Correction du devoir # 9

Ex 1

(i) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \otimes \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}7\\-3\\4\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

donc v_1 est cohérent

(ii) v_2 n'est pas cohérent car $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$

sont des systèmes libres, donc on ne peut écrire

ni $v_2 = x \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ni $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \otimes y$

(iii) $v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

donc v_3 is coherent

Ex 2

1) $\forall x, y \in U \otimes V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall z \in U \otimes V$,

$\left(x = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\, e_i \otimes \varepsilon_j \text{ et } y = \sum_{i,j} \mu_{ij}\, e_i \otimes \varepsilon_j\right)$ $\left(z = \sum_{i,j} \rho_{ij}\, e_i \otimes \varepsilon_j\right)$

- $\langle x \mid \lambda y \rangle = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \mu_{ij} \lambda = \lambda \langle x \mid y \rangle$
- $\langle x \mid y \rangle = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \mu_{ij} = \langle y \mid x \rangle$
- $\langle x \mid y + z \rangle = \sum_{i,j} \lambda_{ij} (\mu_{ij} + \rho_{ij}) = \langle x \mid y \rangle + \langle x \mid z \rangle$
- $\langle x \mid x \rangle = \sum_{i,j} \lambda_{ij}^2 \geqslant 0$ et $\langle x \mid x \rangle = 0 \Rightarrow \forall i,j \;\; \lambda_{ij} = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\forall i,j \quad \langle e_i \otimes \varepsilon_j \mid e_i \otimes \varepsilon_j \rangle = \sum_{k,\ell} (\delta_{ik}\delta_{j\ell})^2 = 1$

$\forall i,j,k,\ell \quad \langle e_i \otimes \varepsilon_j \mid e_k \otimes \varepsilon_\ell \rangle = \sum_{m,n} \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{km}\delta_{\ell n} = 0$
$(i,j) \neq (k,\ell)$

donc $\{e_i \otimes \varepsilon_j\}_{i,j}$ est une base orthonormée de $U \otimes V$, pour le produit scalaire $\langle -, - \rangle$

2) $\forall x, u \in U$, $\forall y, v \in V$,
$\left(x = \sum_i x_i e_i \quad u = \sum_k u_k e_k \quad y = \sum_j y_j \varepsilon_j \quad v = \sum_\ell v_\ell \varepsilon_\ell\right)$

$$\langle x \otimes y \mid u \otimes v \rangle = \langle \sum_{i,j} (x_i y_j)\, e_i \otimes \varepsilon_j \mid \sum_{k,\ell} (u_k v_\ell)\, e_k \otimes \varepsilon_\ell \rangle$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j u_i v_j = \left(\sum_i x_i u_i\right)\left(\sum_j y_j v_j\right)$$

$$= \langle x \mid u \rangle_1 \langle y \mid v \rangle_2$$

3) $\forall x, u \in U$, $\forall y, v \in V$,

$$\langle x \otimes y \mid (f \otimes g)(u \otimes v) \rangle = \langle x \otimes y \mid (fu) \otimes (gv) \rangle$$
$$= \langle x \mid fu \rangle_1 \langle y \mid gv \rangle_2$$
$$= \langle f^* x \mid u \rangle_1 \langle g^* y \mid v \rangle_2$$
$$= \langle (f^* x) \otimes (g^* y) \mid u \otimes v \rangle$$
$$= \langle (f^* \otimes g^*)(x \otimes y) \mid u \otimes v \rangle$$

Or les éléments $\{x \otimes y\}_{\substack{x \in U \\ y \in V}}$ engendrent $U \otimes V$, de même que les éléments $\{u \otimes v\}_{\substack{u \in U \\ v \in V}}$ (ce sont en fait les mêmes éléments)

donc $\forall w, w' \in U \otimes V$, $\langle w \mid (f \otimes g) w' \rangle = \langle (f^* \otimes g^*) w \mid w' \rangle$

d'où $(f \otimes g)^* = f^* \otimes g^*$

En fait on peut montrer que $T(W_1) \subseteq W_2$ et $T(W_2) \subseteq W_1$:

_ $\forall f \in W_1$, $\forall x \in [-1,1]$, $T(f)(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt$

$$= \int_0^{x} -f(-u)\,du \quad \text{par changement de variable}$$
$$= \int_0^{x} f(u)\,du$$
$$= T(f)(x)$$

_ $\forall f \in W_2$, $\forall x \in [-1,1]$, $T(f)(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt$

$$= \int_0^{x} -f(-u)\,du \quad \text{par changement de variable}$$
$$= -\int_0^{x} f(u)\,du$$
$$= -T(f)(x)$$

$\forall f \in V$, $\forall x \in [-1,1]$,

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Or $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \in W_1$ et $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \in W_2$

donc $V = W_1 + W_2$

$\forall f \in W_1 \cap W_2$, $\forall x \in [-1,1]$,

$$f(-x) = f(x) = -f(x) \quad \text{donc } f(x) = 0$$

donc $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

d'où $V = W_1 \oplus W_2$

4) T est injective : $T(f) = 0 \Rightarrow \forall x \in [-1,1], \int_0^x f(t)\,dt = 0$

$$\Rightarrow \forall a \in [-1,1], \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\Big|_a = 0$$
$$\Rightarrow \forall a \in [-1,1], f(a) = 0$$
$$\Rightarrow f = 0$$

T n'est pas surjective : $(x \mapsto |x|) \in V$ mais cette fonction n'est pas dérivable sur $[-1,1]$ donc ne peut s'écrire $T(f)$ pour $f \in V$

Ex 3

1) $\forall f, g \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$T(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x (\lambda f + \mu g)(t)\, dt$$
$$= \lambda \int_0^x f(t)\, dt + \mu \int_0^x g(t)\, dt$$
$$= \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x) \quad \text{pour } x \in [-1,1]$$

donc T est linéaire

2) $\forall f, g \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$$

donc φ est linéaire

De plus $\varphi(f) \in \mathbb{R}$ $\forall f \in V$

donc $\varphi \in V^*$

$\forall f \in V$, $\quad T^*(\varphi)(f) = \varphi(T(f)) = \varphi\left(x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt\right)$
$= 0$

donc $T^*(\varphi) = 0$

3) W_1 n'est pas stable par T :

$(f : t \mapsto t) \in W_1$ mais $T(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x t\, dt$
$= \frac{x^2}{2}$ pour $x \in [-1,1]$

Or $(g : x \mapsto \frac{x^2}{2}) \notin W_1$

W_2 n'est pas stable par T :

$(f : t \mapsto t^2) \in W_2$ mais $T(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x t^2\, dt$
$= \frac{x^3}{3}$ pour $x \in [-1,1]$

Or $(g : x \mapsto \frac{x^3}{3}) \notin W_2$