Sujet de devoir # 8

Devoir à rendre le mercredi 28 novembre
L'exercice 5 est plus difficile que les autres.

Exercice 1 :

Soit $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'opérateur représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que T est normal pour le produit scalaire usuel. Est-il auto-adjoint ?
Donner une base orthonormale dans laquelle T est diagonal.

Exercice 2 :

Montrer que toute matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a une racine cubique symétrique, c'est-à-dire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $B^3 = A$.

Exercice 3 :

Soit V l'espace vectoriel des matrices de taille n à cœfficients complexes. On définit l'opération $\langle A \mid B \rangle$ par[1] :

$$\langle A \mid B \rangle = tr\,(A^* B)$$

Montrer que $\langle A \mid B \rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit l'opérateur $T_M : V \to V$ par $T_M(A) = MA$.
Montrer que

$$(T_M)^* = T_{M^*}$$

En déduire que :
- si M est auto-adjointe alors T_M est auto-adjoint
- si M est unitaire alors T_M est unitaire
- si M est normale alors T_M est normal.

Exercice 4 :

Soit un endomorphisme f dont on donne le polynôme caractéristique et le polynôme minimal :

$$P_f = (X-3)^4(X-5)^4 \qquad P_f^{min} = (X-3)^2(X-5)^2$$

Donner toutes les formes possibles que peut prendre matrice de Jordan de f.

Exercice 5 :

1. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que si A représente un endomorphisme f dans la base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, alors B représente f dans la base $\mathcal{B}' = \{e_n, \dots, e_1\}$.

[1] On utilise ici, comme dans le cours, la convention que le produit scalaire $\langle u \mid v \rangle$ est linéaire en v et antilinéaire en u. Si vous utilisez la convention du livre, il faut inverser la droite et la gauche, et donc poser $\langle A \mid B \rangle = tr\,(B^* A)$.

2. Montrer que les matrices

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

   sont similaires.

3. En utilisant la forme normale de Jordan, en déduire que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est similaire à sa transposée.