Sujet de devoir # 3

Devoir à rendre le mercredi 3 octobre
L'exercice 4 est (un peu) plus difficile.

Exercice 1 :

Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors :

$$P(B^{-1}AB) = B^{-1}P(A)B$$

Exercice 2 :

Pour chacun des ensembles de polynômes suivants, dire s'il s'agit d'un idéal de $\mathbb{R}[X]$. Si c'est un idéal, donner un générateur de cet idéal (c'est-à-dire un polynôme P tel que l'idéal s'écrive $P\mathbb{R}[X]$) ; sinon, justifier votre réponse.

(i) $I_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$

(ii) $I_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P = 0 \text{ ou } deg(P) \geq 5\}$

(iii) $I_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P \text{ a au moins une racine réelle}\}$

Exercice 3 :

Soit V l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et $D : V \to V$ l'opérateur de dérivation sur cet espace.

Quels sont les valeurs propres de D, et les sous-espaces propres associés ?
Même question pour D^2.

Exercice 4 :

Une matrice de *sudoku* est une matrice $A \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R}[x])$ telle que :
– chaque ligne de A contient tous les entiers de 1 à 9
– chaque colonne de A contient tous les entiers de 1 à 9
– si $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix}$ avec $A_i \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors chaque matrice A_i contient tous les entiers de 1 à 9.

Soit A une matrice de sudoku. Trouver une valeur propre de A et un vecteur propre associé. Même question pour ${}^tA$.