

Sujet de devoir # 5

Devoir à rendre le mercredi 17 octobre
L'exercice 3 est plus difficile que les autres.

Exercice 1 :

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A - \lambda I)^k$ pour $0 \leq k \leq n$.
2. Montrer que $P = (X - \lambda)^n$ est le polynôme caractéristique (à une constante près) et le polynôme minimal de A .

Exercice 2 :

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A et B ont des polynômes caractéristiques différents, en déduire qu'elles ne sont pas semblables.

Montrer que A et B ont le même polynôme minimal.

Exercice 3 :

Soit T un endomorphisme sur un espace vectoriel V de dimension finie. Soit W un sous-espace de V stable par T , c'est-à-dire tel que $T(W) \subseteq W$. On note T_W la restriction de T à W :

$$\begin{array}{lcl} T_W & : & W \rightarrow W \\ & & x \mapsto T(x) \end{array}$$

Montrer que :

- (i) le polynôme caractéristique de T_W divise le polynôme caractéristique de T
- (ii) le polynôme minimal de T_W divise le polynôme minimal de T .