Concurrence — Géométrie — Catégories

Comment ça marche ensemble
et application à l'indépendance de processus

Thibaut Balabonski

avec Éric Goubault et Emmanuel Haucourt

Jeudi 27 Novembre 2008

Concurrence et géométrie

– Poser le problème –

Le décor

Les agents :

- Un ensemble de processus concurrents
- Des ressources partagées

Les outils pour une collaboration harmonieuse :

- Sémaphores
- Barrières de synchronisation
- Primitives de communication
- Etc.

Un langage jouet

On se limite aux sémaphores, avec deux instructions :

Pa	Prendre une occurrence de a.
Va	Relâcher une occurrence de a.

Un petit programme :

$$Pa.Va.Pb.Vb \mid Pb.Vb.Pa.Va$$

Un langage jouet

On se limite aux sémaphores, avec deux instructions :

Pa	Prendre une occurrence de a.
Va	Relâcher une occurrence de a.

Un petit programme :

$$Pa.Va.Pb.Vb \mid Pb.Vb.Pa.Va$$

Objectif

Représenter l'espace des exécutions d'un programme.
(pour analyse statique)

Un processus = Une dimension

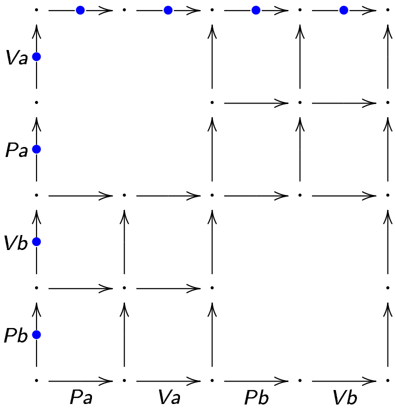
$$\cdot \xrightarrow{Pa} \cdot \xrightarrow{Va} \cdot \xrightarrow{Pb} \cdot \xrightarrow{Vb} \cdot$$

Ici, chaque point représente un état du programme.

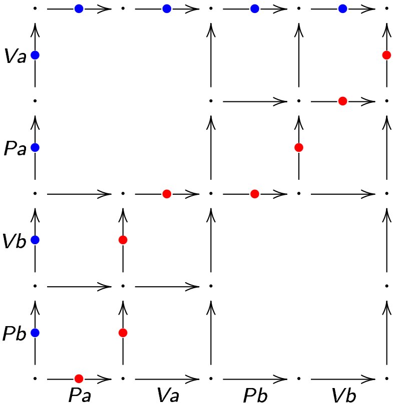
Deux processus = Deux dimensions ??

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "Va"] & & \cdot \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \arrow[u] \\
\cdot \arrow[u, "Pa"] \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \arrow[u] \\
\cdot \arrow[u, "Vb"] \arrow[r] & \cdot \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \arrow[u] & & \cdot \arrow[u] \\
\cdot \arrow[u, "Pb"] \arrow[r, "Pa"'] & \cdot \arrow[u] \arrow[r, "Va"'] & \cdot \arrow[u] \arrow[r, "Pb"'] & \cdot \arrow[r, "Vb"'] & \cdot \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Deux processus = Deux dimensions ??



Deux processus = Deux dimensions ??



La bonne représentation

- On part d'un ensemble de points (états des processus).
- Ce qui nous intéresse est en réalité est l'ensemble des manières de passer d'un point à l'autre (exécutions du programme).

La bonne représentation

- On part d'un ensemble de points (états des processus).
- Ce qui nous intéresse est en réalité est l'ensemble des manières de passer d'un point à l'autre (exécutions du programme).

Devinette

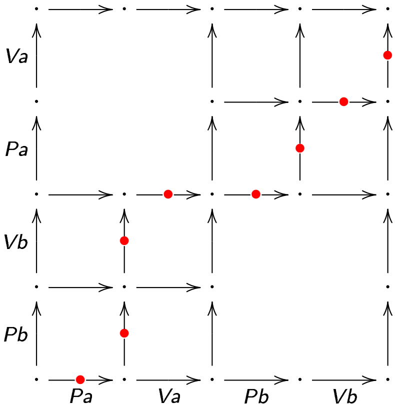
Quelle structure est-on en train de voir poindre ?

Une catégorie !

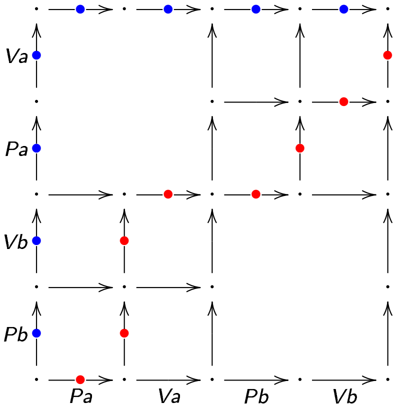
La question qui reste

Quand deux chemins d'exécution sont-ils égaux ?

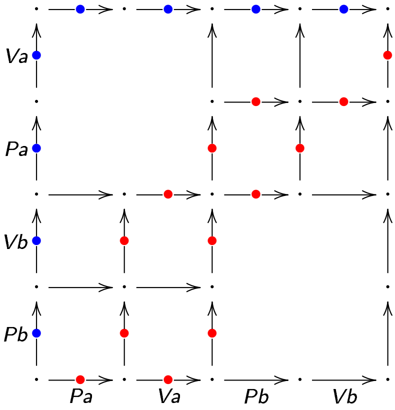
Par exemple



Par exemple



Par exemple



Le bon cadre

- On a un espace troué (configurations interdites).
- On veut raisonner “à déformation près” (chemins équivalents).

Le bon cadre

- On a un espace troué (configurations interdites).
- On veut raisonner “à déformation près” (chemins équivalents).

Nouvelle devinette

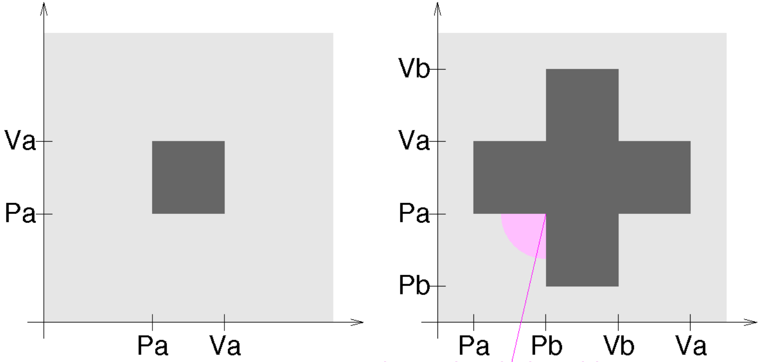
De quelle base mathématique partir ?

Un espace topologique !

Concurrence et géométrie

– Les constructions –

Sculpture sur espaces topologiques dirigés

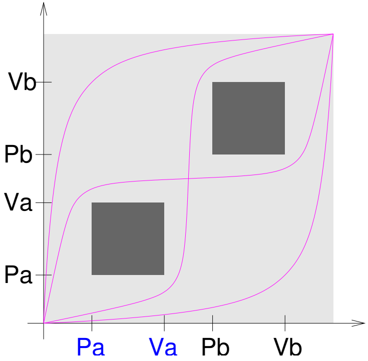


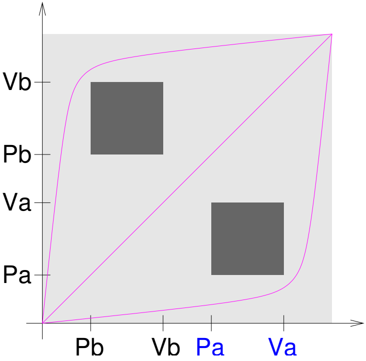
Maximum local : interblocage.

Structure associée

Catégorie fondamentale :

- Objets : tous les points de l'espace.
- Morphismes : tous les chemins "à déformation continue près".





Bilan provisoire

On a trouvé une belle formalisation à l'espace des exécutions.

Bilan provisoire

On a trouvé une belle formalisation à l'espace des exécutions.

Ce faisant, on est passé d'un objet "gros" à un objet infini.

Bilan provisoire

On a trouvé une belle formalisation à l'espace des exécutions.

Ce faisant, on est passé d'un objet "gros" à un objet infini.

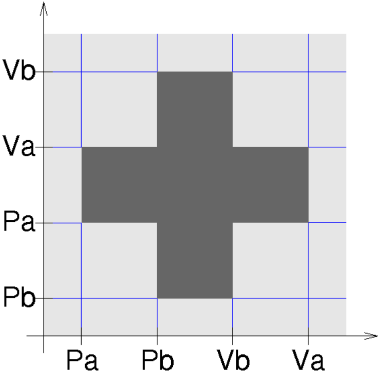
Bien joué !

Recoller les pots cassés

Retour à des catégories finies par quotient.

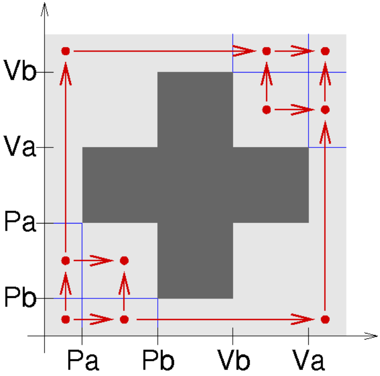
Recoller les pots cassés

Retour à des catégories finies par quotient.



Recoller les pots cassés

Retour à des catégories finies par quotient.



Moralement, on contracte les chemins qui ne constituent pas une prise de décision irréversible.

Processus indépendants

– Notion d'indépendance –

Définition naïve

Processus indépendants

Deux ensembles de processus sont indépendants s'ils utilisent des ensembles de ressources disjoints.

Un exemple d'indépendance non triviale

s : ressource simple.

t : ressource simple.

u : ressource double.

1. $Ps.Pu.Vu.Vs$
2. $Ps.Pu.Vu.Vs$
3. $Pt.Pu.Vu.Vt$
4. $Pt.Pu.Vu.Vt$

Un exemple d'indépendance non triviale

s : ressource simple.
t : ressource simple.
u : ressource double.

1. $Ps.Pu.Vu.Vs$
2. $Ps.Pu.Vu.Vs$
3. $Pt.Pu.Vu.Vt$
4. $Pt.Pu.Vu.Vt$

Un exemple d'indépendance non triviale

s : ressource simple.
t : ressource simple.
u : ressource double.

1.	$Ps.Vs$
2.	$Ps.Vs$
3.	$Pt.Vt$
4.	$Pt.Vt$

Meilleure définition

Moralement

Deux ensembles de processus sont indépendants
si l'espace des exécutions de l'un est invariant
le long des exécutions de l'autre.

Concrètement, on définit ceci avec une projection dans l'espace dirigé associé à un programme.

Meilleure définition

Moralement

Deux ensembles de processus sont indépendants
si l'espace des exécutions de l'un est invariant
le long des exécutions de l'autre.

Concrètement, on définit ceci avec une projection dans l'espace dirigé associé à un programme.

Définition équivalente

Deux programmes P et Q sont indépendants
si la catégorie fondamentale de $P \mid Q$ est
le produit cartésien des catégories de P et Q.

Processus indépendants

– Factorisation de catégories –

Objectif : théorème de factorisation

Théorème

Toute catégorie finie sans boucle connexe
admet une unique décomposition
en produit de catégories irréductibles.

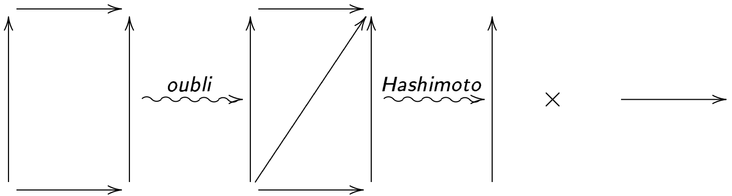
Point de départ

Lemme de Hashimoto

Tout ensemble partiellement ordonné connexe fini admet une unique décomposition en produit d'ensembles ordonnés irréductibles.

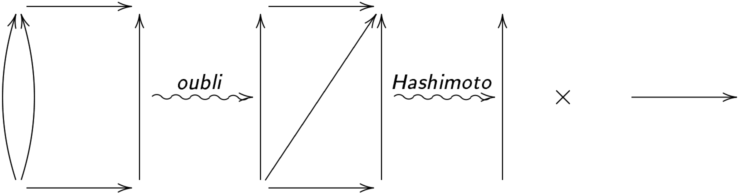
$$\textit{Catégorie} \underset{d'oubli}{\overset{Foncteur}{\rightsquigarrow}} \textit{Ensemble ordonné} \underset{Hashimoto}{\overset{Lemme\ de}{\rightsquigarrow}} \textit{Factorisation}$$

Difficultés de reconstruction



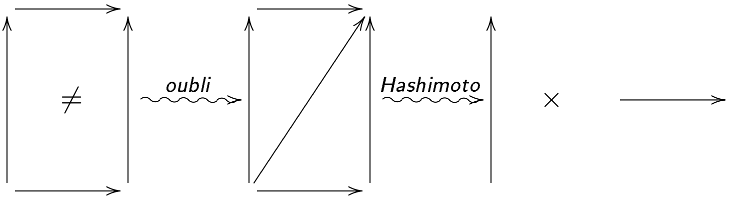
- Associer une catégorie à chaque facteur.
- Vérifier le produit.

Difficultés de reconstruction



- Associer une catégorie à chaque facteur.
- Vérifier le produit.

Difficultés de reconstruction

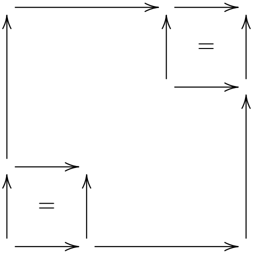


- Associer une catégorie à chaque facteur.
- Vérifier le produit.

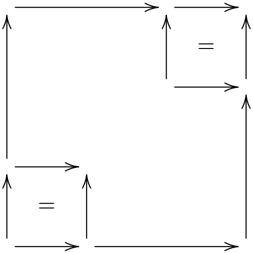
Processus indépendants

– Boîte à outils –

Représentation par générateurs et relations



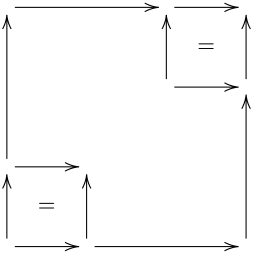
Représentation par générateurs et relations



Caractérisent une catégorie :

- Objets. ($\mathcal{D}$)
- Morphismes générateurs. ($\mathcal{B}$)
- Relations sur les suites de générateurs. ($\mathcal{R}$)

Représentation par générateurs et relations



Caractérisent une catégorie :

- Objets. $(\mathcal{D})$
- Morphismes générateurs. $(\mathcal{B})$
- Relations sur les suites de générateurs. $(\mathcal{R})$

Théorème

Toute catégorie finie sans boucle admet une représentation minimale unique.

Produits biaisés

$$\langle \mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{R} \rangle \in \mathit{Biais}(\langle \mathcal{D}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{R}_1 \rangle, \langle \mathcal{D}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{R}_2 \rangle)$$

ssi

$$\langle \mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{R} \rangle = \langle \qquad , \qquad , \qquad \rangle$$

Produits biaisés

$$\langle \mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{R} \rangle \in \mathit{Biais}(\langle \mathcal{D}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{R}_1 \rangle, \langle \mathcal{D}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{R}_2 \rangle)$$

ssi

$$\langle \mathcal{D}, \quad , \quad \rangle = \langle \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2, \qquad\qquad , \qquad\qquad \rangle$$

Produits biaisés

$$\langle \mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{R} \rangle \in Biais(\langle \mathcal{D}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{R}_1 \rangle, \langle \mathcal{D}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{R}_2 \rangle)$$

ssi

$$\langle \quad , \mathcal{B}, \quad \rangle = \langle \qquad\qquad , \mathcal{B}_1 \times \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_1 \times \mathcal{B}_2 \cup B, \qquad\qquad\qquad\qquad \rangle$$

Produits biaisés

$$\langle \mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{R} \rangle \in Biais(\langle \mathcal{D}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{R}_1 \rangle, \langle \mathcal{D}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{R}_2 \rangle)$$

ssi

$$\langle \quad , \quad , \mathcal{R} \rangle = \langle \qquad\qquad , \qquad\qquad\qquad\qquad , \mathcal{R}_1 \times \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_1 \times \mathcal{R}_2 \cup R \rangle$$

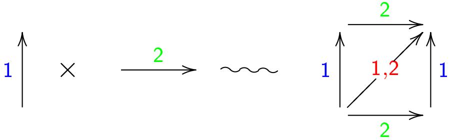
Produits biaisés

$$\langle \mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{R} \rangle \in Biais(\langle \mathcal{D}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{R}_1 \rangle, \langle \mathcal{D}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{R}_2 \rangle)$$

ssi

$$\langle \mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{R} \rangle = \langle \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2, \mathcal{B}_1 \times \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_1 \times \mathcal{B}_2 \cup B, \mathcal{R}_1 \times \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_1 \times \mathcal{R}_2 \cup R \rangle$$

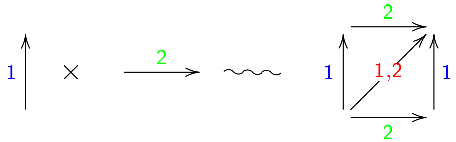
B et R ensembles “mixtes”.



Produits biaisés

$$\langle \mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{R} \rangle \in \mathit{Biais}(\langle \mathcal{D}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{R}_1 \rangle, \langle \mathcal{D}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{R}_2 \rangle)$$
$$\mathit{ssi}$$
$$\langle \mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{R} \rangle = \langle \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2, \mathcal{B}_1 \times \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_1 \times \mathcal{B}_2 \cup B, \mathcal{R}_1 \times \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_1 \times \mathcal{R}_2 \cup R \rangle$$

B et R ensembles “mixtes”.



Théorème

Présentation minimale d'un produit =
Un certain produit biaisé des présentations minimales des facteurs.

Trace

À chaque morphisme dans un produit
on associe l'ensemble des facteurs sur lesquels
ce morphisme se décompose.

Trace

À chaque morphisme dans un produit
on associe l'ensemble des facteurs sur lesquels
ce morphisme se décompose.

Théorème

Dans tout produit de catégories sans boucle,
la trace d'un morphisme est uniquement déterminée
par sa source et sa cible.

Méthode générale

1. Calcul de la présentation minimale.
2. Regroupement des morphismes de base.
    - 3 conditions nécessaires successives.
    - Algorithme "union-find" de Tarjan.
3. Association d'un facteur à chaque partie de la base.

Enfin, on sait retrouver les processus se cachant derrière chaque morphisme de base !

Bilan

Analyse de programmes concurrents :

- L'interprétation géométrique d'un programme permet une représentation compacte de l'espace de ses exécutions.
- On a une méthode *effective* et *sémantique* pour détecter l'indépendance de sous-programmes.

Catégories :

- Les catégories sans boucle sont une espèce à part, pleine de bonnes propriétés.

Bilan

Analyse de programmes concurrents :

- L'interprétation géométrique d'un programme permet une représentation compacte de l'espace de ses exécutions.
- On a une méthode *effective* et *sémantique* pour détecter l'indépendance de sous-programmes.

Catégories :

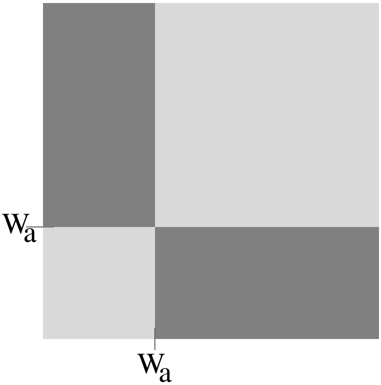
- Les catégories sans boucle sont une espèce à part, pleine de bonnes propriétés.

Questions ?

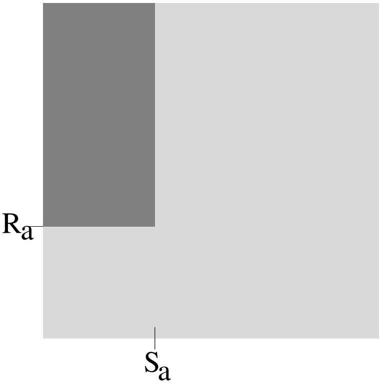
Matériel supplémentaire

3. Images supplémentaires
   - Deux processus
   - Trois processus
   - Dîner de philosophes
4. Preuves et contre-exemples
   - Représentation minimale
   - Connexité
5. Conditions de groupement

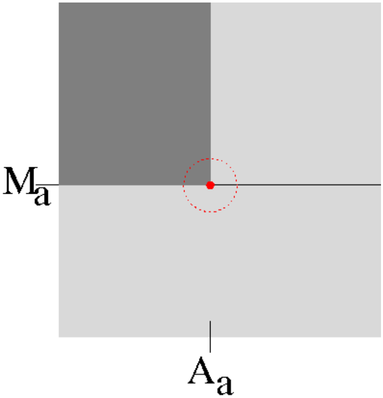
Barrière de synchronisation



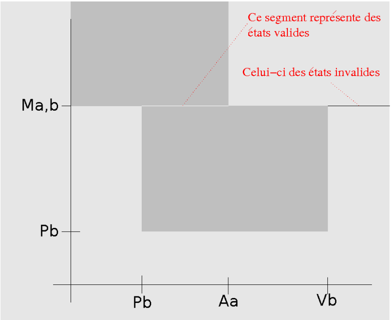
Envoi de message simple

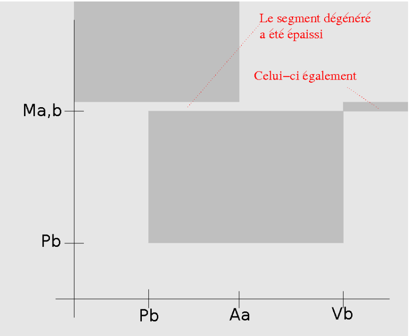


Moniteurs

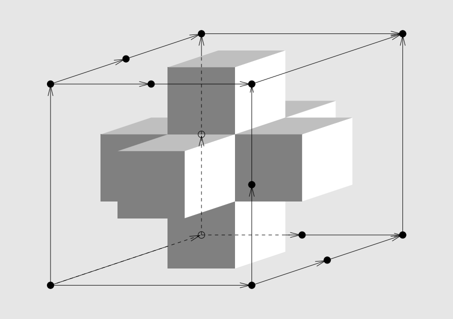


Moniteurs

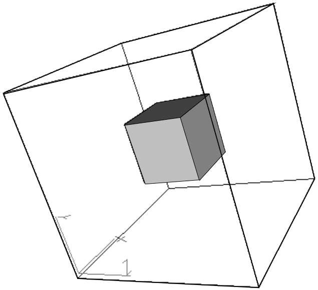

Ce segment représente des états valides
Celui–ci des états invalides
Ma,b
Pb
Pb
Aa
Vb

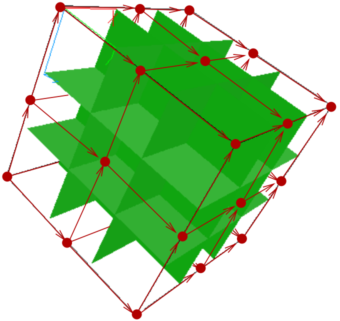

Le segment dégénéré a été épaissi
Celui–ci également
Ma,b
Pb
Pb
Aa
Vb

"Drapeau suisse" en trois dimensions

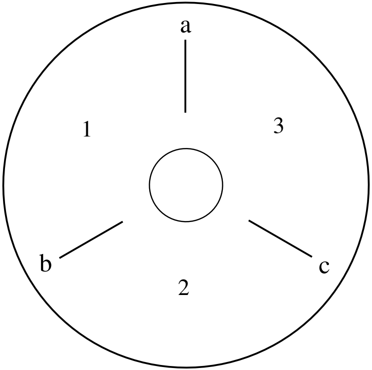


Ressource double



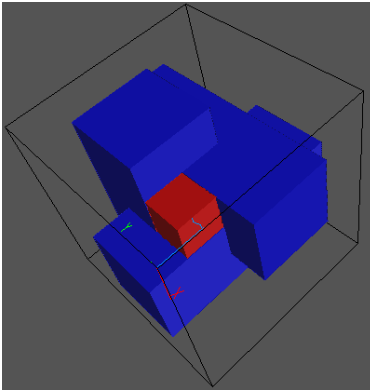


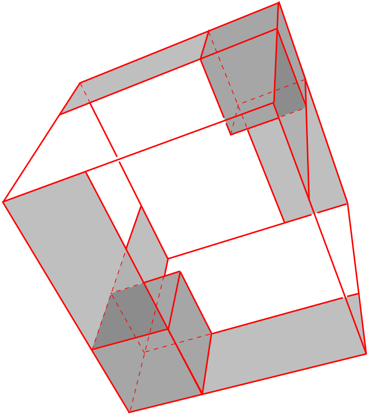
Trois philosophes



1	$Pa.Pb.Va.Vb$
2	$Pb.Pc.Vb.Vc$
3	$Pc.Pa.Vc.Va$

Composantes philosophales





Base unique

Base : morphismes irréductibles.

- Tout morphisme se décompose sur les irréductibles car pas de boucle.
- Les irréductibles appartiennent à toute partie génératrice.

Relations minimales

Relation entre chemins de x à y élémentaire si non déductible de relations sur des sous-chemins.

Relations élémentaires forment un ensemble minimal.

- Une relation non engendrée minimale ne serait pas élémentaire et se déduirait de relations “plus petites”, qui seraient engendrées. Contradiction par “transitivité”.
- Les élémentaires sont indispensables.

Factorisation en irréductibles non unique

$$1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$$

$$(1 + X)(1 + X + X^2)(1 - X + X^2)$$

$$(1 + X^3)(1 + X + X^2) \qquad (1 + X)(1 + X^2 + X^4)$$

Problème d'étiquetage

On ne colorie que les morphismes de la base.

Deux conditions de regroupement :

Problème d'étiquetage

On ne colorie que les morphismes de la base.

Deux conditions de regroupement :

- Carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "1"] & {} \\ {} \arrow[u, "2"] \arrow[r, "1"'] & {} \arrow[u, "2"'] \end{tikzcd}$$

Problème d'étiquetage

On ne colorie que les morphismes de la base.

Deux conditions de regroupement :

- Carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "1"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "2"] \arrow[r, "1"'] & \cdot \arrow[u, "2"'] \end{tikzcd}$$

- Morphismes incidents : $\xleftrightarrow{1} \ \xleftrightarrow{1}$
  Si pas de complétion en carré commutatif.

Problème d'association de catégories

Une condition de regroupement :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "1"] \arrow[d, dotted, no head, "2"'] & {} \arrow[d, dotted, no head, "2"] \\ {} \arrow[r, "1"'] & {} \end{tikzcd}$$

Problème de produit direct

Une condition de groupement :

- Produit effectivement biaisé