Feuille de TD n° 9 : allons un peu plus loin

Exercice 1 : quizz sur les expressions rationnelles

Dans la suite a et b désignent des lettres, et A et B des expressions rationnelles.

1. Que pensez vous des égalités suivantes (les prouver ou trouver un contre-exemple) ?
   - $(A^n)^* = (A^*)^n$, n entier ;
   - $(A^+)^* = A^*$;
   - $(A + A^n)^* = A^* + (A^*)^n$, n entier ;
   - $A^2 + B^2 = (A + B)^2$;
   - $A^* \cap B^* = (A \cap B)^*$;
   - $A(BA)^* = (AB)^*A$;
   - $(A \cup B)^* = (A^*B^*)^*$;
   - $A(B \cup C) = AB \cup AC$.
2. Simplifier les expressions régulières suivantes :
   - $(aa)^*a + (aa)^*$;
   - $(a + b)(\epsilon + aa)^+a + b$;
   - $(a + \epsilon)a^*b$.
3. Montrer les égalités suivantes :
   - $(a^2 + a^3)^* = (a^2a^*)^*$;
   - $a^*(a + b)^* = (a + ba^*)^*$;
   - $(ba)^+(a^*b^* + a^*) = (ba)^*ba^+b^*$.

Exercice 2 : débarassons-nous des ϵ-transitions

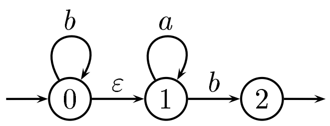

FIG. 1 – Automate $\mathcal{A}_1$

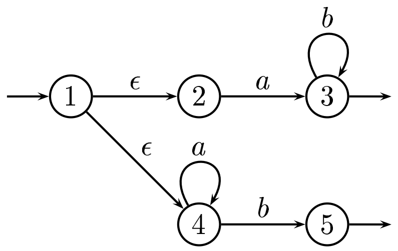

FIG. 2 – Automate $\mathcal{A}_2$

1. Quels sont les langages reconnus par les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$?
2. En vous inspirant de l'algorithme de déterminisation, proposez une méthode pour obtenir un automate fini déterministe équivalent à un automate avec ϵ-transitions.
3. Appliquez cette méthode à $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, puis vérifiez par le lemme d'Arden que le langage reconnu est bien le même.

Exercice 3 : mots infinis

On se propose de s'interroger sur la reconnaissance de mots *infinis* par des automates *finis*. On pose $A = \{a, b\}$.

1. Quelles sont les définitions les plus naturelles de la reconnaissance d'un mot infini par un automate fini ? Laquelle semble la moins restrictive ?
2. Avec cette définition, quel langage de mots infinis reconnaît l'automate $\mathcal{A}_2$ de l'exercice précédent ?
3. Construire un automate fini non déterministe reconnaissant le langage $\mathbf{X} = A^* b^\omega$.
4. Montrer qu'il n'existe pas d'automate fini déterministe reconnaissant le langage $\mathbf{X}$.