Correction du devoir # 3 — MAT 3541

Ex 1 (4 pts)

On montre par récurrence que $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$:

- $(B^{-1}AB)^0 = I = B^{-1}A^0B$
- Si $n > 0$: $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}AB\,(B^{-1}AB)^{n-1} = B^{-1}ABB^{-1}A^{n-1}B$
  $= B^{-1}A^nB$

Soit $P = a_nX^n + \dots + a_0$,

$$P(B^{-1}AB) = a_n(B^{-1}AB)^n + \dots + a_0(B^{-1}AB)^0$$
$$= B^{-1}(a_nA^n + \dots + a_0I)B$$
$$= B^{-1}P(A)B$$

Ex 2 (7 pts)

(i) I_1 est un idéal :

- $0 \in I_1$: $0(1) = 0'(1) = 0$
- si $P, Q \in I_1$, $(P+Q)(1) = P(1) + Q(1) = 0$
  $(P+Q)'(1) = P'(1) + Q'(1) = 0$
  donc $P + Q \in I_1$
- si $P \in I_1$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$,
  $(PQ)(1) = P(1)\,Q(1) = 0$
  $(PQ)'(1) = P'(1)Q(1) + P(1)Q'(1) = 0$
  donc $PQ \in I_1$

De plus on sait que $P \in I_1 \iff 1$ racine de P de multiplicité $r \geqslant 2$
$\iff (X-1)^2 \mid P$

d'où $I_1 = (X^2 - 2X + 1)\,\mathbb{R}[X]$

(ii) I_2 n'est pas un idéal :

$P = X^5 + X \in I_2$ $\qquad Q = -X^5 \in I_2$

mais $P + Q = X \notin I_2$

(iii) I_3 n'est pas un idéal :

$P = X^2 \in I_3$ $\qquad Q = X + 1 \in I_3$

mais $P + Q \notin I_3$

Notes : – $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ mais il n'y a pas égalité en général !!

– Le générateur d'un idéal est unique (à une constante près) et bien défini : si on ne le trouve pas c'est sans doute qu'on n'a pas affaire à un idéal ...

Ex 3 (5 pts)

Mes excuses pour cet exercice, je vous croyais familiers avec la résolution d'équations différentielles. Je vous propose donc une preuve de résolution de ces équations (la preuve n'était bien sûr pas demandée dans l'exercice).

– $D(f) = \lambda f \iff f' = \lambda f$

Posons $g = f e^{-\lambda x}$

$$f' = \lambda f \iff g' = f' e^{-\lambda x} - \lambda f e^{-\lambda x} = 0$$

$$f' = \lambda f \iff g = C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

$$f' = \lambda f \iff f = C e^{\lambda x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

donc tout réel λ est valeur propre de D, avec $\mathrm{Vect}\{x \mapsto e^{\lambda x}\}$ comme sous-espace propre associé.

– $D^2(f) = \lambda f \iff f'' = \lambda f$

Si $\lambda = 0$: $f'' = 0 \iff f = Ax + B$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

Si $\lambda > 0$: Posons $g = f e^{-\sqrt{\lambda} x}$, donc $f = g e^{\sqrt{\lambda} x}$

$$f'' = \lambda f \iff g'' e^{\sqrt{\lambda}x} + \lambda g e^{\sqrt{\lambda}x} + 2\sqrt{\lambda}\, g' e^{\sqrt{\lambda}x} = \lambda g e^{\sqrt{\lambda}x}$$

$$\iff g'' e^{\sqrt{\lambda}x} + 2\sqrt{\lambda}\, g' e^{\sqrt{\lambda}x} = 0$$

$$\iff g'' + 2\sqrt{\lambda}\, g' = 0$$

$$\iff g' = C e^{-2\sqrt{\lambda}x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R} \quad \text{d'après ce qui précède}$$

$$f'' = \lambda f \iff g = A e^{-2\sqrt{\lambda} x} + B \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$
$$\iff f = A e^{-\sqrt{\lambda} x} + B e^{\sqrt{\lambda} x} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Si $\underline{\lambda < 0}$: Le plus simple est d'élargir dans un premier temps la résolution aux fonctions de $\boxed{\mathbb{R}}$ dans $\boxed{\mathbb{C}}$.

Soit $\underline{\mu = -\lambda}$. Posons $g = f e^{-i\sqrt{\mu} x}$, donc $f = g e^{i\sqrt{\mu} x}$

$$\underset{(f : \mathbb{R} \to \mathbb{C})}{f'' = \lambda f} \iff g'' e^{i\sqrt{\mu} x} - \mu g e^{i\sqrt{\mu} x} + 2i\sqrt{\mu}\, g' e^{i\sqrt{\mu} x} = \lambda g e^{i\sqrt{\mu} x}$$
$$\iff g'' + 2i\sqrt{\mu}\, g' = 0$$
$$\iff g' = C e^{-2i\sqrt{\mu} x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{C}$$
$$\iff g = A e^{-2i\sqrt{\mu} x} + B \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}$$
$$\iff f = A e^{-i\sqrt{\mu} x} + B e^{i\sqrt{\mu} x} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}$$

(cela se montre de la même façon que précédemment, mais cette fois avec des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$)

Or il est facile de voir que tout $f : \underline{\underline{\mathbb{R}}} \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$ est la partie réelle d'une solution $\tilde{f} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} \to \underline{\underline{\mathbb{C}}}$, et inversement toute solution $\tilde{f} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} \to \underline{\underline{\mathbb{C}}}$ nous donne une solution $\mathrm{Re}(\tilde{f}) : \underline{\underline{\mathbb{R}}} \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

donc
$$\underset{(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})}{f'' = \lambda f} \iff f = \mathrm{Re}\left(A e^{-i\sqrt{\mu} x} + B e^{i\sqrt{\mu} x}\right) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}$$
$$\iff f = (\mathrm{Re}(A) \cos\sqrt{\mu}\, x + \mathrm{Re}(B) \cos\sqrt{\mu}\, x) + (+\mathrm{Im}(A) \sin\sqrt{\mu}\, x - \mathrm{Im}(B) \sin\sqrt{\mu}\, x) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}$$
$$\iff f = C \cos\sqrt{\mu}\, x + D \sin\sqrt{\mu}\, x \quad \text{avec } C, D \in \mathbb{R}$$

donc tout réel λ est valeur propre de D^2, avec comme sous-espace propre associé :
- $\mathrm{Vect}\{x \mapsto 1, x \mapsto x\}$ si $\lambda = 0$
- $\mathrm{Vect}\{x \mapsto e^{\sqrt{\lambda} x}, x \mapsto e^{-\sqrt{\lambda} x}\}$ si $\lambda > 0$
- $\mathrm{Vect}\{x \mapsto \cos\sqrt{-\lambda}\, x, x \mapsto \sin\sqrt{-\lambda}\, x\}$ si $\lambda < 0$

<u>Notes</u> :
- lors d'une recherche de valeurs propres par la méthode directe, ne pas oublier de traiter <u>tous</u> les cas !!
- On remarque que l'équation de degré 1 (resp 2) nous donne dans chaque cas un sous-espace propre de dimension 1 (resp 2) ...

Ex 4 (4 pts)

Comme chaque ligne contient tous les entiers de 1 à 9, et que leur somme vaut 45, on a :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}45\\45\\45\\45\\45\\45\\45\\45\\45\end{pmatrix}$$ quelle que soit la matrice de sudoku A

donc 45 est valeur propre de A, et $\begin{pmatrix}1\\|\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à 45.

${}^tA$ est aussi une matrice de sudoku, donc 45 est valeur propre de ${}^tA$, et $\begin{pmatrix}1\\|\\1\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à 45.