Examen de mi-session #1

Professeur : Joachim de Lataillade

Cet examen comporte 6 *pages, et est noté sur* 100 *points.*
C'est un examen à livre fermé. Voux êtes autorisés à utiliser une calculatrice non programmable.
Écrivez des réponses claires et complètes. Vous disposez de 80 *minutes.*

Exercice 1 :

Considérons une culture de bactéries, et supposons que $R(t) = R_0 e^{at}$ soit le nombre de bactéries dans cette culture après t heures, où R_0 est la population initiale et a une certaine constante.

1. **(7 points)** En supposant qu'on ait 10 000 bactéries au début de l'expérience, et 60 000 bactéries deux heures plus tard, calculer la valeur de a.
2. **(7 points)** En utilisant cette valeur de a, calculer le temps nécessaire pour que la population de bactéries parvienne à 25 fois la population de départ.

Exercice 2 :

Le but de cet exercice est de tracer la fonction déterminant la taille de la population dans une ville.

Soit $P(t)$ le nombre d'habitants au temps t, où t est le nombre d'années depuis l'an 2000 (par exemple, $P(2)$ est le nombre d'habitants en 2002). On suppose que cette population $P(t)$ oscille comme une fonction sinusoïdale. On observe que tous les 5 ans la population maximale est atteinte, à savoir $8 \cdot 10^5$ personnes, et la population minimale est $2 \cdot 10^5$ personnes. La dernière année au cours de laquelle on a observé une population maximale est 2004.

1. **(6 points)** Déterminer l'expression mathématique de $P(t)$.
2. **(9 points)** Tracer la fonction $P(t)$. Mettre en valeur sur le graphe le maximum, le minimum, l'amplitude, la moyenne, et la phase de la fonction.

Exercice 3 :

Le système dynamique discret modélisant une certaine population de poissons dans un étang est de la forme

$$p_{t+1} = 0.4 p_t + 60$$

où p_t est le nombre de poissons après t jours. On suppose que la population initiale est $p_0 = 10$.

1. **(3 points)** Quelle est la fonction génératrice du système ?
2. **(3 points)** Trouver le point d'équilibre p du système.
3. **(6 points)** Tracer le diagramme en toile d'araignée pour les quatre premières valeurs de p_t, en partant de la population initiale. Calculer ces quatre valeurs et les indiquer sur le graphe.
4. **(3 points)** Décrire ce que devient la population pour des valeurs de t de plus en plus grandes.
5. **(6 points)** Trouver la solution générale du système dynamique, c'est-à-dire trouver l'expression de p_t en fonction de t.

   Indice : On pourra poser $x_t = p_t - p$ puis calculer x_t, ou bien utiliser la formule
$$\sum_{i=0}^{t-1} a^i = \frac{1 - a^t}{1 - a}$$

Exercice 4 :

1. **(5 points)** Soit
$$f(x) = \frac{1}{x-4}$$
Indiquer si chacune des limites suivantes existe et, si elle existe, donner sa valeur :
   - $\lim_{x\to 4^-} f(x)$
   - $\lim_{x\to 4^+} f(x)$
   - $\lim_{x\to 4} f(x)$

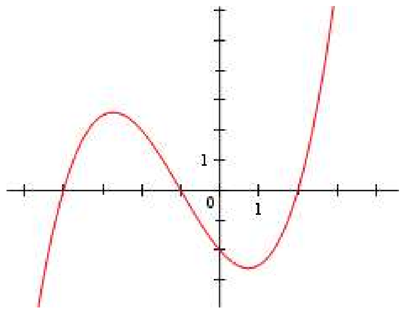
2. **(5 points)** Mêmes questions pour
$$f(x) = \sqrt{x-4}$$
   - $\lim_{x\to 4^-} f(x)$
   - $\lim_{x\to 4^+} f(x)$
   - $\lim_{x\to 4} f(x)$

3. **(5 points)** Mêmes questions pour
$$f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$$
   - $\lim_{x\to 4^-} f(x)$
   - $\lim_{x\to 4^+} f(x)$
   - $\lim_{x\to 4} f(x)$

4. **(5 points)** Mêmes questions pour
$$f(x) = \frac{\ln x - \ln 4}{x-4}$$
   - $\lim_{x\to 4^-} f(x)$
   - $\lim_{x\to 4^+} f(x)$
   - $\lim_{x\to 4} f(x)$

Exercice 5 :

Considérons la fonction f donnée par le graphe suivant :



(9 points) À partir de ce graphe, indiquez dans quels intervalles $f'(x)$ est positive, dans quels intervalles elle est négative, et quels sont les points critiques.

Exercice 6 :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. **(7 points)**

$$f_1(x) = (x^2 + 1)e^x$$

2. **(7 points)**

$$f_2(x) = \frac{1}{x^3} + 2x \cos x$$

3. **(7 points)**

$$f_3(x) = \frac{\ln x}{x^2 + x}$$