Correction du devoir #5 — MAT3541

Ex 1 (7 pts)

1) $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad (A-\lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$

De façon générale, on peut montrer par récurrence :

$$(A-\lambda I)^k = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{k} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } 0 \leq k < n$$

$(A - \lambda I)^k = 0$ pour $k > n$

2) $P_A(x) = \det(A - xI) = \left| \begin{pmatrix} \lambda - x & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda - x \end{pmatrix} \right| = (\lambda - x)^n$

$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda)^n$

$P_A^{min} \mid P_A$ donc $P_A^{min} = (X-\lambda)^k$ pour $0 < k \leq n$

Or $(A-\lambda)^k \neq 0$ si $k < n$, donc $P_A^{min} = (X - \lambda)^n$

Ex 2 (8 pts)

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

Si $A = P^{-1}BP$ alors
$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ &= \det(B - \lambda I) \\ &= P_B(\lambda) \end{aligned}$$

donc A et B ne sont pas semblables.

$P_A^{min} \mid P_A$ donc a priori $P_A^{min} \in \{ X-1, X-2, (X-1)(X-2), (X-1)^2, (X-1)^2(X-2) \}$

Mais on sait que P_A et P_A^{min} ont les mêmes racines,

donc $P_A^{min} \in \{ (X-1)(X-2), (X-1)^2(X-2) \}$

Or $(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$

donc $P_A^{min} \mid (X-1)(X-2)$, d'où $P_A^{min} = (X-1)(X-2)$

De même, on a $P_B^{min} \in \{ (X-1)(X-2), (X-1)(X-2)^2 \}$

Or $(B-I)(B-2I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$

donc $P_B^{min} = (X-1)(X-2) = P_A^{min}$

<u>Ex 3</u> (5 pts)

1) Soit $\mathcal{B} = \{ e_1, \dots e_r \}$ une base de W ($r = \dim W$),

on la complète en une base $\mathcal{B}' = \{ e_1, \dots e_r \dots e_n \}$ de V ($n = \dim V$).

W est stable par T donc $T(e_i) = \lambda_1^i e_1 + \dots + \lambda_r^i e_r$ pour $1 \le i \le r$

avec $T_W(e_i) = \lambda_1^i e_1 + \dots + \lambda_r^i e_r$

$$d'où\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(T) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} \lambda_1^1 & \dots\ \lambda_1^r & \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^r & M_1 \\ \vdots & \vdots & \\ \lambda_r^1 & \lambda_r^r & \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & M_2 \\ 0 & 0 & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_r \\ \\ \vdots \\ e_n \end{array} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(T_W) & M_1 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

Donc $P_T = \begin{vmatrix} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(T_W) - XI & M_1 \\ 0 & M_2 - XI \end{vmatrix} = | \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(T_W) - XI | \, | M_2 - XI |$

d'après le devoir #4

$P_T = P_{T_W} \, |M_2 - X I|$ donc $P_{T_W} \mid P_T$

2) $\forall x \in W, \quad P_T^{min}(T_W)(x) = P_T^{min}(T)(x) = 0$

donc $P_T^{min}(T_W) = 0$

d'où $P_{T_W}^{min} \mid P_T^{min}$

<u>Note</u> : Par <u>définition</u> du polynôme minimal, on a :

$$P_f^{min} \mid P \iff P(f) = 0$$