L'effectivité expérimentale de la preuve mathématique

Alexandre Miquel – PPS

Mardi 20 mars 2007

Séminaire des thésards (LIAFA & PPS)

Problématique

En quoi l'utilisation des mathématiques les plus abstraites est-elle valide dans les sciences expérimentales ?

$\rightsquigarrow$ et dans quelles circonstances ?

Des méthodologies très différentes :

Sc. expérimentales	**Mathématiques**
Méthode empirique, "inductive"	Méthode axiomatique, déductive
Recherche des causes ("lois")	Les axiomes sont donnés
L'accord avec l'expérience prime	La correction formelle prime

Deux tendances lourdes de la physique moderne :

- une plus grande utilisation des mathématiques (modèles)
- une plus grande sophistication des mathématiques utilisées

Quelques situations de problème

Soient A et B deux énoncés décrivant une théorie sur le monde physique.

1. Quelle signification accorder dans le monde physique à la prouvabilité mathématique de $A \Rightarrow B$?
   - La validité de A entraîne la validité de B (?)
   - D'une falsification de B, on peut tirer une falsification de A (?) (modus tollens expérimental)
2. Quelle signification accorder dans le monde physique à l'incompatibilité mathématique de A et B (i.e. $A, B \vdash \perp$) ?
   - Entraîne-t-elle l'incompatibilité physique de A et B ?
   - Si oui, comment déterminer qui de A ou B est faux ?

$\rightsquigarrow$ Polysémie des énoncés (math / physique)

Le critère de démarcation de Popper

Logik der Forschung (Vienne, 1934)

The Logic of Scientific Discovery (éd. anglaise, 1959)

Comment distinguer un système théorique empirique (i.e. scientifique) d'un système déductif (logique, maths) ou d'une théorie métaphysique ?

1. Toute théorie scientifique n'est que conjecturale
   Le principe d'induction (expérimental) n'est pas logiquement valide
2. Mais une théorie scientifique peut être falsifiée

Critère de démarcation :

Théorie empirique $=$ Théorie falsifiable

$=$ Théorie donnée avec les instruments qui permettent de la falsifier

Remarques (1/2)

- Le critère de démarcation **n'est pas** un critère de signification

  La classe des énoncés empiriques n'est pas close par négation

- Les énoncés empiriques (universels) énoncent des interdictions

  Loi empirique (sciences) $\neq$ loi humaine (juridique)

- Une théorie est d'autant plus scientifique qu'elle...

  ... contient davantage d'énoncés empiriques
  ... énonce davantage d'interdictions
  ... est davantage susceptible d'être falsifiée
  ... est improbable
  ... est une théorie audacieuse !

- Une théorie peut comporter des énoncés non empiriques...

  ... s'ils augmentent la falsifiabilité de la théorie

  Ex : Conservation de l'énergie

Remarques (2/2)

- Le problème de démarcation ne traite pas du problème de la correspondance entre les énoncés individuels et les faits

  Ce problème peut être atténué grâce à la reproductibilité

- Le caractère empirique d'une théorie n'est pas défini à partir de la façon dont on construit la théorie...

  ... mais à partir de la façon dont on la teste

  Laisse le champ libre à l'imagination créatrice

- Scientificité $\neq$ Certitude

  Rejet du subjectivisme, rejet du positivisme

  Théorie subjective de la connaissance / théorie objective

- Rejet de la méthode inductive... ($\approx$ Lamarck)

  ... au profit de la méthode : essai/erreur ($\approx$ Darwin)

Le modus tollens expérimental

Une théorie empirique A est rarement falsifiée de manière directe...

... En pratique, on falsifie une conséquence (empirique) de A

Processus de falsification indirecte (à travers B)

Soient deux théories empiriques A, B telles que

- $A \Rightarrow B$ est prouvable mathématiquement
- B est falsifiable expérimentalement

Peut-on en déduire que A est falsifiée... expérimentalement ?

Modus tollens expérimental

$$\frac{\mathrm{math} \vdash A \Rightarrow B \qquad \mathrm{exp} \models \neg B}{\mathrm{exp} \models \neg A}$$

Ce principe est-il valide ? En quel sens ?

Popper et le modus tollens expérimental

Situation de problème : une preuve de $A \Rightarrow B$ et une falsification de B

D'après Popper (*LSD*, ch. 3, §18)

- La théorie A est falsifiée dans son ensemble (en tant que système)
- Ne sont pas concernés les énoncés de A indépendants de B

  Nous ne pouvons donc pas savoir d'emblée lequel parmi les divers énoncés restants du sous-système A' (dont B n'est pas indépendant) est responsable de la fausseté de B ; nous ne pouvons pas savoir lequel nous devons modifier, lequel nous devons retenir. (Je ne parle pas ici des énoncés interchangeables.) C'est souvent le seul instinct scientifique du chercheur (influencé naturellement par les résultats de tests répétés) qui lui fait deviner quels énoncés de A' doivent être considérés comme inoffensifs et quels autres nécessitent une modification. [...]

- Falsification = falsification expérimentale indirecte ?

Modus tollens expérimental : une reformulation

Soit $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ un contexte constitué d'énoncés empiriques universels ou individuels comprenant

- La théorie en cours
- Les conditions expérimentales
- Les effets observés

Peut-on déduire d'une preuve que Γ est contradictoire (i.e. $\Gamma \vdash \bot$) une falsification expérimentale d'(au moins) une hypothèse A_i ?

Théorème (effectivité expérimentale)

À partir d'une preuve $\pi : (\Gamma \vdash \bot)$ on peut extraire un programme dont l'exécution réalise un certain nombre de tests sur les hypothèses A_i et s'arrête en temps fini sur un test qui échoue.

$\Rightarrow$ Implique le modus tollens expérimental (et même équivalent)

Arithmétique expérimentale : le langage

Variables d'individu	$x, y, z \dots$	
Variables de prédicat n-aire	$X, Y, Z \dots$	(pour chaque $n \geq 0$)
Fonctions prim. réc.	$f, g, h \dots$	($0,\ s,\ +,\ \times,\ \hat{},\ \dots$)
Prédicats expérimentaux	$p, q, r, \dots$	(« testables »)

Expressions $\quad e, e' \quad ::= \quad x \quad | \quad f(e_1, \dots, e_n)$

Formules $\quad A, B, C \quad ::= \quad p(e_1, \dots, e_n) \quad | \quad X(e_1, \dots, e_n) \quad | \quad A \Rightarrow B \quad | \quad \forall x\ B \quad | \quad \forall X\ B$

- Variable de prédicat $\approx$ ensemble d'entiers $\approx$ nombre réel
- Arithmétique du second ordre $\approx$ Analyse

Arithmétique expérimentale : abréviations

- Système logique construit sur $\Rightarrow$ et $\forall$ (1^{er} et 2^{nd} ordre)
- Définition de $\perp, \neg, \wedge, \vee, \exists, =$ au 2^{nd} ordre :

$$
\begin{aligned}
\perp &\equiv \forall Z\ Z \\
\neg A &\equiv A \Rightarrow \perp \\[1ex]
A \wedge B &\equiv \forall Z\ \big((A \Rightarrow B \Rightarrow Z) \Rightarrow Z\big) \\
A \vee B &\equiv \forall Z\ \big((A \Rightarrow Z) \Rightarrow (B \Rightarrow Z) \Rightarrow Z\big) \\[1ex]
\exists x\ A(x) &\equiv \forall Z\ \big(\forall x\,(A(x) \Rightarrow Z)\ \Rightarrow\ Z\big) \\
\exists X\ A(X) &\equiv \forall Z\ \big(\forall x\,(A(X) \Rightarrow Z)\ \Rightarrow\ Z\big) \\[1ex]
x = y &\equiv \forall Z\ \big(Z(x) \Rightarrow Z(y)\big)
\end{aligned}
$$

Arithmétique expérimentale : notion de démonstration

Règles de démonstration de PA2 :

- Logique intuitionniste du 2nd ordre (axiome + règles d'intro/élim)
- Loi de Peirce $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (logique classique)
- Zéro $\neq$ successeur (4e ax. de Peano)
- Équations définissantes des f (récursion primitive)

$$\mathrm{Nat}(x) \quad \equiv \quad \forall Z \left(Z(0) \Rightarrow \forall y \left(Z(y) \Rightarrow Z(s(y)) \right) \Rightarrow Z(x) \right)$$

$$\forall^{\mathrm{Nat}} x\ A(x) \quad \equiv \quad \forall x\ (\mathrm{Nat}(x) \Rightarrow A(x))$$

$$\exists^{\mathrm{Nat}} x\ A(x) \quad \equiv \quad \exists x\ (\mathrm{Nat}(x) \wedge A(x))$$

$\rightsquigarrow$ Principe de récurrence (sur les énoncés relativisés)

Le langage expérimental

Énoncés élémentaires	E_0	$::=$	$p(e_1, \ldots, e_n) \quad \mid \quad e_1 = e_2 \quad \mid \quad \perp$
Énoncés testables	E	$::=$	$E_0 \quad \mid \quad E_0 \Rightarrow E \quad \mid \quad \neg E_0 \Rightarrow E$
Énoncés universels	U	$::=$	$\forall^{\mathrm{Nat}} x_1 \cdots \forall^{\mathrm{Nat}} x_n \; E(x_1, \ldots, x_n)$

- Énoncé testable $=$ clause (disjonctive) d'énoncés élémentaires
- Énoncé testable clos $=$ énoncé universel sans $\forall$ $(n = 0)$

On se donne une théorie expérimentale $U_1, \ldots, U_\ell$

(Théorie en cours, conditions expérimentales, effets observés...)

Mise à l'épreuve de la théorie expérimentale

Énoncés élémentaires	E_0	$::=$	$p(e_1,\ldots,e_n) \quad \mid \quad e_1 = e_2 \quad \mid \quad \bot$
Énoncés testables	E	$::=$	$E_0 \quad \mid \quad E_0 \Rightarrow E \quad \mid \quad \neg E_0 \Rightarrow E$
Énoncés universels	U	$::=$	$\forall^{\mathrm{Nat}} x_1 \cdots \forall^{\mathrm{Nat}} x_n \ E(x_1,\ldots,x_n)$

On suppose que chaque prédicat expérimental p est donné avec une fonction de vérité $\tilde{p} : \mathbb{N}^n \to \{0;1\}$ qui est :

1. Totale (hypothèse mathématique)
2. Physiquement calculable (hypothèse physique)

Mais on ne suppose pas que les $\tilde{p}$ satisfont $U_1,\ldots,U_\ell$...

- La valeur de vérité d'un énoncé testable E est physiquement calculable
- Tout énoncé universel U est physiquement falsifiable

Le théorème d'effectivité expérimentale

Théorème (Effectivité expérimentale)

À partir d'une preuve du séquent $U_1, \ldots, U_\ell \vdash \perp$ *(dans PA2) on peut extraire un programme dont l'exécution réalise un certain nombre de tests sur les hypothèses* U_i *et s'arrête en temps fini sur un test qui échoue.*

Note : Le programme extrait fait appel aux fonctions $\tilde{p}$

Corollaire (Modus tollens expérimental)

À partir d'une preuve du séquent $U_1, \ldots, U_\ell \vdash V$ *(dans PA2) et d'une falsification expérimentale de* V*, on peut extraire un programme dont l'exécution réalise un certain nombre de tests sur les hypothèses* U_i *et s'arrête en temps fini sur un test qui échoue.*

Note : Falsification expérimentale de V = jeu de paramètres venant falsifier V

Ces résultats s'étendent à ZF + DC (Zermelo-Fraenkel + choix dénombrable)

Deux modes d'exécution du programme extrait

Le programme extrait effectue un nombre fini de tests sur les hypothèses $U_1, \ldots, U_\ell$ avant de s'arrêter sur un échec.

1. **Exécution séquentielle**

   À chaque demande de calcul de $\tilde{p}(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ ...
   ... *on appelle l'expérimentateur pour déterminer la réponse*

   - Aboutit à la falsification d'un énoncé U_i

2. **Construction d'un arbre de décision**

   À chaque demande de calcul de $\tilde{p}(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ ...
   ... *on duplique le contexte d'exécution (fork)*

   - Aboutit à la construction d'un arbre binaire fini où :
     - Les nœuds sont de la forme $\tilde{p}(\nu_1, \ldots, \nu_n)$
     - Les feuilles sont des falsifications potentielles de la théorie
   - Plus d'intervention de l'expérimentateur !

Exemple : dans une réserve ornithologique...

1. Tous les corbeaux sont noirs
2. Un oiseau ne peut être à la fois noir et blanc
3. L'oiseau n^{o}37 est un corbeau
4. L'oiseau n^{o}37 est blanc

Formalisation :

$p(x)$: l'oiseau n$^o x$ est un corbeau
$q(x)$: l'oiseau n$^o x$ est noir
$r(x)$: l'oiseau n$^o x$ est blanc

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv \forall x\ (p(x) \Rightarrow q(x)) \\ A_2 &\equiv \forall x\ (q(x) \Rightarrow r(x) \Rightarrow \perp) \\ A_3 &\equiv p(37) \\ A_4 &\equiv r(37) \end{aligned}$$

Exemple (suite)

- Preuve de $\quad \Gamma = A_1, A_2, A_3, A_4 \vdash \bot$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A_2}{\Gamma \vdash q(37) \Rightarrow r(37) \Rightarrow \bot} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A_1}{\Gamma \vdash p(37) \Rightarrow q(37)} \quad \Gamma \vdash \overbrace{p(37)}^{A_3}}{\Gamma \vdash q(37)}}{\Gamma \vdash r(37) \Rightarrow \bot} \qquad \Gamma \vdash \overbrace{r(37)}^{A_4}}{\Gamma \vdash \bot}$$

- Arbre de falsification déduit de la preuve

$$q(37)? \quad \begin{array}{l} \text{oui} \nearrow \\ \text{non} \searrow \end{array} \quad \begin{array}{l} r(37)? \quad \begin{array}{l} \text{oui} \nearrow \quad \text{falsification de } A_2 \ (x = 37) \\ \text{non} \searrow \quad \text{falsification de } A_4 \end{array} \\[2em] p(37)? \quad \begin{array}{l} \text{oui} \nearrow \quad \text{falsification de } A_1 \ (x = 37) \\ \text{non} \searrow \quad \text{falsification de } A_3 \end{array} \end{array}$$

Le langage des réalisateurs (1/2)

Le langage λ_c (Krivine) + instructions d'expérimentation

$$
\begin{array}{llllll}
\textbf{Termes} & t, u & ::= & \xi \mid \lambda\xi\,.\,t \mid tu \mid \mathsf{c} & & (\text{quasi-preuves}) \\
 & & \mid & [\pi] \mid \mathsf{test}_U \mid \mathsf{fail}_U & & \\
\textbf{Piles} & \pi & ::= & \diamond \mid u \cdot \pi & & (u \text{ clos}) \\
\textbf{Processus} & p, q & ::= & t \star \pi & & (t \text{ clos})
\end{array}
$$

Évaluation des instructions de base :

$$
\begin{array}{rcl}
tu \star \pi & \succ & t \star u \cdot \pi \\
\lambda\xi\,.\,t \star u \cdot \pi & \succ & t\{\xi := u\} \star \pi \\
\mathsf{c} \star t \cdot \pi & \succ & t \star [\pi] \cdot \pi \\
[\pi] \star t \cdot \pi' & \succ & t \star \pi
\end{array}
$$

Le langage des réalisateurs (2/2)

Le langage λ_c (Krivine) + instructions d'expérimentation

Termes	t, u	$::= \; \xi \mid \lambda\xi\,.\,t \mid tu \mid \mathrm{c}$ $\mid [\pi] \mid \mathsf{test}_U \mid \mathsf{fail}_U$	(quasi-preuves)
Piles	π	$::= \; \diamond \mid u \cdot \pi$	(u clos)
Processus	p, q	$::= \; t \star \pi$	(t clos)

Évaluation des instructions de test :

$$U \quad \equiv \quad \forall^{\mathrm{Nat}} x_1 \cdots \forall^{\mathrm{Nat}} x_n \; E(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\mathsf{test}_U \;\star\; \bar{\nu}_1 \cdots \bar{\nu}_n \cdot \pi \quad \succ \quad \begin{cases} r_{\nu_1,\ldots,\nu_n} \;\star\; \pi & \text{si} \quad \tilde{E}(\nu_1, \ldots, \nu_n) = 1 \\ \mathsf{fail}_U \;\star\; \bar{\nu}_1 \cdots \bar{\nu}_n \cdot \pi & \text{si} \quad \tilde{E}(\nu_1, \ldots, \nu_n) = 0 \end{cases}$$

$$\mathsf{fail}_U \;\star\; \pi \quad \not\succ \qquad \text{(Processus terminal)}$$

Le modèle de réalisabilité : les principes

1. Construction paramétrée par un ensemble de processus $\perp\!\!\!\perp$ saturé :

$$p \succ p', \quad p' \in \perp\!\!\!\perp \quad \Rightarrow \quad p \in \perp\!\!\!\perp$$

2. À chaque formule close du langage on associe :
   - Un ensemble de termes $|A|$ $\quad$ (= valeur de vérité de A)
   - Un ensemble de piles $\|A\|$ $\quad$ (= valeur de fausseté de A)

3. La valeur de vérité $|A|$ est définie uniformément par

$$|A| \quad = \quad \{t \mid \forall \pi \in \|A\| \quad t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\} \qquad\qquad (= \|A\|^{\perp})$$

4. Le comportement calculatoire d'un terme t détermine son appartenance à une valeur de vérité $|A|$

5. Un choix astucieux de $\perp\!\!\!\perp$ permet d'obtenir le résultat recherché

Le modèle de réalisabilité : définitions

- Valeur de vérité définie uniformément par

$$|A| \quad = \quad \{t \mid \forall \pi \in \|A\| \quad t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\} \qquad\qquad (= \|A\|^{\perp})$$

- Valeur de fausseté définie par induction sur A

$$\|p(e_1, \ldots, e_n)\| \quad = \quad \begin{cases} \|\top\| & \text{si} \quad \tilde{p}(\downarrow e_1, \ldots, \downarrow e_n) = 1 \\ \|\bot\| & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\|A \Rightarrow B\| \quad = \quad |A| \cdot \|B\| \quad = \quad \{t \cdot \pi \mid t \in |A|, \quad \pi \in \|B\|\}$$

$$\|\forall x\ A(x)\| \quad = \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|A(n)\|$$

$$\|\forall X\ A(X)\| \quad = \quad \bigcup_{F : \mathbb{N}^n \to \mathfrak{P}(\Pi)} \|A(F)\|$$

Les étapes de la preuve

À toute dérivation $d : (A_1, \ldots, A_n \vdash B)$ (dans PA2) on associe une quasi-preuve d^* de variables libres $\xi_1, \ldots, \xi_n$ t.q. :

Lemme (Adéquation)

Si $u_1 \in |A_n|$, ..., $u_n \in |A_n|$, *alors* $d^*\{\xi_1 := u_1; \ldots; \xi_n := u_n\} \in |B|$

La quasi-preuve d^* ne dépend pas de $\perp\!\!\!\perp$

1. On choisit l'ensemble $\perp\!\!\!\perp_0 = \{p \succ^* \text{fail}_U \star \pi\}$
2. Pour ce choix de $\perp\!\!\!\perp_0$, on construit des réalisateurs

$$u_1 \in |U_1|, \ \ldots, \ u_\ell \in |U_\ell| \qquad \text{(à l'aide des test}_{U_i}\text{)}$$

3. À partir d'une dérivation $d : (U_1, \ldots, U_\ell \vdash \bot)$, on construit

$$p = d^*\{\xi_1 := u_1; \ldots; \xi_\ell := u_\ell\} \star \diamond \in \perp\!\!\!\perp_0$$