarrow t\restriction_\uparrow \rightsquigarrow_7 t\restriction_\downarrow\}$$

où $t \rightsquigarrow_7 s$ si s est obtenu à partir de t en remplaçant chaque coup m par $\star^{X_n} m$.

Enfin, si on pose

$$p_{A,B} = \kappa(\kappa^{-1}(\mathit{id}_{\forall X_{n+1}.A}) \parr G_{U^n}(B)) : (\forall X_{n+1}.A) \parr B \to \forall X_{n+1}(A \parr G_{U^n}(B))$$

alors $p_{A,B}$ est simplement une identité modulo renommage. Plus précisément :

$$p_{A,B} = \{s \in \mathbb{E}_{(\forall X_{n+1}.A)\parr B\to\forall X_{n+1}(A\parr B)} \mid \forall t \in \mathbb{E}_{(\forall X_{n+1}.A)\parr B\to\forall X_{n+1}(A\parr B)}, t \preceq s \Rightarrow t\restriction_\downarrow \rightsquigarrow_7 t\restriction_\uparrow\}$$

où $t \rightsquigarrow_7 s$ si s est obtenu à partir de t en remplaçant chaque coup de la forme $\langle\star^C m, n\rangle$ par $\star^C\langle m, n\rangle$, chaque coup de la forme $\parr_1 \star^C m$ par $\star^C \parr_1 m$ et chaque coup de la forme $\parr_2 m$ par $\star^C \parr_2 m$ où C est tel que $\parr_2 m$ est héréditairement justifié dans t par un coup de format $\star^C$.

Il est alors évident que $p_{A,B}$ est un isomorphisme, et il est centré donc central. $\square$

7.2.7 Hyperforêts de contrôle

Définition 80 (hyperforêt de contrôle) *Une* ***hyperforêt de contrôle*** $H = (F, \mathcal{R}, \mathcal{D})$ *est une forêt finie* $F = (\mathcal{F}, \leq)$ *munie d'un multi-ensemble d'hyperarêtes* $\mathcal{R} \in \mathbb{P}_{mult}(\mathcal{F} \times \mathbb{P}_{mult}(\mathcal{F}))$ *et une fonction partielle de décoration* $\mathcal{D} : \mathcal{F} \rightharpoonup \mathbb{P}_{mult}(\mathcal{X})$*, avec la condition suivante : pour tout* $(t, S) \in \mathcal{R}$*, si* $s \in S$ *alors* $t \leq s$*.*

On va à nouveau donner un algorithme qui permet de passer d'une arène de contrôle à une hyperforêt de contrôle.

On commence par passer de l'ensemble fini partiellement ordonné $\mathcal{O}_A$ à la forêt fini $F_A = (\mathcal{F}_A, \preceq)$ avec $\mathcal{F}_A = \mathit{Chem}(\mathcal{O}_A)$.

On définit à partir de $\mathcal{L}_A$ le multi-ensemble $\mathcal{R}_A \in \mathbb{P}_{mult}(\mathcal{F}_A \times \mathbb{P}_{mult}(\mathcal{F}_A))$ de la façon suivante : on définit

$$\mathcal{L} = \{a[\star 0] \in \overline{\mathbb{A}} \mid \exists b \in \mathcal{O}_A, t \in \kappa_b,\ a[\star 0] \sqsubseteq^p b|_t\}$$

La valeur de $\mathcal{R}_A$ en (r, S) est égale au nombre d'occurrences $y \in \mathcal{L}$ telles que :

- il existe $t \in \kappa_{or(r)}$ tel que $y \sqsubseteq^p or(r)|_t$
- pour tout $r' \leq r$, si il existe $u \in \kappa_{or(r')}$ tel que $y \sqsubseteq^p or(r)|_u$ alors $r' = r$
- $S(s) = \mathit{Card}(\{t \in \kappa_{or(s)} \mid r \preceq s \wedge \mathcal{L}(or(s), t) = y\})$.

Enfin, la fonction partielle $\mathcal{D}_A : \mathcal{F} \rightharpoonup \mathbb{P}_{mult}(\mathcal{X})$ est définie par :

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{A}}(c))(X_i) = \mathit{Card}(\{t \in \kappa_{or(c)} \mid \sharp^t(or(t)) = i\})$$

Comme les hyperforêts de contrôle sont des structures très peu contraintes, on a immédiatement :

Proposition 33 *Si A est une arène de contrôle, alors $H_A = (F_A, \mathcal{R}_A, \mathcal{D}_A)$ est une hyperforêt de contrôle.*

On donne enfin la définition d'un isomorphisme entre deux hyperforêts de contrôle :

Définition 81 (isomorphisme d'hyperforêts de contrôle) *Soient deux hyperforêts de contrôle $H_1 = (F_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{D}_1)$ et $H_2 = (F_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{D}_2)$, avec $F_1 = (\mathcal{F}_1, \leq_1)$ et $F_2 = (\mathcal{F}_2, \leq_2)$. On dit que H_1 et H_2 sont* ***isomorphes*** *($H_1 \simeq H_2$) s'il existe une bijection $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ qui préserve la structure d'hyperforêt de contrôle, i.e. telle que :*
- *$a \leq_1 a'$ ssi $f(a) \leq_1 f(a')$*
- *$\mathcal{R}_2 = f(\mathcal{R}_1)$*
- *$\mathcal{D}_2 \circ f = \mathcal{D}_1$*

7.3 Caractérisation des isomorphismes de types de $\lambda\mu 2$

Dans cette section, on va donner la caractérisation des isomorphismes de types pour le système $\lambda\mu 2$. L'idée est tout simplement d'adapter la preuve utilisée à la section 5.6 au cas des jeux avec contrôle. On profite là à plein des avantages de souplesse de la sémantique des jeux : modulo adaptation du modèle, on est capable d'utiliser quasiment la même preuve sémantique, alors même que le langage dont on part est très différent.

Un isomorphisme de jeux est défini comme précédemment :

Définition 82 (isomorphisme de jeux) *Soient $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to A$ deux stratégies de contrôle. On dit que (σ, τ) est un* ***isomorphisme de jeux*** *entre A et B si $\sigma; \tau = id_A$ et $\tau; \sigma = id_B$.*

Le résultat fondamental à démontrer est le suivant :

Théorème 10 *S'il existe un isomorphisme de jeux (σ, τ) entre deux arènes de contrôle A et B, avec σ et τ uniformes, alors H_A et H_B sont isomorphes.*

La démonstration étant très similaire au cas du système F à la Church, on insistera surtout sur les parties dissemblables.

7.3.1 Parties zig-zag

Une première différence intervient dans la définition des stratégies zig-zag : on impose cette fois que tout pointeur de contrôle pointe sur le coup précédent.

Définition 83 (partie zig-zag) *Une partie de contrôle $s \in \mathcal{P}^{\parr}_{A \to B}$, équipée du pointeur de contrôle $f^{\parr}$, est appelée* ***zig-zag*** *si*
- *chaque coup Joueur n qui suit un coup Opposant m de format $\uparrow$ (resp. $\downarrow$) est de format $\downarrow$ (resp. $\uparrow$)*
- *pour tout coup Joueur n qui suit un coup m, si $f^{\parr}(n, t) = (M, u(n, t))$ est défini alors $M = m$ et $u(n, t) = u(n, t') \Rightarrow t = t'$*
- *chaque coup Joueur qui suit un coup Opposant initial est justifié par ce dernier*

– *$s\restriction_\downarrow$ et $s\restriction_\uparrow$ ont les mêmes pointeurs.*

Si s est une partie zig-zag de longueur paire dans $A \to B$, on note $\breve{s}$ l'unique partie zig-zag dans $B \to A$ telle que $\breve{s}\restriction_\downarrow = s\restriction_\uparrow$ et $\breve{s}\restriction_\uparrow = s\restriction_\downarrow$.

Lemme 28 *S'il existe un isomorphisme de jeux (σ, τ) entre A et B alors :*
- *toute partie de σ ou τ est zig-zag*
- *$\tau = \{\breve{s} \mid s \in \sigma\}$*
- *σ et τ sont totales.*

Démonstration : La preuve est la même que dans le cas des jeux sans contrôle. Le seul point à vérifier est la condition sur les pointeurs de contrôle.

Supposons que l'on ait $s = m_1 \dots m_n \in \sigma$ avec $f^{\mathfrak{N}}(m_n, t_1) = (m_i, t_2)$ où $i < n-1$, $t_1 \in \kappa_{m_n}$ et $t_2 \in \kappa_{m_i}$. On a une suite justifiée u sur $(A \to B) \to A$ telle que $S = u\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \sigma; \tau$, $u\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} = s$ et $u\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow} = \breve{s}$, et une suite justifiée v sur $(B \to A) \to B$ telle que $T = v\restriction_{\uparrow,\downarrow\downarrow} \in \tau; \sigma$, $v\restriction_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} = s$ et $v\restriction_{\uparrow,\downarrow\uparrow} = \breve{s}$. S ou T a pour dernier coup m_n, et un des pointeurs de contrôle de m_n pointe héréditairement sur un coup qui n'est pas le prédécesseur de m_n. Donc on a $S \notin id_A$ ou $T \notin id_B$, ce qui est absurde.

Supposons enfin que $f^{\mathfrak{N}}(m_n, t) = f^{\mathfrak{N}}(m_i, t')$ avec $t \neq t'$. Alors, dans la partie S sur $A_f l A$ ou T sur $B \to B$ obtenue par composition de s et $\breve{s}$ et dont le dernier coup est m_n, on a, si $g^{\mathfrak{N}}$ est le pointeur de contrôle, $g^{\mathfrak{N}}(m_n, t) = g^{\mathfrak{N}}(m_n, t')$. D'où $S \notin id_A$ ou $T \notin id_B$, ce qui est absurde. □

7.3.2 Régularité

Définition 84 (rang) *Soient A une arène et $m \in \mathcal{M}_A$. m s'écrit soit $m = M[m_2]$ avec $M = m_1\|_t$ et $\mathcal{A}(m_1) = a \in \mathcal{O}_A$, soit $m = M[t_1 := m_1, \dots, t_n := m_n]$ avec $\mathcal{A}(m_1) = a \in \mathcal{O}_A$. Supposons que m contienne une occurrence de $\star^B$ pour $B \in \mathcal{G}$. On définit le **rang** de cette occurrence de B dans m, noté $rang^m_A(B) \in \{1, 2\}$, par $rang^m_A(B) = 1$ si $\star^B$ apparaît dans M, $rang^m_A(B) = 2$ sinon.*

On note $\llcorner m \lrcorner_i$, pour $i \in \{1, 2\}$ la liste des occurrences d'arènes de rang i dans m, ordonnées suivant leur apparition dans m.

Définition 85 (stratégie régulière) *Soit A une arène de contrôle. Une stratégie σ est dite **régulière** si il existe un ensemble dénombrable d'entiers I et des fonctions partielles $f : \mathbb{A} \rightharpoonup \mathbb{A}$ et $F_j : \mathbb{A}^* \rightharpoonup \mathcal{C}^*$ pour $j \in \{1, 2\}$, tels que : si $s \in \sigma$ et $sm \in \mathcal{P}_A$, alors $smm' \in \sigma$ ssi $\mathcal{A}(smm') = f(\mathcal{A}(sm))$ et $\llcorner m' \lrcorner_j = F_j(\mathcal{A}(sm))[\llcorner sm \lrcorner_j / I]$ pour $j \in \{1, 2\}$.*

Comme dans le cas du modèle sans contrôle, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 34 *Si $\sigma : A$ est une stratégie de contrôle uniforme alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\{s \in \sigma \mid \ |s| \leq N\}$ est régulière.*

Démonstration : La preuve est similaire à celle du cas sans contrôle. Il faut simplement prendre garde à remplacer les extensions copycat sans contrôle par des extensions copycat avec contrôle. □

Pour la suite, on fixe $N_0 = 2(Card(\mathcal{O}_A) + Card(\mathcal{O}_B) + 1)$ et on notera f, F_1 et F_2 (resp. f', F'_1 et F'_2) les fonctions associés à la stratégie régulière $\sigma_N = \{s \in \sigma \mid \ |s| \leq N_0\}$ (resp. $\tau_N = \{s \in \tau \mid \ |s| \leq N_0\}$).

7.3.3 Construction de la bijection entre forêts

Dans cette section, on identifie les occurrences de $\mathcal{O}_A$ avec les coups de $\mathcal{F}_A$. De plus, si $a \in \mathcal{F}_A$, on note $[a]$ l'unique coup de $\mathcal{M}_A$ tel que : $\mathcal{A}([a]) = a[t_1 := k_1, \ldots, t_n := k_n]$ avec $\kappa_a = \{t_1, \ldots, t_n\}$, $k_i \in \mathbb{N}$ pour $i \in [1, n]$, et pour tout symbole $\star^D$ apparaissant dans $[a]$, on a $D = \top \to \bot$.

Lemme 29 *Soit a un nœud de $\mathcal{F}_A$ et $a_1 \ldots a_p$ la suite de nœuds de $\mathcal{F}_A$ tels que : $\vdash a_1$, $a_i \vdash a_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq p-1$ et $a_p = a$. On peut construire une fonction $g : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ telle que :*
- $[g(a_1)][a_1][a_2][g(a_2)][g(a_3)][a_3] \cdots \in \sigma$
- *il existe une bijection $\psi : quant_A^+(a_p) \to quant_B^+(g(a_p))$.*

Démonstration : On raisonne par induction sur p.
Si $p = 0$ il suffit de voir que $\epsilon \in \sigma$.
Si $p = p' + 1$ avec p' pair, on a

$$s_1 = [a_1][g(a_1)]...[g(a_{p'})][a_{p'}] \in \tau$$
$$s_2 = [g(a_1)][a_1]...[a_{p'}][g(a_{p'})] \in \sigma$$

Par totalité, il existe un unique coup m tel que $s_1[a_p]m \in \tau$, et on fixe $g(a_p) \in \mathcal{O}_B$ tel que $m = g(a_p)[t_1 := m_1, \ldots, t_n := m_n]$ ou $m = g(a_p)|_t[m_1]$.

Comme dans le cas des jeux sans contrôle, on peut montrer par des substitutions d'arènes que l'on a en fait $m = [g(a_p)]$, et une bijection $\psi : quant_A^+(a_p) \to quant_B^+(g(a_p))$, avec la propriété suivante : si b_i est instancié par H dans $[a_p]$ alors $\psi(b_i)$ est instancié par H dans $[g(a_p)]$.

Si $p = p' + 1$ avec p' impair on faire même raisonnement, en échangeant les rôles de σ et τ. □

7.3.4 Conservation de la structure d'hyperforêt de contrôle

Lemme 30 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_A(a_p)(X_k) = \mathcal{D}_B(g(a_p))(X_k)$.*

Démonstration : $[a_p]$ et $[g(a_p)]$ sont deux coups successifs dans une partie zig-zag s, donc pour tout $t \in \kappa_{[g(a_p)]}$, le pointeur de contrôle de $([g(a_p)], t)$ dans s pointe vers $([a_p], u(t))$, donc $\sharp^t([a_p]) = \sharp^u([g(a_p)])$, avec la condition $u(t) \neq u(t')$ si $t \neq t'$. D'où : $\mathcal{D}_B(g(a_p))(X_k) \leq \mathcal{D}_A(a_p)(X_k)$.

Comme par ailleurs $[a_p]$ est le coup qui suit $[g(a_p)]$ dans la partie zig-zag $\check{s}$, on a aussi $\mathcal{D}_A(a_p)(X_k) \leq \mathcal{D}_B(g(a_p))(X_k)$. □

On construit une fonction $\Psi : \mathcal{R}_A^+ \to \mathcal{R}_B^+$ en étendant la fonction $\psi : quant_A^+(a_p) \to quant_B^+(g(a_p))$ définie dans la section précédente à tous les nœuds a_p. On a donc : $g(\mathcal{T}(b)) = \mathcal{T}(\Psi(b))$ pour tout $b \in \mathcal{R}_A^+$. Il reste à prouver :

Lemme 31 *Pour tout $b_j \in \mathcal{R}_A^+$, $\mathcal{S}(b_j)(a_p) = \mathcal{S}(\Psi(b_j))(a_p)$.*

La démonstration de ce lemme est encore une fois similaire à celle du cas sans contrôle, mais elle requiert un peu plus de prudence, liée au fait que $\mathcal{S}(b_j)(a_p)$ a cette fois une valeur dans $\mathbb{N}$, et non plus seulement dans $\{0,1\}$.

Démonstration : On prouve ce lemme par l'absurde. On suppose par exemple que $k = \mathcal{S}(b_j)(a_p) > \mathcal{S}(\Psi(b_j))(g(a_p)) = k'$. Prenons le cas où p est pair et considérons les parties $s_1 = [a_1][g(a_1)][g(a_2)][a_2]...[g(a_p)][a_p] \in \tau$ et $s_2 = [g(a_1)][a_1][a_2][g(a_2)]...[a_p][g(a_p)] \in \sigma$. Soit N un entier naturel tel que $N \geq Card(\mathcal{O}_B)+1$, et H l'arène définie par : $H = H_N$ avec $H_0 = \bot$ et $H_{n+1} = H_n \to \bot$.

Supposons enfin que b_j soit instancié dans $[a_p]$ par le J_1-ième symbole $\star^H$, et que le niveau de cette occurrence de H soit le coup $[a_k]$ (avec nécessairement $k \leq i$). Par construction de Ψ, $\Psi(b_j)$ est nécessairement instancié dans $[g(a_p)]$ par H, au niveau du coup $[g(a_k)]$. On suppose que $\Psi(b_j)$ est instancié dans $[g(a_p)]$ par le J_2-ième symbole $\star^H$. Alors on note T la partie obtenue à partir de s_1 de la manière suivante (où $m \mapsto m\{j := H\}$ est défini comme à la section 5.6) :

- chaque coup $[a_l]$ avec $l \geq k$ est remplacé par $[a_l]' = [a_l]\{J_1 := H_0\}$
- chaque coup $[g(a_l)]$ avec $l \geq k$ est remplacé par $[g(a_l)]' = [g(a_l)]\{J_1 := H_0\}$.

On a $\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(s_1)$, donc les valeurs prises par F_1 sur cette partie sont les mêmes que précédemment, et donc on a $T \in \tau$.

Notons $c_1, \ldots, c_N$ les occurrences de H_0, avec $\vdash c_1$ et $c_i \vdash c_{i+1}$ si $1 \leq i < N$. On a alors $[a_p]' = M[t_1 := m_1, \ldots, t_n := m_n, u_1 := c_1, \ldots, u_k := c_1]$ où $\kappa_{a_p} = \{t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_k\}$ et $LLL_A(a_p, u_j)$, pour $j \in [1,k]$, génère b_i par la construction d'hyperforêt de contrôle. On note $K = \{u_1, \ldots, u_k\}$.

Pour tout $t \in K$, Comme $TM|_t[c_2] \in \mathcal{P}_{B\to A}$, il existe un coup m^t tel que $TM|_t[c_2]m^t \in \tau$, avec $[a_p] \vdash m^t$ par propriété des parties zig-zag. On peut prouver, comme précédemment, qu'il existe une bijection entre les ensembles d'arènes instanciées aux niveaux de $M|_t[c_2]$ et de m^t, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune arène instanciée au niveau de m^t. m^t s'écrit alors soit sous la forme $m^t = [d]'$ avec $d \in \mathcal{O}_B$, $a_p \vdash d$ et $quant^+_B(d) = \emptyset$, soit sous la forme $m^t = M'|_u[c_2]$ où $\mathcal{A}(M') = g(a_p)$ et $LLL_A(g(a_p), u)$ génère b_i par la construction d'hyperforêt de contrôle. Le fait que $\mathcal{S}(\Psi(b_j))(g(a_p)) = k' < k$ signifie que l'on a seulement k' coups m^t distincts que l'on peut construire sous cette deuxième forme. Or m^t et $m^{t'}$ doivent être distincts si $t \neq t'$ (car $\tilde{T}m^tM|_t[c_2] \in \sigma$) donc il existe au moins une valeur de t pour laquelle $m^t = [d]'$ avec $d \in \mathcal{O}_B$.

Soit $S = \check{T}$, on a $S\ [d]'M|_t[c_2] \in \sigma$, $S\ [d]'M|_t[c_2]M|_t[c_3] \in \mathcal{P}_{A\to B}$ donc

$$S\ [d]'M|_t[c_2]M|_t[c_3]m' \in \sigma$$

pour un certain m'. On a alors deux cas :

- soit $m' = M'|_t[c_2]$, avec $[d] = M'[t_1 := m_1, \ldots, t_n := m_n, t_{n+1} := c_1]$: dans ce cas on avait nécessairement $d \in \mathcal{S}(\Psi(b_j))$. Mais alors on construit une suite de parties définies par :

$$
\begin{array}{c}
T\ M|_t[c_2]M|'_t[c_1]M|'_t[c_2]M|_t[c_3] \in \tau \\
S\ M|'_t[c_1]M|_t[c_2]M|_t[c_3]M|'_t[c_2]M|'_t[c_3]M|_t[c_4] \in \sigma \\
T\ M|_t[c_2]M|'_t[c_1]M|'_t[c_2]M|_t[c_3]M|_t[c_4]M|'_t[c_3]M|'_t[c_4]M|_t[c_5] \in \tau \\
\ldots \\
T\ M|_t[c_2]M|'_t[c_1]\ldots M|'_t[c_{2k}]M|_t[c_{2k+1}] \in \tau \\
S\ M|'_t[c_1]M|_t[c_2]\ldots M|'_t[c_{2k+1}]M|_t[c_{2k+2}] \in \sigma \\
\ldots
\end{array}
$$

Finalement, on en vient à devoir trouver un coup justifié par $M|_t[c_N]$, ce qui est impossible.

- soit $m' = [e]'$ avec $e \in \mathcal{O}_B$, $d \vdash e$ et $quant^+_B(e) = \emptyset$. On peut alors construire une suite de parties de la façon suivante :
  - $S\ [d]'M|_t[c_2]M|_t[c_3][e]' \in \sigma$
  - $T\ M|_t[c_2][d]'[e]'M|_t[c_3]M|_t[c_4]m'_4 \in \tau$ où $m'_4 = [e_4]'$ avec : $e_4 \in \mathcal{O}_B$, $e \vdash e_4$ et $quant^+_B(e_4) = \emptyset$: le cas $m'_4 = M|'_t[c_2]$ est envisageable, mais on peut montrer qu'il mène à une contradiction, par le même raisonnement que ci-dessus
  - ...
  - $T\ [d]'M|_t[c_2]\ldots M|_t[c_{2k+1}][e_{2k+1}]' \in \sigma$ avec : $e_{2k+1} \in \mathcal{O}_B$, $e_{2k} \vdash e_{2k+1}$ et $quant^+_B(e_{2k+1}) = \emptyset$
  - $S\ M|_t[c_2][d]'\ldots M|_t[c_{2k+2}][e_{2k+2}]' \in \tau$ avec : $e_{2k+2} \in \mathcal{O}_B$, $e_{2k+1} \vdash e_{2k+2}$ et $quant^+_B(e_{2k+2}) = \emptyset$
  - ...

  Si on note $a_p = e_1$, $d = e_2$ et $e = e_3$, on obtient une suite d'occurrences de $\mathcal{O}_B$, de longueur N et telle que $e_i \vdash e_{i+1}$ pour $1 \leq i < N$: c'est impossible par définition de N.

□

Finalement, on a obtenu deux bijections $g : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ et $\Psi : \mathcal{R}^+_A \to \mathcal{R}^+_B$ telles que :
- $a \vdash a'$ ssi $g(a) \vdash g(a')$
- $\mathcal{D}_B \circ g = \mathcal{D}_A$
- $\mathcal{T} \circ \Psi = g \circ \mathcal{T}$
- $\mathcal{S} \circ \Psi = g \circ \mathcal{S}$

d'où $g(\mathcal{R}_A) = \mathcal{R}_B$, ce qui achève la preuve du théorème 10.

7.3.5 Caractérisation des isomorphismes de types

On définit le système équationnel suivant :

$$
\begin{array}{rcll}
A \times \top & \simeq_{\parr} & A & \\
\forall X.\top & \simeq_{\parr} & \top & \\
\top \to A & \simeq_{\parr} & A & \\
A \to \top & \simeq_{\parr} & \top & \\
\top \parr A & \simeq_{\parr} & \top & \\
\bot \parr A & \simeq_{\parr} & A & \\
A \times B & \simeq_{\parr} & B \times A & \\
A \parr B & \simeq_{\parr} & B \parr A & \\
A \times (B \times C) & \simeq_{\parr} & (A \times B) \times C & \\
A \parr (B \parr C) & \simeq_{\parr} & (A \parr B) \parr C & \\
A \to (B \to C) & \simeq_{\parr} & (A \times B) \to C & \\
(A \to B) \parr C & \simeq_{\parr} & A \to (B \parr C) & \\
(A \times B) \parr C & \simeq_{\parr} & (A \parr C) \times (B \parr C) & \\
\forall X.\forall Y.A & \simeq_{\parr} & \forall Y.\forall X.A & \\
\forall X.(A \times B) & \simeq_{\parr} & \forall X.A \times \forall X.B & \\
(\forall X.A) \parr B & \simeq_{\parr} & \forall X.(A \parr B) & \text{si } X \notin FTV(B)
\end{array}
$$

On va montrer, en utilisant le théorème 10, que ce système caractérise exactement les isomorphismes de types de $\lambda\mu 2$.

Sur la grammaire des types de $\lambda\mu 2$, on considère :

- des produits d'arité n : $\prod_{i=1}^{n} M_i = ((M_1 \times M_2) \times \dots) \times M_n$
- des disjonctions d'arité n : $\parr_{i=1}^{n} M_i = ((M_1 \parr M_2) \parr \dots) \parr M_n$ ($\parr_{i=1}^{n} M_i = \bot$ si $n = 0$)
- des quantifications d'arité n : $\overrightarrow{\forall X}_M = \forall X_{i_1} \dots \forall X_{i_n}$ si $M = \{i_1, \dots, i_n\}$.

Définition 86 (forme canonique) *Une formule A du second ordre est appelée **forme canonique non triviale** si elle s'écrit :*

$$A = \prod_{i=1}^{n} \overrightarrow{\forall X}_{M_i}.N_i$$

avec $n > 0$, où chaque N_i est soit de la forme $\alpha_i = \parr_{j=1}^{m} X_{k_j}$, soit de la forme $A_i \to \alpha_i$ avec A_i forme canonique, $A_i \neq \top$ et $\alpha_i = \parr_{j=1}^{m} X_{k_j}$.

*Une **forme canonique** est soit la formule $\top$, soit une forme canonique non triviale.*

Lemme 32 *Soit A un type de $\lambda\mu 2$. Il existe une forme canonique A' telle que $A \simeq_{\parr} A'$.*

Démonstration : Par associativité de $\times$, $\parr$ et $\forall$ dans $\simeq_{\parr}$, on peut se restreindre aux produits, disjonctions et quantifications d'arité n.

Modulo α-renommage des variables de type, les formes canoniques sont les formes normales du système de réécriture suivant :

$$\begin{array}{cc}
A \times (B \times C) \Rightarrow (A \times B) \times C & \\
(A \times B) \parr C \Rightarrow (A \parr B) \times (B \parr C) & A \parr \bot \Rightarrow A \\
(A \rightarrow B) \parr C \Rightarrow A \rightarrow (B \parr C) & \bot \parr A \Rightarrow A \\
A \rightarrow (B \times C) \Rightarrow (A \rightarrow B) \times (A \rightarrow C) & \top \parr A \Rightarrow \top \\
A \rightarrow (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \times B) \rightarrow C & A \parr \top \Rightarrow \top \\
(\forall X.A) \parr B \Rightarrow \forall X.(A \parr B) & A \times \top \Rightarrow A \\
\forall X.(A \times B) \Rightarrow (\forall X.A) \times (\forall X.B) & \top \times A \Rightarrow A \\
A \rightarrow \forall X.B \Rightarrow \forall X.(A \rightarrow B) & A \rightarrow \top \Rightarrow \top \\
\forall X.\top \Rightarrow \top &
\end{array}$$

Ce système de réécriture est cohérent avec $\simeq_{\parr}$, c'est-à-dire que si $A \Rightarrow A'$ alors $A \simeq_{\parr} A'$. Pour montrer que ce système termine, on définit une fonction ψ qui associe à chaque type du second ordre A un entier naturel $\psi(A) \geq 2$:

$$\psi(A \times B) = \psi(A) + 2\psi(B) + 1$$
$$\psi(\forall X.A) = 2\psi(A)$$
$$\psi(A \rightarrow B) = \psi(A)\psi(B) + 1$$
$$\psi(A \parr B) = 2^{\psi(A)\psi(B)}$$
$$\psi(\top) = \psi(\bot) = \psi(Y) = 4$$

où Y est une variable de type.

Pour chaque règle de réécriture $A \Rightarrow A'$, on a bien $\psi(A) > \psi(A')$. □

Proposition 35 *Si A et B sont deux formules de $\lambda\mu 2$ telles que H_A et H_B sont isomorphes, alors $A \simeq_{\parr} B$.*

Démonstration : On note $g : \mathcal{F}_A \rightarrow \mathcal{F}_B$ et $\Psi : \mathcal{R}_A \rightarrow \mathcal{R}_B$ les deux bijections associé à l'isomorphisme entre H_A et H_B. On suppose que A et B sont déjà sous forme canonique, on va montrer que ces deux formes canoniques sont égales modulo $\simeq_\varepsilon$, par induction sur la structure de H_A :

- Si H_A est vide, alors H_B est vide et $H_A \simeq_\varepsilon H_A$.
- Si H_A est un arbre tel qu'aucune hyperarête n'ait la racine pour cible, alors il en est de même pour H_B. Dans ce cas, A est de la forme α ou $A' \rightarrow \alpha$ avec $\alpha = \bigparr_{j=1}^{m} X_{k_j}$ et $H_{A'}$ non vide : en effet, si $A = A_1 \times A_2$ alors $\mathcal{O}_A$ contient au moins deux occurrences initiales, donc H_A n'est pas un arbre ; et si $A = \forall X_M.A' \rightarrow \alpha_i$ alors toutes les occurrences de $\mathcal{O}_A$ sont de la forme $\star a$, donc au moins une hyperarête de H_A pointe sur la racine.
  Donc nécessairement $B = \beta$ (dans le cas où $A = \alpha$) ou $B = B' \rightarrow \beta$ avec $H_{B'}$ non vide (dans le cas où $A = A' \rightarrow \alpha$), et comme $\mathcal{D}_B \circ g = \mathcal{D}_A$ on a $\beta \simeq_{\parr} \alpha$. Par ailleurs, dans le cas où $A = A' \rightarrow \alpha$, on peut construire à partir de g une bijection entre $H_{A'}$ et $H_{B'}$ qui respecte le structure d'hyperforêt. D'où par hypothèse d'induction $A' \simeq_{\parr} B'$, donc $A \simeq_{\parr} B$.

- Si H_A est un arbre, de racine r, avec $quant^+(r) = \{b_1, \dots, b_n\}$, alors H_B est aussi un arbre, de racine r', avec $quant^+(r') = \{b'_1, \dots, b'_n\}$. Dans ce cas, on a $A = \forall X_1 \dots \forall X_n.A'$ avec $A' = \alpha$ ou $A' = A'' \to \alpha$ pour $\alpha = \bigparr_{j=1}^{m} X_{k_j}$ et $H_{A''}$ non vide : en effet, si $A = A_1 \times A_2$ alors H_A ne peut être un arbre, et par ailleurs si $A = \forall X_1 \dots \forall X_k.\alpha$ ou $A = \forall X_1 \dots \forall X_k.A' \to \alpha$ avec $\alpha = \bigparr_{j=1}^{m} X_{k_j}$, alors l'unique occurrence initiale de $\mathcal{O}_A$ est nécessairement de la forme $\star \cdots \star \langle a_1, a_2 \rangle$ avec k symboles $\star$, donc on a k hyperarêtes de cible r, donc $k = n$; au passage cela nous permet de constater qu'on peut associer à chaque X_i une hyperarête b_i.
  On a aussi $B = \forall Y_1 \dots \forall Y_n.B'$ avec $B' = \beta$ ou $B' = B'' \to \beta$ pour $\beta = \bigparr_{j=1}^{m'} X_{k'_j}$ et $H_{B''}$ non vide (on choisit les X_i et les Y_i frais par rapport aux variables libres de A et celles de B). Par α-renommage, on peut choisir les variables Y_i telles que : si X_k est la variable associée à l'hyperarête b_i, alors la variables associée à $\Psi(b_i)$ est X_k.
  $H_{A'}$ (resp. $H_{B'}$) est obtenu à partir de H_A (resp. H_B) de la manière suivante : on supprime les hyperarêtes $b_1, \dots, b_n$ (resp. $b'_1, \dots, b'_n$) et la racine r (resp. r'), on renomme les autres nœuds, et enfin pour chaque nœud c on pose $\mathcal{D}_{A'}(c)(X_k) = \mathcal{S}(b_i)(c)\mathcal{S}(b_i)$ (resp. $\mathcal{D}_{B'}(c)(X_k) = \mathcal{S}(\Psi(b_i))(c)$) où X_k est la variable associée à l'hyperarête b_i. En utilisant l'égalité $\mathcal{S} \circ \Psi = g \circ \mathcal{S}$, on voit que $H_{A'}$ et $H_{B'}$ sont isomorphes. D'où par hypothèse d'induction $A' \simeq_{\parr} B'$, donc $A \simeq_{\parr} B$ par commutativité des quantificateurs.
- Si H_A contient $k \geq 2$ arbres, alors $A = ((A_1 \times A_2) \times \cdots \times A_{k-1}) \times A_k$ avec H_{A_i} arbre pour $1 \leq i \leq k$: en effet, si $A = ((A_1 \times A_2) \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$ avec H_{A_i} arbre alors H_A contient n racines, d'où $n = k$.
  On a donc aussi $B = ((B_1 \times B_2) \times \cdots \times B_{k-1}) \times B_k$. L'isomorphisme entre H_A et H_B nous assure qu'on peut trouver une permutation $\phi : [1, k] \to [1, k]$ telle que, pour tout $1 \leq i \leq k$, $H_{A_{\phi(i)}}$ et H_{B_i} soient isomorphes. Par hypothèse d'induction, cela implique $A_{\phi(i)} \simeq_{\parr} B_i$, donc par commutativité du produit on a $A \simeq_{\parr} B$.

$\square$

Théorème 11 *Deux formules A et B sont isomorphes dans $\lambda\mu 2$ si et seulement si $A \simeq_{\parr} B$.*

Démonstration : On montre facilement que si $A \simeq_{\parr} B$ alors A et B sont isomorphes : il suffit de construire un terme qui réalise chaque isomorphisme. Par exemple, l'isomorphisme de types entre $A \parr (B \parr C)$ et $(A \parr B) \parr C$ est :

$$\begin{cases} \vdash t : A \parr (B \parr C) \to (A \parr B) \parr C \\ \vdash u : (A \parr B) \parr C \to A \parr (B \parr C) \end{cases}$$

avec

$$t = \lambda x^{A \parr (B \parr C)}.\mu(\alpha_2^{A \parr B}, \beta_1^C).[\alpha_2]\mu(\alpha_0^A, \alpha_1^B).[\alpha_1, \beta_1]\mu\beta_0^{B \parr C}.[\alpha_0, \beta_0]x$$

et

$$u = \lambda x^{(A \parr B) \parr C}.\mu(\alpha_1^A, \alpha_2^{B \parr C}).[\alpha_2]\mu(\beta_1^B, \beta_0^C).[\alpha_1, \beta^1]\mu\alpha_0^{A \parr B}.[\alpha_0, \beta_0]x$$

Pour la réciproque, considérons deux termes $u : A \to B$ et $v : B \to A$ tels que $u \circ v = id_B$ et $v \circ u = id_A$. Leur interprétation dans le modèle des jeux du second ordre avec contrôle nous donne deux stratégies uniformes σ_u et σ_v telles que $\sigma_v; \sigma_u = id_B$ et $\sigma_u; \sigma_v = id_A$. On a donc un isomorphisme de jeux entre (les arènes) A et B, d'où $H_A \simeq H_B$. Donc $A \simeq_{\parr} B$. □

On est aussi capable de déduire du théorème 10 une caractérisation des isomorphismes de types pour des systèmes plus petits que $\lambda\mu 2$.

C'est le cas bien sûr pour le système F à la Church, puisque le théorème 10 est en fait une généralisation de ce qu'on avait obtenu dans un modèle sans contrôle. Mais c'est aussi le cas pour le système $\lambda\mu^\forall$, obtenu à partir de $\lambda\mu 2$ en supprimant le constructeur $\parr$ de la grammaire des types, et les constructeurs $[\alpha, \beta]t$ et $\mu(\alpha^A, \beta^B).t$ de la grammaire des termes, ainsi que les règles de typage et les égalités associées à ces constructeurs.

$\lambda\mu 2^\forall$ est donc le système obtenu en ajoutant des règles pour le second ordre au $\lambda\mu$-calcul "usuel". On a le résultat suivant :

Proposition 36 *Les isomorphismes de types dans $\lambda\mu^\forall$ sont caractérisé par le système équationnel $\simeq_\varepsilon$ (défini à la section 5.6.5) : ce sont donc les mêmes que ceux du système F à la Church.*

Démonstration : Comme $\lambda\mu^\forall$ contient le système F à la Church, toutes les égalités du système $\simeq_\varepsilon$ sont bien des isomorphismes de types dans $\lambda\mu^\forall$.

D'autre part, comme $\lambda\mu^\forall$ est inclus dans $\lambda\mu 2$, notre modèle est aussi un modèle de $\lambda\mu^\forall$. Grâce au théorème 10, il suffit de vérifier que si deux types A et B, construits à partir de la grammaire de types de $\lambda\mu^\forall$, sont tels que H_A et H_B sont isomorphes, alors $A \simeq_\varepsilon B$. Or c'est exactement ce que dit le théorème 14, étant donné que $\lambda\mu^\forall$ a la même grammaire de types que le système F à la Church. □

Chapitre 8

Extensions et perspectives

Nous avons décrit dans cette thèse un modèle de jeux souple et compact du système F à la Church. Deux autres variantes du système F ont aussi été étudiées : le système F à la Curry, pour lequel on n'a pas obtenu un modèle mais une interprétation d'une précision satisfaisante, et le système F à la Church avec disjonction classique, pour lequel on a donné une interprétation catégorique avant de définir le modèle de jeux.

Dans chaque cas, l'apport fondamental de notre travail a été de montrer la caractérisation des isomorphismes de types par un système équationnel. Dans le cas du système F à la Church, il s'agissait de retrouver le résultat de Roberto Di Cosmo [DC95] par une approche géométrique. Dans le cas du système F à la Curry, on a trouvé un résultat de caractérisation en enrichissant le système de Di Cosmo d'une nouvelle équation, non triviale :

$$\forall X.A \simeq_{Cu} A[\forall Y.Y/X] \qquad \text{si } X \notin Neg_A$$

Enfin, pour le système F à la Church avec disjonction classique, il s'agissait d'étendre le résultat par les équations attendues.

On va maintenant donner quelques perspectives à ce travail. Certaines seront des extensions, plus ou moins ambitieuses, de nos résultats. D'autres seront de véritables nouvelles directions de recherche, pour lesquelles règne encore un flou prometteur...

8.1 Extensions triviales

Le prolongement le plus naturel de notre travail de thèse consiste à étendre nos résultats à d'autres langages, en particulier des langages qui enrichissent le système F (à la Church) avec de nouveaux constructeurs pour lesquels la sémantique des jeux a déjà fait preuve de son adéquation. Certaines de ces extensions seront gratuites, au sens où il suffit de modifier quelque peu le modèle, et de vérifier que la preuve fondamentale fonctionne toujours, pour obtenir la caractérisation des isomorphismes de types dans ce langage enrichi.

La première extension naturelle est l'ajout d'un combinateur de point fixe, c'est-à-dire d'un constructeur Y muni de la règle de typage

$$(Y)\ \frac{}{\vec{X};\Gamma \vdash Y : (A \to A) \to A}$$

avec l'égalité suivante :

$$t(Yt) = Yt$$

On sait que l'ajout de ce combinateur revient, dans la sémantique des jeux, à considérer des stratégies non totales [HO00]. Or notre modèle n'imposait pas la totalité des stratégies : cette condition est utile pour prouver notre résultat sur les isomorphismes, mais il se trouve justement qu'étant donné un couple (σ, τ) de stratégies réalisant un isomorphisme, on peut prouver que σ et τ sont totales (cf. la démonstration du théorème 6). Il n'y a donc pas besoin de modifier notre modèle, ni la démonstration de notre résultat, pour prouver que les isomorphismes dans ce langage enrichi sont les mêmes que dans le système F à la Church.

Une autre extension gratuite concerne l'ajout de références au calcul, comme dans le langage *Idealised Algol* [Rey97]. On sait qu'en sémantique des jeux cette fonctionnalité correspond au remplacement de l'innocence par la propriété plus faible de *visibilité* [AM97] :

Définition 87 (stratégie visible) *Une stratégie σ est **visible** si, pour tout $sm \in \sigma$, le coup qui justifie m dans s est dans $\ulcorner s \urcorner$.*

Il se trouve que la démonstration du résultat d'Olivier Laurent (cf. 3.4) n'utilise que la visibilité des stratégies, et non leur innocence, et il en est bien sûr de même pour notre preuve dans le cas à la Church. Par ailleurs, si la définition de l'uniformité donnée à la section 5.3 fait appel à l'innocence, cela n'est en fait pas nécessaire : on pourrait définir une stratégie uniforme σ à partir de sa stratégie symbolique $\bar{\sigma}$ en considérant tous les entrelacements possibles d'extensions des parties de $\bar{\sigma}$.

Donc notre résultat sur les isomorphismes de types à la Church est aussi généralisable à un calcul avec références, et le système équationnel ne change pas.

8.2 Extension vers ML

Dans un registre plus ambitieux, on pourrait envisager de faire le même travail pour le système ML [Mil84]. Les isomorphismes de types dans ce langage ont été caractérisés par Di Cosmo [DC95] en utilisant des techniques syntaxiques. Le système équationnel obtenu est le suivant :

$$\begin{array}{rcll}
A \times B & \simeq_{ML} & B \times A & \\
A \times (B \times C) & \simeq_{ML} & (A \times B) \times C & \\
A \to (B \to C) & \simeq_{ML} & (A \times B) \to C & \\
A \to (B \times C) & \simeq_{ML} & (A \to B) \times (A \to C) & \\
A \times \top & \simeq_{ML} & A & \\
\top \to A & \simeq_{ML} & A & \\
A \to \top & \simeq_{ML} & \top & \\
\forall X.\top & \simeq_{ML} & \top & \\
\forall X.\forall Y.A & \simeq_{ML} & \forall Y.\forall X.A & \\
\forall X.(A \times B) & \simeq_{ML} & \forall X \forall Y.A \times B[Y/X] & \text{si } Y \notin FTV(B)
\end{array}$$

Les types de ML sont beaucoup plus simples que ceux du système F : les quantifications apparaissent toujours en tête du type. Mais les choses se compliquent au niveau des règles de typage, qui sont très dépendantes de la scission de la grammaire des types entre *monotypes* (qui n'utilisent pas de quantificateurs) et *schémas de types* (qui utilisent des quantificateurs en tête). L'impact de cette scission au niveau d'un modèle de jeux reste à explorer.

Pour retrouver le résultat de Di Cosmo avec notre méthode, il faut donc résoudre les problèmes suivants :
- définir un modèle du langage ML, avec une compréhension satisfaisante de la distinction entre monotypes et schémas de types
- donner une formulation géométrique des isomorphismes décrits par le système ci-dessus
- montrer qu'un isomorphisme entre deux types génère nécessairement une invariance vis-à-vis de cette structure géométrique.

8.3 Autour de l'uniformité : liens avec l'innocence

La propriété d'uniformité comporte des similitudes intéressantes avec la propriété d'innocence définie pour les jeux HO. En effet, dans les deux cas :
- on fixe tout d'abord une restriction simple au comportement d'Opposant : dans le cas de l'innocence il doit toujours pointer sur le coup précédent, dans le cas de l'uniformité il doit jouer uniquement des arènes de copycat
- on obtient les stratégies qui correspondent à la syntaxe (ensemble de vue dans le cas de l'innocence, stratégie symbolique dans le cas de l'uniformité)
- mais ces stratégies restreintes ne composent pas
- les stratégies innocentes ou uniformes sont des extensions de ces stratégies, qui composent correctement.

Ainsi, uniformité et innocence partagent, au moins lorsqu'elles sont décrites sous cette forme, une structure commune. Par ailleurs, dans ses travaux sur l'innocence [Mel04], Paul-André Mélliès a noté que l'innocence telle qu'elle est apparaît dans les modèles de jeux AJM [AJM00] peut en réalité se décomposer en deux parties : une partie proprement *innocence*, qui revient sensiblement au même que l'innocence dans les jeux HO, et une partie qu'il appelle aussi *uniformité*, qui correspond à l'indépendance de la stratégie par rapport à l'indexation des coups qu'il joue ; par souci de clarté, on appellera cette dernière propriété l'*AJM-uniformité*. Mélliès a même développé dans [Mel04] une syntaxe de λ-calcul correspondant à des stratégies innocentes mais non AJM-uniformes.

Or l'AJM-uniformité peut être présentée de la même façon que l'innocence et l'uniformité : la restriction sur les coups d'Opposant est de jouer toujours un indice déjà joué, ou l'indice $j+1$ avec j plus grand indice déjà joué. Ainsi, AJM-uniformité, innocence et uniformité sont trois propriétés qui portent sur la capacité d'une stratégie à ne dépendre que d'une portion de l'information (les parties où Opposant joue suivant la restriction), donc à jouer **indépendamment** de certains facteurs.

À partir de ce rapprochement entre ces trois propriétés, on est conduit à se poser les questions suivantes :

- Peut-on reformuler l'uniformité d'une façon plus géométrique, comme cela a été fait dans le cas de l'innocence, via les actions de groupes [Mel04] ou les graphes [Mel04] ?
- Est-il possible de formuler une théorie générale de l'indépendance des stratégies en fonction du comportement d'Opposant, dans laquelle on pourrait reconnaître ces trois constructions ?
- Pourquoi et comment l'extension des stratégies qui correspondent à la syntaxe nous donne-t-elle des stratégies qui composent correctement, avec à chaque fois une preuve non triviale ?

Ces questions n'ont pas été traitées au cours de cette thèse, mais constituent une perspective qui la prolonge clairement.

8.4 Système F à la Curry et type $\top$

Comme expliqué dans la section 2.2, on a considéré dans cette thèse un système F à la Curry sans type $\top$, pour des raisons d'homogénéité des égalités (celles-ci doivent pouvoir être exécutées indépendamment de tout typage). Cela justifie qu'au chapitre 6 on ait imposé à nos arènes d'avoir un ensemble d'occurrences initiales non vide.

Considérons cependant pour un moment ce qui se passerait si on cherchait à modéliser le système F à la Curry avec un type $\top$ (et l'égalité correspondante). On constaterait alors qu'autoriser à jouer des arènes vides (qui correspondraient à un type $\top$) dans la modélisation définie au chapitre 6 aurait pour conséquence l'apparition de nouveaux isomorphismes de jeux, comme par exemple : $\forall X.(X \to \bot) \simeq \bot$.

Un tel isomorphisme n'existe pas dans le système F à la Curry, même si on ajoute le type $\top$: on peut donc s'interroger sur la pertinence de la modélisation vis-à-vis de la syntaxe ! En fait, la différence entre les deux provient de la notion d'homogénéité des égalités : dans les jeux toute égalité doit être indépendante des arènes, tandis que dans le système F à la Curry augmenté du type $\top$ l'égalité dépend du contexte de typage (à cause de la règle $\Gamma \vdash t = \star : \top$). Il est donc logique que nos jeux autorisent trop d'égalités, et, partant, trop d'isomorphismes, par rapport à la syntaxe.

Deux questions restent donc en suspens :

- la caractérisation des isomorphismes dans les jeux dans le cas où on a le droit de jouer une arène vide ; mais comme certains de ces isomorphismes ne correspondent à rien dans la syntaxe, la question n'est pas forcément très pertinente
- la caractérisation des isomorphismes du système F à la Curry avec type $\top$: pour les raisons d'homogénéité des égalités évoquées ci-dessus, il semble difficile de résoudre cette question par une étude sémantique. On peut cependant conjecturer que le type $\top$ n'entraîne pas de nouvelles équations autres que celles données par les isomorphismes à la Church :

$$\begin{array}{rcl} A \to \top & \simeq_\varepsilon & \top \\ \top \to A & \simeq_\varepsilon & \top \\ \top \times A & \simeq_\varepsilon & A \\ \forall X.\top & \simeq_\varepsilon & \top \end{array}$$

8.5 Rétractions

Une autre extension naturelle mais non triviale de notre travail sur les isomorphismes de types est l'étude des rétractions, c'est-à-dire le cas où les deux morphismes $f : A \to B$ et $g : B \to A$ composent pour donner l'identité seulement dans un sens : $g \circ f = id_A$ (on note alors $A \trianglelefteq B$).

Une rétraction de A vers B signifie que le type A peut être plongé dans le type B, puis en être réextrait sans que cela affecte son contenu calculatoire : dans un certain sens, A doit être contenu dans B. Si on l'envisage comme une relation de sous-typage, la notion de rétraction a des conséquences peu usuelles : par exemple, si B est un type habité, A est alors un sous-type de $B \to A$ (en effet, un terme de type A peut être vu comme une fonction constante de type $B \to A$), et de $A \times B$. D'une certaine façon, les rétractions nous donnent la plus large relation de sous-typage acceptable.

Très peu de résultats sont connus concernant la question des rétractions de types, même dans le cas du λ-calcul simplement typé : de'Liguoro, Piperno et Statman [dLPS92] ont caractérisé les rétractions dans un cadre linéaire et montré, dans le cadre général, que l'existence d'une rétraction de A vers B et de B vers A implique l'existence d'un isomorphisme entre A et B. Padovani [Pad01] a montré que les rétractions sur les types simples avec un seul atome sont décidables. Regnier et Urzyczyn [RU02] ont caractérisé les rétractions du λ-calcul affine.

La sémantique des jeux apparaît comme un outil pertinent pour l'exploration des rétractions : la composition dans les jeux est une opération concrète et dynamique, que l'on peut suivre étape par étape. Étudier les rétractions dans les jeux pourraient nous permettre de transformer cette question en un problème purement combinatoire. Cependant, en pratique, la présence de la duplication dans le calcul (et donc la possibilité de répéter les coups, voire de jouer sur les pointeurs) est une difficulté majeure, qui rend très difficile un résultat sémantique aussi percutant que dans le cas des isomorphismes de types.

Associer les rétractions à un invariant géométrique semble donc encore une tâche de longue haleine...

8.6 Paramétricité

La prolongation peut-être la plus ambitieuse de ce travail de thèse est l'étude du polymorphisme **paramétrique**.

La notion de paramétricité relationnelle, introduite par Reynolds [Rey83], provient historiquement de l'idée, développée par Strachey [Str00], selon laquelle une fonction polymorphe ne doit pas dépendre du type auquel elle est instanciée. Cela a conduit tout d'abord à une définition sémantique de la paramétricité relationnelle par Reynolds, puis à une formalisation syntaxique de cette notion, d'abord par Abadi-Cardelli-Curien [ACC93] puis par Plotkin-Abadi [PA93].

Dans ce dernier cas, la notion de paramétricité est incarnée par la définition d'une logique des termes, des types et des relations entre types, et par l'ajout d'un axiome appelé **schéma de paramétricité** :

$$\forall u : (\forall X.A[X]).\forall Y \forall Z.\forall \mathcal{R} \subseteq Y \times Z.u\{Y\}A[\mathcal{R}]u\{Z\}$$

En clair, cela signifie que si deux types Y et Z sont reliés par la relation $\mathcal{R}$ et que u est de type $\forall X.A[X]$, alors $u\{Y\}$ et $u\{Z\}$ sont reliés par la relation $A[\mathcal{R}]$. Or cette dernière relation peut éventuellement être une identité : c'est en cela que l'égalité dans le système paramétrique est plus forte que l'égalité du système F.

Le grand avantage des modèles paramétriques est que les constructions classiques du second ordre ont des propriétés élégantes et naturelles dans ce modèle. Ainsi, Bainbridge, Freyd, Scedrov et Scott ont prouvé dans [BFSS90] qu'un modèle paramétrique vérifiait les conditions suivantes :

- $\forall X.X \to X$ est un objet terminal
- $\forall X.(A \to B \to X) \to X$ est un produit de A et B
- $\forall X.X$ est un objet initial
- $\forall X.(A \to X) \to (B \to X) \to X$ est un coproduit de A et B.

De plus, la paramétricité permet d'obtenir des renseignements sur une fonction à partir de la simple connaissance de son type : Wadler [Wad89] les appelle “theorems for free”.

Construire un modèle de jeux paramétrique est un défi stimulant[1] : avoir des outils aussi flexibles que ceux de la sémantique des jeux au sein d'une sémantique qui interprète la paramétricité relationnelle serait d'une grande utilité pour mieux comprendre cette notion. Abramsky a proposé une notion de paramétricité relationnelle adaptée aux jeux qu'il définit dans [Abr97]. Une autre piste possible est de chercher à intégrer les jeux

[1] Étendre ensuite notre technique pour caractériser complètement les isomorphismes de types dans le polymorphisme paramétrique, c'est-à-dire notamment ceux liés aux propriétés des modèles paramétriques données ci-dessus, semble par contre hors de portée dans l'état actuel des choses.

dans une caractérisation catégorique telle que celle de Dunphy [Dun02] et ses *graphes de paramétricité*.

La propriété de **généricité** pour un type A du système F a été introduite par Longo, Milsted et Soloviev [LMS93] comme une alternative à la paramétricité relationnelle, peut-être plus proche des intuitions originelles de Strachey [Str00]. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$\text{si } \vec{X};\Gamma \vdash t : \forall X.T \text{ et } \vec{X};\Gamma \vdash u : \forall X.T \text{ avec } \vec{Y};\Gamma \vdash t\{A\} = u\{A\} : T[A/X] \text{ alors } t = u$$

Elle n'est pas vraie dans le système F, mais en découle si on ajoute l'axiome (C) :

$$t\{A\} = t\{B\} \qquad \text{si } \vec{X};\Gamma \vdash t : \forall X.T \text{ et } X \notin FTV(T)$$

Ces propriétés peuvent elles aussi être attaquées sous l'angle de la sémantique des jeux, peut-être à moins de frais : en effet, alors que la paramétricité oblige à quotienter les termes par l'égalité relationnelle, la généricité peut elle être étudiée directement sur un modèle donné. Ainsi, Abramsky et Jagadeesan ont défini dans [AJ03] un modèle de jeu dans lequel la plupart des types sont génériques.

De même, la question de la **dinaturalité**, étudiée dans [BFSS90] dans le cadre du second ordre, pourrait se prêter à une modélisation intéressante en sémantique des jeux.

Pour finir, la paramétricité relationnelle semble être reliée au système F à la Curry ; si l'on en croit une conjecture d'Abadi-Cardelli-Curien qui dit la chose suivante : supposons qu'on ait deux termes de type A ayant le même effacement (c'est-à-dire le λ-terme obtenu en effaçant les indications de types, donc le terme à la Curry correspondant). Alors ils sont égaux dans le système paramétrique (la réciproque est fausse). Cela signifierait que l'égalité paramétrique est strictement plus forte que l'égalité du système F à la Curry ; l'étude dans les jeux à la fois du système à la Curry et de la paramétricité permettra peut-être d'explorer cette question plus en profondeur.

Bibliographie

[Abr97] Samson Abramsky. Semantics of interaction. In Peter Dybjer and Andrew Pitts, editors, *Semantics and Logics of Computation*, Publications of the Newton Institute, pages 1–32. Cambridge University Press, 1997.

[Abr01] Samson Abramsky. Algorithmic game semantics : A tutorial introduction. In *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute*, Kluwer Academic Publishers, pages 21–47, 2001.

[Abr03] Samson Abramsky. Sequentiality vs. concurrency in games and logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 13 :531–565, 2003.

[ACC93] Martín Abadi, Luca Cardelli, and Pierre-Louis Curien. Formal parametric polymorphism. In *Conf. Record 20th Ann. ACM SIGPLAN-SIGACT Symp. on Principles of Programming Languages, POPL'93, Charleston, SC, USA, 10–13 Jan 1993*, pages 157–170. ACM Press, New York, 1993.

[AJ94] Samson Abramsky and Radha Jagadeesan. Games and full completeness for multiplicative linear logic. *Journal of Symbolic Logic*, 59(2) :543–574, June 1994.

[AJ03] Samson Abramsky and Radha Jagadeesan. A game semantics for generic polymorphism. In Andrew D. Gordon, editor, *Foundations of Software Science and Computational Structures*, volume 2620 of *LNCS*, pages 1–22. Springer, 2003.

[AJM00] Samson Abramsky, Radha Jagadeesan, and Pasquale Malacaria. Full abstraction for PCF. *Information and Computation*, 163(2) :409–470, December 2000.

[AM97] Samson Abramsky and Guy McCusker. Linearity, sharing and state : a fully abstract game semantics for Idealized Algol. In P. O'Hearn and R.D. Tennent, editors, *Algol-like languages*, volume 227, pages 317–348. Birkhäuser, 1997.

[Bar84] Henk Barendregt. *The lambda calculus, its syntax and semantics.* Number 103 in Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, second edition, 1984.

[BC82] Gérard Berry and Pierre-Louis Curien. Sequential algorithms on concrete data structures. *Theoretical Computer Science*, 20 :265–321, 1982.

[BFSS90] E. S. Bainbridge, Peter J. Freyd, Andre Scedrov, and Philip J. Scott. Functorial polymorphism. *Theoretical Computer Science*, 70(1) :35–64, 1990.

[Bla72] Andreas Blass. Degrees of indeterminacy of games. *Fundamenta Mathematicae*, 77 :151–166, 1972.

[Bla92] Andreas Blass. A game semantics for linear logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 56 :183–220, April 1992.

[BP01] Gilles Barthe and Olivier Pons. Type isomorphisms and proof reuse in dependent type theory. In F. Honsell and M. Miculan, editors, *Foundations of Software Science and Computation Structures*, volume 2030 of *LNCS*, 2001.

[Chr03] Julius Chroboczek. *Game Semantics and Subtyping*. Ph.D. thesis, University of Edinburgh, 2003.

[DC95] Roberto Di Cosmo. *Isomorphisms of Types*. Progress in Theoretical Computer Science. Birkhäuser, 1995.

[dL07a] Joachim de Lataillade. Curry-style type isomorphisms and game semantics. To appear in *Mathematical Structures of Computer Science*, Special Issue on Type Isomorphisms, 2007.

[dL07b] Joachim de Lataillade. Second-order type isomorphisms through game semantics. To appear in *Annals of Pure and Applied Logic*, Special Issue on Game Semantics, 2007.

[dLPS92] Ugo de' Liguoro, Adolfo Piperno, and Richard Statman. Retracts in simply typed $\lambda\beta\eta$-calculus. In *Proceedings of the eleventh annual symposium on Logic In Computer Science*, pages 461–469. IEEE, IEEE Computer Society Press, 1992.

[Dun02] Brian Patrick Dunphy. *Parametricity as a notion of uniformity in reflexive graphs*. Ph.D. thesis, University of Illinois, 2002.

[Fel86] Walter Felscher. Dialogues as a foundation of intuitionistic logic. *Handbook of Philosophical Logic*, 3 :341–372, 1986.

[Gir72] Jean-Yves Girard. *Interprétation fonctionnelle et élimination des coupures de l'arithmétique d'ordre supérieur*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, 1972.

[Gir86] Jean-Yves Girard. The system F of variable types, fifteen years later. *Theoretical Computer Science*, 45 :159–192, 1986.

[Gir88] Jean-Yves Girard. Geometry of interaction I : an interpretation of system F. In Ferro, Bonotto, Valentini, and Zanardo, editors, *Logic Colloquium '88*. North-Holland, 1988.

[Har99] Russel Harmer. *Games and Full Abstraction for Nondeterministic Languages*. Ph.D. thesis, Imperial College and University of London, 1999.

[HO00] Martin Hyland and Luke Ong. On full abstraction for PCF. *Information and Computation*, 163(2) :285–408, December 2000.

[Hug00] Dominic Hughes. *Hypergame semantics : full completeness for system F*. D.Phil. thesis, Oxford University, 2000.

[Joy77] André Joyal. Remarques sur la théorie des jeux à deux personnes. *Gazette des sciences mathématiques du Québec*, 1(4), 1977.

[Klo78] Jan William Klop. A counterexample to the church-rosser property for lambda calculus with surjective pairing. Prépublication, University of Utrecht, 1978.

[Kri01] Jean-Louis Krivine. Typed lambda-calculus in classical Zermelo-Fraenkel set theory. *Archive for Mathematical Logic*, 40(3) :189–205, 2001.

[Lai97] James Laird. Full abstraction for functional languages with control. In *Proceedings of the twelfth annual symposium on Logic In Computer Science*, pages 58–67, Warsaw, June 1997. IEEE, IEEE Computer Society Press.

[Lai98] Jim Laird. *A semantic analysis of control*. Ph.D. thesis, University of Edimbourg, 1998.

[Lau02] Olivier Laurent. *Étude de la polarisation en logique*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, March 2002.

[Lau04] Olivier Laurent. Sémantique des jeux. Notes de cours de DEA de Programmation. Available at `http://www.pps.jussieu.fr/~laurent/dea/jeux.ps.gz` , 2004.

[Lau05] Olivier Laurent. Classical isomorphisms of types. *Mathematical Structures in Computer Science*, 15(5) :969–1004, October 2005.

[Lau07] Olivier Laurent. Game semantics for first-order logic. Working paper, 2007.

[Law70] F. W. Lawvere. Equality in hyperdoctrines and the comprehension schema as an adjoint functor. In *Proceedings on Applications of Categorical Logic*, 1970.

[LMS93] Giuseppe Longo, Kathleen Milsted, and Sergei Soloviev. The genericity theorem and the notion of parametricity in the polymorphic λ-calculus. In *Proc. of 8th IEEE Ann. Symp. on Logic in Computer Science, LICS'93, Montreal, Canada, 19–23 Jun. 1993*, pages 1–6. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1993.

[McC96] Guy McCusker. *Games and Full Abstraction for a Functional Metalanguage with Recursive Types*. Ph.D. thesis, Imperial College and University of London, 1996. Published in Springer-Verlag's Distinguished Dissertations in Computer Science series, 1998.

[Mel04] P. Mellies. Asynchronous games 2 : the true concurrency of innocence, 2004.

[Mil77] Robin Milner. Fully abstract models of typed *ambda*-calculi. *Theoretical Computer Science*, 4(1) :1–22, 1977.

[Mil84] Robin Milner. The standard ML core language. Internal Report CSR-168-84, University of Edinburgh, Edinburgh, 1984.

[ML84] Per Martin-Löf. *Intuitionistic Type Theory*. Bibliopolis, 1984.

[MO01] Andrzej Murawski and Luke Ong. Evolving games and essential nets for affine polymorphism. In Samson Abramsky, editor, *Typed Lambda Calculi and Applications '01*, volume 2044 of *LNCS*. Springer, 2001.

[Nic94] Hanno Nickau. Hereditarily sequential functionals. In Anil Nerode and Yuri Matiyasevich, editors, *Logical Foundations of Computer Science*, volume 813 of *LNCS*, pages 253–264. Springer, 1994.

[PA93] Gordon Plotkin and Martín Abadi. A logic for parametric polymorphism. In M. Bezem and J. F. Groote, editors, *International Conference on Typed Lambda Calculi and Applications*, pages 361–375, Utrecht, The Netherlands, 1993. Springer-Verlag.

[Pad01] Vincent Padovani. Retracts in simple types. In Samson Abramsky, editor, *Typed Lambda Calculi and Applications '01*, volume 2044 of *LNCS*, pages 376–384. Springer, May 2001.

[Par92] Michel Parigot. $\lambda\mu$-calculus : an algorithmic interpretation of classical natural deduction. In *Proceedings of International Conference on Logic Programming and Automated Reasoning*, volume 624 of *LNCS*, 1992.

[Pit88] Andrew Pitts. Polymorphism is set-theoretic constructively. In D. Pitt, editor, *CTCS*, volume 283 of *LNCS*, 1988.

[Plo77] Goron Plotkin. LCF as a programming language. *Theoretical Computer Science*, 5 :223–257, 1977.

[PR97] John Power and Edmund Robinson. Premonoidal categories and notions of computation. *Mathematical Structures in Computer Science*, 7(5) :453–468, 1997.

[PR01] David Pym and Eike Ritter. On the semantics of classical disjunction. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 159 :315–338, 2001.

[Rey74] John C. Reynolds. Towards a theory of type structure. In *Programming Symposium, Proceedings Colloque sur la Programmation*, pages 408–423, London, UK, 1974. Springer-Verlag.

[Rey83] John C. Reynolds. Types, abstraction and parametric polymorphism. In *International Federation for Information Processing Congress*, pages 513–523, 1983.

[Rey84] John C. Reynolds. Polymorphism is not set-theoretic. In *Semantics of Data Types*, pages 145–156, 1984.

[Rey97] John C. Reynolds. The essence of algol. In *ALGOL-like Languages, Volume 1*, pages 67–88. Birkhauser Boston Inc., Cambridge, MA, USA, 1997.

[Rit91] Mikael Rittri. Using types as search keys in function libraries. *Journal of Functional Programming*, 1(1) :71–89, 1991.

[RU02] Laurent Regnier and Pawel Urzyczyn. Retractions of types with many atoms. *CoRR*, cs.LO/0212005, 2002.

[Sco00] Philip Scott. Some aspects of categories in computer science. *Handbook of Algebra*, 2 :3–77, 2000.

[See87] R. A. G. Seely. Categorical semantics for higher-order polymorphic lambda-calculus. *Journal of Symbolic Logic*, 52(4) :969–989, 1987.

[Sel01] Peter Selinger. Control categories and duality : on the categorical semantics of the lambda-mu calculus. *Mathematical Structures in Computer Science*, 11 :207–260, 2001.

[Sol83] Sergei Soloviev. Category of finite sets and cartesian closed categories. *Journal of Soviet Mathematics*, 22, 1983.

[Str00] Christopher Strachey. Fundamental concepts in programming languages (réimpression d'un cours donné en 1967). *Higher-Order and Symbolic Computation*, 13(1) :11–49, 2000.

[Wad89] Philip Wadler. Theorems for free ! In *Proceedings 4th Int. Conf. on Funct. Prog. Languages and Computer Arch., FPCA'89, London, UK, 11–13 Sept 1989*, pages 347–359. ACM Press, New York, 1989.

Index

Résumé

Quantification du second ordre en sémantique des jeux - Application aux isomorphismes de types

La sémantique des jeux offre un cadre souple et précis pour l'interprétation des langages de programmation. Cette thèse l'illustre à travers d'une part l'étude de la notion de polymorphisme et son pendant logique : la quantification du second ordre, et d'autre part la caractérisation de certaines propriétés syntaxiques via les modèles de jeux.
Le polymorphisme est d'abord envisagé sous sa forme la plus usuelle, le système F à la Church. On en propose un nouveau modèle de jeux, complet, inspiré de travaux antérieurs mais dans lequel il sera cette fois possible d'effectuer des calculs. La question syntaxique de la caractérisation des isomorphismes de types peut alors être résolue à l'intérieur même de ce modèle, en prouvant l'invariance par isomorphisme d'une structure appelée hyperforêt. Cette approche sémantique permet de retrouver un résultat dû à Roberto Di Cosmo.
Une autre variante de la logique du second ordre, le système F à la Curry, est étudiée et modélisée de manière partielle mais suffisamment précise pour permettre là encore la caractérisation des isomorphismes de types par un invariant géométrique. Le système équationnel correspondant enrichit celui des isomorphismes du système F à la Church d'une nouvelle équation, non triviale.
Une extension à la logique classique des résultats obtenus pour le système F à la Church est proposée à travers la construction dans les jeux d'une hyperdoctrine de contrôle, structure catégorique adaptée à la logique du second ordre.

Mots-clés : Sémantique des jeux - Polymorphisme - Système F à la Curry - Isomorphismes de types - Hyperdoctrines - Catégories de contrôle

Abstract

Second-order quantification in game semantics - Application to type isomorphisms

Game semantics is a flexible and precise framework for interpreting programming languages. The present dissertation illustrates this fact in two ways : first by studying polymorphism and its logical counterpart : second-order quantification, and second by caracterising some syntactic properties via game models.
Polymorphism is first considered in its most usual form, Church-style system F. We propose a new, complete, game model, inspired by previous works but in which we will be able to do effective calculations. The syntactic question of characterising type isomorphisms can then be solved inside this model, by proving the invariance through isomorphism of some structure called hyperforest. This semantic approach allows to retrieve a result by Roberto Di Cosmo.
Another variant of second-order logic, namely Curry-style system F, is studied and modelised, partially but with enough precision to give once again a characterisation of type isomorphisms through a geometric invariant. The corresponding equationnal system is an enrichment of that of Church-style isomorphisms by a new, non-trivial, equation.
An extension to classical logic of the results for Church-style system F is proposed, through the construction of a game model which results in a control hyperdoctrine, ie a categorical structure suitable for second-order classical logic.

Keywords : Game semantics - Polymorphism - Curry-style system F - Type isomorphisms - Hyperdoctrines - Control categories

Discipline : Informatique
Laboratoire : Preuves, Programmes et Systèmes
Université Paris Diderot - Paris 7
Case 7014 - 75205 Paris Cedex 13