Sujet de devoir # 9

Ce devoir n'est pas à rendre et ne sera pas noté, mais je vous encourage à le travailler.

Exercice 1 :

Soient U et V deux espaces vectoriels, on dit qu'un vecteur de $U \otimes V$ est **cohérent** s'il peut être écrit sous la forme $x \otimes y$ pour un certain choix de $x \in U$ et $y \in V$.

On pose $U = \mathbb{R}^3$ et $V = \mathbb{R}^2$. Pour chacun des vecteurs suivants, indiquer s'il est cohérent :

(i) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

(ii) $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

On considère deux espaces euclidiens de dimensions finies U et V, pour lesquels le produit scalaire est noté respectivement $\langle \_ \mid \_ \rangle_1$ et $\langle \_ \mid \_ \rangle_2$. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormée pour U et $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ une base orthonormée pour V.

On définit sur $U \otimes V$ l'opération suivante : si $x = \sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i \otimes \varepsilon_j$ et $y = \sum_{i,j} \mu_{ij} e_i \otimes \varepsilon_j$ alors

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \mu_{ij}$$

1. Montrer que $\langle \_ \mid \_ \rangle$ définit bien un produit scalaire sur $U \otimes V$, avec $\{e_i \otimes \varepsilon_j\}_{i,j}$ comme base orthonormée.
2. Montrer que pour $x, u \in U$ et $y, v \in V$ on a :

$$\langle x \otimes y \mid u \otimes v \rangle = \langle x \mid u \rangle_1 \langle y \mid v \rangle_2$$

3. Soient $f : U \to U$ et $g : V \to V$. Montrer que

$$(f \otimes g)^* = f^* \otimes g^*$$

Exercice 3 :

Soit V l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[-1, 1]$.
On définit l'opérateur $T : V \to V$ par :

$$(T(f))(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{pour } x \in [-1, 1]$$

1. Vérifier que T est bien une application linéaire de V dans V.

2. Soit

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & f(0) \end{array}$$

Montrer que $\phi \in V^*$ et calculer $T^*(\phi)$.

3. On définit les sous-espaces vectoriels suivants :

$$W_1 = \{f \in V \mid \ \forall x \in [-1,1], \ f(-x) = -f(x)\}$$

$$W_2 = \{f \in V \mid \ \forall x \in [-1,1], \ f(-x) = f(x)\}$$

W_1 est-il stable par T ? W_2 est-il stable par T ?
Montrer que $V = W_1 \oplus W_2$.

4. Montrer que T est injective mais non surjective.