Interrogation du 18/11/04

Vous disposez de 45 minutes, aucun document n'est autorisé.
Le dernier exercice est plus difficile que les autres.

Exercice 1 :

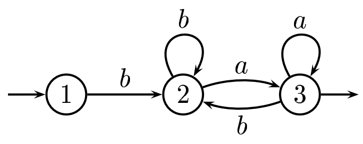
Décrire chacun des langages suivants sur l'alphabet $\mathbf{X} = \{a, b\}$ au moyen d'une expression rationnelle :

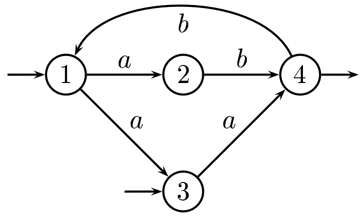
- $\mathcal{L}_1 = \{u \in \mathbf{X}^* : |u|_a = 2\}$
- $\mathcal{L}_2 = \{u \in \mathbf{X}^* : |u|_a \geq 2\}$
- $\mathcal{L}_3 = \{u \in \mathbf{X}^* : |u| \text{ est multiple de } 3\}$

Pour chacun de ces langages, construire un automate déterministe le reconnaissant.

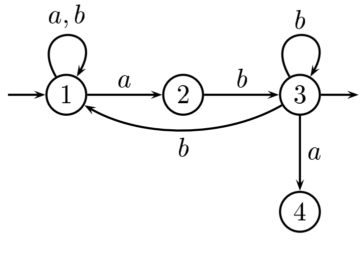
Exercice 2 :

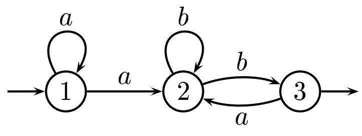
Pour chacun des automates suivants, décrire le langage reconnu sous la forme d'une expression rationnelle :





Pour chacun des automates non déterministes suivants, construire un automate déterministe reconnaissant le même langage :





Exercice 3 :

Soit $\mathcal{L}_4$ le langage décrit par l'expression rationnelle ab^*ab^*a. Combien $\mathcal{L}_4$ contient-il de mots de longueur n ? Attention à regarder les différentes valeurs possibles de n.

Exercice 4 :

On travaille sur l'alphabet $\mathbf{X} = \{a, b\}$.

Construire un automate fini (non déterministe) à $n + 1$ états reconnaissant le langage $\mathcal{L}_5 = (a + b)^* a (a + b)^{n-1}$.

On se propose de montrer que tout automate fini complet déterministe reconnaissant $\mathcal{L}_5$ possède au moins 2^n états.

Soit donc $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un tel automate fini complet déterministe. Montrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbf{X}^n & \to & Q \\ & u & \mapsto & \delta^*(i, u) \end{array}$$

est injective, et conclure.

Rappel : Dans la notation $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$, Q est l'ensemble des états, δ la fonction de transition, i l'état initial et F l'ensemble des états finaux, et on note δ^* l'extension de δ aux mots construits sur l'alphabet $\mathbf{X}$.