Correction du devoir # 8 MAT 3541

Ex 1 (4 pts)

- $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

$AA^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A^* A$ donc $TT^* = T^* T$

T est <u>normal</u>

- T n'est pas <u>auto-adjoint</u> car $A \neq A^*$

- T a donc une base orthonormée de vecteurs propres :

$\det(A - X I) = (1-X)^2 + 1 = X^2 - 2X + 2$

$= (X - 1 - i)(X - 1 + i)$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1+i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + iy = x + ix \\ ix + y = y + iy \end{cases}$

$\iff x = y$

donc $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à $1+i$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + iy = x - ix \\ ix + y = y - iy \end{cases}$

$\iff x = -y$

donc $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à $1 - i$

Lorsque T est un opérateur <u>normal</u>, **deux** vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont toujours orthogonaux, il suffit donc de les normaliser :

$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ base orthonormée de $\mathbb{C}^2$

telle que $M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$

Ex 2 (3 pts)

comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale

$$A = U^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}U \quad \text{avec} \quad {}^tU = U^{-1}$$

Si on choisit $B = U^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt[3]{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt[3]{\lambda_n}\end{pmatrix}U$,

on a bien $B^3 = U^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}U = A$

et B symétrique : ${}^tB = {}^tU\begin{pmatrix}\sqrt[3]{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt[3]{\lambda_n}\end{pmatrix}{}^tU^{-1}$

$$= U^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt[3]{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt[3]{\lambda_n}\end{pmatrix}U = B$$

Ex 3 (5 pts)

– $\forall A,B,C \in V$, $\langle A \mid B+C\rangle = tr(A^*(B+C)) = tr(A^*B) + tr(A^*C)$
$= \langle A\mid B\rangle + \langle A \mid C\rangle$

$\forall A,B \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\langle A \mid \lambda B\rangle = tr(A^*\lambda B) = \lambda\, tr(A^*B) = \lambda \langle A \mid B\rangle$

$\forall A,B \in V$, $\langle A \mid B\rangle = tr(A^*B) = \sum_j \sum_i \overline{a_{ij}}\, b_{ij} = \sum_i \sum_j b_{ij}\, \overline{a_{ij}}$

$A = (a_{ij})_{i,j}$
$B = (b_{ij})_{i,j}$
$= \overline{\sum_i \sum_j \overline{b_{ij}}\, a_{ij}} = \overline{tr(B^*A)} = \overline{\langle B \mid A\rangle}$

$\forall A \in V$, $\langle A \mid A\rangle = 0 \iff tr(A^*A) = 0$
$A = (a_{ij})_{i,j}$
$\iff \sum_j \sum_i \overline{a_{ij}}\, a_{ij} = 0$
$\iff \sum_j \sum_i |a_{ij}|^2 = 0$
$\iff \forall i,j \quad a_{ij} = 0$
$\iff A = 0$

et de plus $\langle A \mid A\rangle = \sum_j \sum_i |a_{ij}|^2$
$\langle A \mid A\rangle \geq 0$

donc $\langle A \mid B\rangle = tr(A^*B)$ définit bien un produit scalaire sur V

– $\forall A,B \in V$, $\langle A \mid \Pi B\rangle = tr(A^*\Pi B) = tr(A^*(\Pi^*)^*B)$
$= tr((\Pi^*A)^*B) = \langle \Pi^* A \mid B\rangle$

donc $(T_\Pi)^* = T_{\Pi^*}$

Si M <u>auto-adjointe</u>, alors $(T_M)^* = T_{M^*} = T_M$

T_M auto-adjoint

Si M <u>unitaire</u>, alors $(T_M)^* = T_{M^*} = T_{M^{-1}}$

Or $T_{M^{-1}} T_M = T_M T_{M^{-1}} = Id$

donc T_M inversible et $(T_M)^{-1} = T_{M^{-1}} = (T_M)^*$

T_M unitaire

Si M <u>normale</u>, alors $T_M (T_M)^* = T_M T_{M^*} = T_{MM^*} = T_{M^*M}$

$= T_{M^*} T_M = (T_M)^* T_M$

T_M normal

<u>Ex 4</u> (4 pts)

La matrice de Jordan de f est :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P_{A_1} = (X-3)^4 \qquad P_A^{min} = (X-3)^2$$

$$P_{A_2} = (X-5)^4 \qquad P_A^{min} = (X-5)^2$$

On a deux possibilités pour A_1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et deux possibilités pour A_2 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

On a donc 4 possibilités pour A (on ne prend pas en compte l'inversion de A_1 et A_2) :

$$A = \begin{pmatrix} 3&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&3&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&3&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&3&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&5&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&5&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&5&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&5 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{ou}} \quad A = \begin{pmatrix} 3&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&3&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&3&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&3&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&5&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&5&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&5&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{ou}} \quad A = \begin{pmatrix} 3&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&3&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&3&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&3&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&5&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&5&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&5&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&5 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{ou}} \quad A = \begin{pmatrix} 3&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&3&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&3&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&3&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&5&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&5&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&5&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&5 \end{pmatrix}$$

Ex 5 (4 pts)

1) Si $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ avec $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_n\}$

alors $\begin{cases} f(e_1) = 0 \\ f(e_2) = e_1 \\ \vdots \\ f(e_n) = e_{n-1} \end{cases}$

donc $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ avec $\mathcal{B}' = \{e_n \dots e_1\}$

2) Si $A_\lambda = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ avec $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_n\}$

alors $\begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) = \lambda e_1 + e_1 \\ \vdots \\ f(e_n) = \lambda e_n + e_{n-1} \end{cases}$ donc $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ avec $\mathcal{B}' = \{e_n \dots e_1\}$

3) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = P^{-1}\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix} P$ où chaque J_i est de la forme $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$

D'après les questions précédentes, $\forall i \in [1,k]$ $J_i = Q_i^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} Q_i$

avec Q_i inversible

donc, si $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_k \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix} {}^tJ_1 & & \\ & \ddots & \\ & & {}^tJ_k \end{pmatrix} Q$

Donc $A = P^{-1} Q \begin{pmatrix} {}^tJ_1 & & \\ & \ddots & \\ & & {}^tJ_k \end{pmatrix} Q^{-1} P = (Q^{-1}P)^{-1}\begin{pmatrix} {}^tJ_1 & & \\ & \ddots & \\ & & {}^tJ_k \end{pmatrix} Q^{-1}P$

Or ${}^tA = {}^tP\begin{pmatrix} {}^tJ_1 & & \\ & \ddots & \\ & & {}^tJ_k \end{pmatrix} {}^t(P^{-1}) = {}^tP\begin{pmatrix} {}^tJ_1 & & \\ & \ddots & \\ & & {}^tJ_k \end{pmatrix} ({}^tP)^{-1}$

A et ${}^tA$ sont toutes deux similaires à $\begin{pmatrix} {}^tJ_1 & & \\ & \ddots & \\ & & {}^tJ_k \end{pmatrix}$,

elles sont donc similaires.