Correction du contrôle de TD

Exercice 1 : Circuit booléen

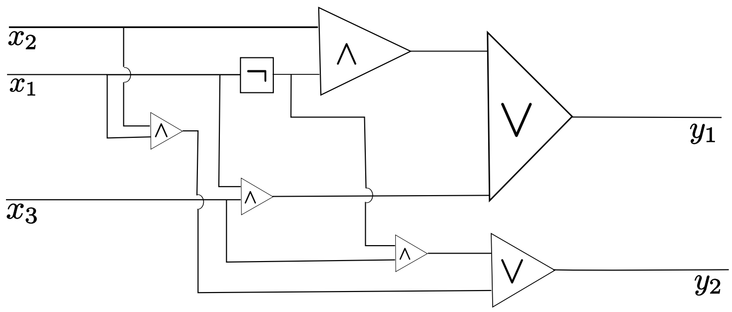
$$
\begin{array}{rcccl}
f & : & \mathbb{N}^3 & \rightarrow & \mathbb{N}^2 \\
 & & (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \begin{cases} (x_2, x_3) & \text{si } x_1 = 0 \\ (x_3, x_2) & \text{si } x_1 = 1 \end{cases}
\end{array}
$$

Pour réaliser un circuit, le plus simple est d'écrire la sortie en fonction des entrées sous forme normal **disjonctive**.

Ici :

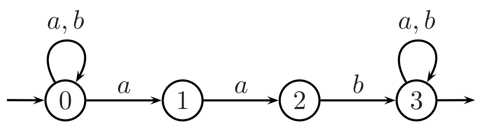
$$
\begin{array}{rcl}
y_1 & = & (x_2 \wedge \neg x_1) \vee (x_3 \wedge x_1) \\
y_2 & = & (x_3 \wedge \neg x_1) \vee (x_2 \wedge x_1)
\end{array}
$$

D'où le circuit :

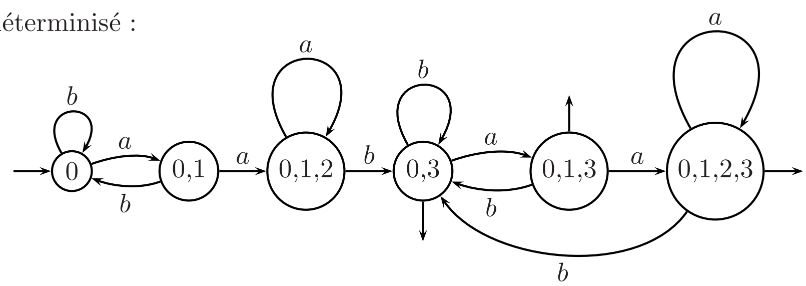


Exercice 2 : Langages et automates

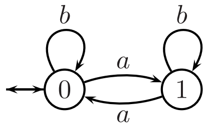
1. $\mathcal{L}_1 = \{w_1(aab)w_2 \mid \ w_1, w_2 \in A^*\}$



Automate déterminisé :



2. $\mathcal{L}_2 = \{w \in A^* \mid \ |w|_a \text{ est pair}\}$



Cet automate est déjà déterministe.

Exercice 3 : Terminaison et confluence

$$\begin{array}{ccll} w_1abaw_2 & \to & w_1babw_2 & \text{pour } w_1, w_2 \in A^* \\ w_1bbw_2 & \to & w_1bw_2 & \text{pour } w_1, w_2 \in A^* \end{array}$$

Attention : Il n' s'agit pas de deux systèmes de réécritures, mais d'un seul système, qui contient deux schémas de réduction.

1. **Terminaison :**

   Pour un mot $w \in A^*$, on considère $f(w) = (|w|_a, |w|_b)$.

   On a bien $|w_1abaw_2|_a < |w_1babw_2|_a$ et $\begin{cases} |w_1bbw_2|_a = |w_1bw_2|_a \\ |w_1bbw_2|_b < |w_1bw_2|_b \end{cases}$ pour $w_1, w_2 \in A^*$.

   Donc $f(w) <_{lex} f(w')$ si $w \to w'$.

   Comme l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$ est bien fondé, il n'y a pas de suite infini décroissante, donc le système de réécriture n'a pas de réduction infinie : il termine.

2. **Confluence :**

   Rappelons que montrer la confluence locale revient à prouver que tout diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y & & z \end{tikzcd}$$

   peut être fermé de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y \arrow[dr, "*"'] & & z \arrow[dl, "*"] \\ & w & \end{tikzcd}$$

   pour un certain $w \in A^*$.

   Les mots de la forme $w_1abaw_2abaw_3$, $w_1abaw_2bbw_3$, $w_1bbw_2abaw_3$ et $w_1bbw_2bbw_3$ pour $w_1, w_2, w_3 \in A^*$ génèrent chacun deux réductions différentes. Mais les diagrammes sont faciles à fermer : il suffit d'appliquer à droite la réduction qu'on a faite à gauche, et inversement.

Le cas intéressant est le mot $w_1ababaw_2$ pour $w_1, w_2 \in A^*$, car les deux réductions possibles sont entrelacées. On peut cependant là encore fermer le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & w_1ababaw_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
w_1babbaw_2 \arrow[d] & & w_1abbabw_2 \arrow[d] \\
w_1babaw_2 \arrow[d] & & w_1ababw_2 \arrow[d] \\
w_1bbabw_2 \arrow[dr] & & w_1babbw_2 \arrow[dl] \\
 & w_1babw_2 &
\end{tikzcd}$$

Enfin, le mot w_1bbbw_2 pour $w_1, w_2 \in A^*$ contient aussi deux réductions entrelacées, mais elles conduisent au même mot w_1bbw_2.

On a alors traité tous les cas possibles, et fermé tous les diagrammes. Le système est donc localement confluent. Comme il termine, il est aussi confluent.