Sujet de devoir # 2

Devoir à rendre le mercredi 26 septembre

Exercice 1 :

On rappelle qu'étant donnée une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la trace de A est définie par

$$tr\ A = \sum_{i=0}^{n} a_{ii}$$

1. Montrer (par un calcul explicite) que $tr\ (AB) = tr\ (BA)$
2. En déduire que $tr\ (P^{-1}AP) = tr\ A$, et expliquer en quoi cela nous permet de définir $tr\ f$ pour $f : V \to V$ endomorphisme, lorsque V est de dimension finie.

Exercice 2 :

Montrer que $tr\ \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$
Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $T(A) = AB - BA$. Calculer $T^*(tr\ )$.
A-t-on $(A \mapsto det\ A) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$? Justifier.

Exercice 3 :

Soit W un sous-espace d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, on appelle **annihilateur** de W l'ensemble

$$W^0 = \{\phi \in V^* \mid \ \forall x \in W, \phi(x) = 0\}$$

Montrer que W^0 est un sous-espace vectoriel de V^*.

Soit V l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, et soit $D : V \to V$ l'opérateur de dérivation sur cet espace : $D(P) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}X}$.

Donner une base pour chacun des sous-espaces suivants :

$$\text{Ker } D \quad , \quad \text{Ker } D^* \quad , \quad \text{Im } D \quad , \quad \text{Im } D^* \quad , \quad (\text{Im } D)^0 \quad , \quad (\text{Ker } D)^0$$

Vérifier que Ker $D^* = (\text{Im } D)^0$ et Im $D^* = (\text{Ker } D)^0$.

Remarque : La relation Ker $T^* = (\text{Im } T)^0$ est toujours vraie quel que soit $T : V \to W$. L'autre relation, Im $T^* = (\text{Ker } T)^0$, est vraie *en dimension finie* (cf. théorème 22 du chap. 3 dans le livre de cours).

Exercice 4 :

Soit $D : V \to V$ l'opérateur de dérivation sur un espace V de dimension finie. Cela suppose que V contienne des fonctions (réelles) indéfiniment dérivables, et qu'il soit stable par dérivation : si $f \in V$ alors $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \in V$.

Calculer $det\ D$ lorsque V est engendré par :

(i) $\{1, x, \ldots, x^n\}$
(ii) $\{sin\ x, cos\ x\}$
(iii) $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$

Dans chaque cas, trouver un polynôme $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ tel que

$$a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0 I = 0$$

où $I : V \to V$ est l'opérateur identité.

Indice : Dans le cas (iii), il faut trouver un polynome de degré 3 : $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ avec les bonnes valeurs de a, b, c.