

**Sujet de devoir # 1****Exercice 1 :**

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (3x - 2z, 5y + 7z, x + y + z)$$

Donner la matrice associée à  $f$  dans la base canonique, et calculer  $\det(f)$ .

**Exercice 2 :**

Soit  $D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  l'opérateur différentiel restreint aux polynômes, défini par  $D(P) = \frac{dP}{dX}$ . Montrer que  $D$  est une application linéaire. Trouver le noyau et l'image de  $D$ .

**Exercice 3 :**

On note  $\text{rang } f = \dim \text{Im } f$ . Si  $V$  est de dimension finie, montrer que pour  $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$  on a l'inégalité :

$$\text{rang}(f + g) \leq \text{rang } f + \text{rang } g$$

**Exercice 4 :**

Soit  $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

On définit l'application linéaire  $F : V \rightarrow V$  par :  $F(A) = MA$  (attention : il s'agit d'une multiplication entre deux matrices!)

Trouver une base et la dimension de :

- (i)  $\text{Ker } F$
- (ii)  $\text{Im } F$ .