Sujet de devoir # 4

Devoir à rendre le mercredi 10 octobre
Les exercices 3 et 4 sont (légèrement) plus difficiles.

Exercice 1 :

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de A ?
2. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A et C sont des matrices carrées. On note n la taille de A, c'est-à-dire l'entier tel que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Par récurrence sur n, montrer que $det\ M = (det\ A)(det\ C)$.
2. En déduire que toute valeur propre de M est valeur propre de A ou C (ou des deux). Que peut-on dire de son ordre de multiplicité ?

Exercice 3 :

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

Indice : Utiliser directement la définition d'une valeur propre plutôt que le polynôme caractéristique.

Exercice 4 :

On considère deux matrices triangulaires supérieures

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & a_{(n-1)n} \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \mu_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & b_{(n-1)n} \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de A ? Et celles de B ?
2. Montrer que AB est triangulaire supérieure et donner la valeur des éléments situés sur la diagonale.
3. Montrer que pour tout polynôme R, $R(A)$ est triangulaire supérieure et donner la valeur des éléments situés sur la diagonale.
4. En déduire que si λ est valeur propre de A alors $R(\lambda)$ est valeur propre de $R(A)$. Que peut-on dire de son ordre de multiplicité ?