Correction du devoir #6

Ex 1

$$P_A = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 2 & -2-X & 2 \\ 2 & -3 & 2-X \end{vmatrix} = X(4 - X^2 - 6) - (4 - 2X - 4)$$

$P_A = -X^3$ est scindé (dans $\mathbb{R}$) donc A est triangularisable (dans $\mathbb{R}$)

On cherche à représenter A sous la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$

(les éléments de la diagonale seront des valeurs propres de A, donc ils sont forcément réels)

__calcul de e_1__ : $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$

donc on peut choisir $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

__calcul de e_2__ : $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = \lambda \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = -\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} y = \lambda \\ x + z = \lambda \end{cases}$

donc on peut choisir $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$

__calcul de e_3__ : Il suffit en fait de compléter $\{e_1, e_2\}$ en une base

donc on peut choisir $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et on a $Ae_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 3e_1 - 2e_2$ donc $\mu = 3$, $\rho = -2$

D'où $A = P^{-1} A' P$ avec $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

__Note__ : cette forme triangulaire n'est pas unique !

Ex 2

1) $P(A) = 0$ avec $P = X^3 - 2X^2 - \cancel{X} + 2$

$P = (X-1)(X+1)(X-2)$

donc $P_A^{min} \mid P$, d'où $P_A^{min} \in \{ X-1, X+1, X-2, (X-1)(X+1), (X-1)(X-2), (X+1)(X-2), (X-1)(X+1)(X-2) \}$

Dans tous les cas on a que A est diagonalisable, et ses valeurs propres appartiennent à l'ensemble $\{-1, 1, 2\}$

2) $A^3 - 2A^2 - A = -2I$

donc $\begin{cases} A(-\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}I) = I \\ (-\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}I)A = I \end{cases}$

d'où A inversible, et $A^{-1} = -\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}I$

Ex 3

Puisque A n'est pas triangularisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, son polynôme minimal n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$. Il y a deux cas possibles :

- soit $P_A^{min} = X^2 + aX + c$ avec $\Delta = a^2 - 4c < 0$
- soit $P_A^{min} = (X-\lambda)(X^2 + aX + c)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\Delta = a^2 - 4c < 0$

Le fait que $\Delta = a^2 - 4c < 0$ implique que, dans $\mathbb{C}$, $X^2 + aX + c$ a deux racines distinctes non réelles.

Donc $P_A^{min} = (X - c_1)(X - c_2)$ avec $c_1 \neq c_2$ dans le premier cas

$P_A^{min} = (X-\lambda)(X-c_1)(X-c_2)$ avec $c_1 \neq c_2$, $\lambda \neq c_1$, $\lambda \neq c_2$ dans le deuxième cas

Dans tous les cas, on a que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Ex 4

1) $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = (b_{ij})_{i,j}$

$AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix} = (\lambda_i b_{ij})_{i,j}$

$BA = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \cdots & \lambda_n b_{1n} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 b_{n1} & \lambda_2 b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix} = (\lambda_j b_{ij})_{i,j}$

Si $AB = BA$ alors $\forall i,j \quad \lambda_i b_{ij} = \lambda_j b_{ij}$

donc si $i \neq j \quad b_{ij} = 0 \quad (\text{car } \lambda_i \neq \lambda_j)$

d'où B diagonale

2) $W = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$

donc $\dim W = n$

3) Si $\lambda_0 I + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1} = 0$

alors $P(A) = 0$ avec $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$

alors $P_A^{min} \mid P$ avec $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$.

Or $P_A^{min} = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_n)$ est de degré $n > \deg P$

donc la seule solution est que $P = 0$

d'où $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$

$\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$ est donc un système libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et chacune de ces matrices est dans W donc c'est un système libre de W

4) $\dim W = n$ et $\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$ système libre de W

donc $\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$ est une base de W

donc $\forall B \in W, \exists \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \quad B = \lambda_0 I + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1}$

Si $AB = BA$ alors $B \in W$ donc $\exists P \in K[X]$ $(\deg P < n)$ tel que

$B = P(A)$