Sujet de devoir # 7

Devoir à rendre le mercredi 14 novembre
L'exercice 3 est un peu plus difficile.

Exercice 1 :

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard, calculer l'image par projetion orthogonale du vecteur

$$v = (1, 2, 0)$$

sur le sous-espace vectoriel

$$W = \text{Vect}\{(-3, 4, 0), (2, 1, 1)\}$$

Exercice 2 :

Soit V un espace préhilbertien de dimension finie et soient f et g deux applications linéaires sur V. Sans utiliser la représentation matricielle, montrer les égalités suivantes :

(i) $(f + g)^* = f^* + g^*$

(ii) $(kf)^* = \bar{k} f^*$ pour $k \in \mathbb{C}$

(iii) $(fg)^* = g^* f^*$

(iv) $(f^*)^* = f$

(v) $id^* = id$

(vi) $0^* = 0$

(vii) si f est inversible, $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$

Remarque : En dimension infinie, il n'est pas toujours possible de définir l'adjoint des endomorphismes f et g. Cependant, lorsque c'est possible, les égalités ci-dessus restent vraies. Mais il est alors impossible de les prouver en utilisant une représentation matricielle !

C'est la raison pour laquelle je vous demande une preuve *sans utilisation de matrices.*

Exercice 3 :

On dit qu'une matrice N est **nilpotente** s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$. On appelle **indice de nilpotence** de N le plus petit entier k tel que $N^k = 0$.

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente, d'indice de nilpotence k.

1. Quel est le polynôme minimal de N ?
2. En déduire que $k \leq n$.
3. Dans quel(s) cas a-t-on que N est diagonalisable ?
4. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton généralisé, trouver le polynôme caractéristique de N.